

Definition:

Grundfunktionen:

- *Konstante Funktionen* C_r^n mit

$$C_r^n(x) = r$$

für $x \in \mathbb{N}^n$ und $r \in \mathbb{N}$.

- *Projektionen* I_i^n mit

$$I_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$$

für $0 \leq i \leq n$ und $x_i \in \mathbb{N}$.

- *Identitäten* I^n mit

$$I^n(x) = x$$

für $x \in \mathbb{N}^n$.

- *Diagonalisierungen* Δ_m^n mit

$$\Delta_m^n(x) = (x_1, \dots, x_m)$$

für $x \in \mathbb{N}^n$ und $x_i = x$ für $i = 1, \dots, m$.

- Die *Nachfolgerfunktion* $S: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit

$$S(x) = x + 1.$$

- Die *Signumfunktion* $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit
$$\begin{aligned}\sigma(x) &= 0 \text{ für } x = 0, \\ &= 1 \text{ für } x > 0.\end{aligned}$$

- Die Funktion *minus*: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit

$$\text{minus}(x, y) = x \dot{-} y$$

wobei

$$\begin{aligned}x \dot{-} y &= x - y \text{ für } x \geq y, \\ &= 0 \text{ für } x < y.\end{aligned}$$

- Die Funktion *plus*: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit
$$\text{plus}(x, y) = x + y.$$

- Die Funktion *mal*: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit
$$\text{mal}(x, y) = x * y.$$

Operatoren:

Einsetzung:

Seien f_1, \dots, f_n, g partielle Funktionen mit

$$f_i: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}^{m_i} \quad \text{und} \quad g: \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}^l$$

für $i = 1, \dots, n$, $\sum_{i=1}^n m_i = m$. Dann definieren wir die Einsetzung $h: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}^l$ als

$$h(x) = g(f_1(x), \dots, f_n(x)).$$

und schreiben $h = E(g; f_1, \dots, f_n)$. E heißt dann der *Einsetzungsoperator*. Die resultierende Funktion h ist wieder eine partielle Funktion mit Definitionsbereich

$$D(h) = \{x \mid x \in \cap_{i=1}^n D(f_i), (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in D(g)\}.$$

Beispiel:

Sei f eine Funktion mit

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x \dot{-} y) + x * y \\ &= plus(minus(x, y), mal(x, y)). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$f = E(plus; minus, mal).$$

Da $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ sind auch die folgenden Einsetzungen definierbar:

$$E(plus; f, f), \quad E(f; f, f), \dots$$

Achtung: Die Gleichheit

$$x + (y \dot{-} z) = (x + y) \dot{-} z$$

ist ungültig!

Gegenbeispiel: $x = 1, y = 1, z = 2$; hier gilt

$$\begin{aligned} 1 + (1 \dot{-} 2) &= 1 + 0 = 1 \\ (1 + 1) \dot{-} 2 &= 2 \dot{-} 2 = 0. \end{aligned}$$

Kartesisches Produkt:

Seien $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}^l$ und $g: \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}^n$ partielle Funktionen, so ist das Kartesische Produkt $f \times g$ von f und g definiert als

$$f \times g(x, y) = (f(x), g(y)).$$

Für den Definitionsbereich gilt

$$D(f \times g) = \{(x, y) \mid x \in D(f), y \in D(g)\}.$$

Kartesische Produkt für mehr als zwei Funktionen:

$$f \times g \times h = (f \times g) \times h.$$

Allgemein gilt:

$$\begin{aligned} & (f_1 \times \dots \times f_n)(x_1, \dots, x_n) = \\ & (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)). \end{aligned}$$

E kann mittels \circ , \times und Diagonalisierung definiert werden.

$$\begin{aligned} & g(f_1(x), \dots, f_n(x)) = \\ & g \circ (f_1 \times \dots \times f_n)(x, \dots, x) = \\ & g \circ (f_1 \times \dots \times f_n) \circ \Delta_n^k(x). \end{aligned}$$

und damit

$$E(g; f_1, \dots, f_n) = g \circ (f_1 \times \dots \times f_n) \circ \Delta_n^k.$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} & E(\textit{plus}; \textit{minus}, \textit{mal}) = \\ & \textit{plus} \circ (\textit{minus} \times \textit{mal}) \circ \Delta_2^2. \end{aligned}$$

Primitive Rekursion:

Seien $f: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}^k$ und $g: \mathbb{N}^{n+k+1} \rightarrow \mathbb{N}^k$ totale Funktionen.

Sei $h = Pr(f, g)$ dann $h: \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}^k$ und

$$\begin{aligned} h(x, 0) &= f(x), \\ h(x, y + 1) &= g(x, y, h(x, y)). \end{aligned}$$

Ist $n = 0$ so gilt

$$\begin{aligned} h(0) &= r, \\ h(y + 1) &= g(y, h(y)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(x, 0) &= f(x), \\ h(x, n + 1) &= g(x, n, h(x, n)). \end{aligned}$$

Definiere + mittels Pr aus S, I^1 und I_3^3 :

$$\begin{aligned} x + 0 &= x, \\ x + (n + 1) &= S(x + n). \end{aligned}$$

D.h.

$$\begin{aligned} plus(x, 0) &= I^1(x), \\ plus(x, n + 1) &= S \circ I_3^3(x, n, plus(x, n)), \end{aligned}$$

und

$$plus = Pr(I^1, S \circ I_3^3).$$

es genügt nicht $h: Pr(f, g)$ als

$$\begin{aligned} h(x, 0) &= f(x), \\ h(x, n+1) &= g(h(x, n)) \end{aligned}$$

zu definieren.

Definiere mal mittels Pr aus $+$, C_0^1, I_1^3, I_3^3 und dem Operator E .

$$\begin{aligned} x * 0 &= 0, \\ x * (n+1) &= x * n + x, \end{aligned}$$

d.h. x wird in Rekursion gebraucht

$$\begin{aligned} mal(x, 0) &= C_0^1(x), \\ mal(x, n+1) &= plus(x, mal(x, n)). \end{aligned}$$

$plus(x, mal(x, n)) = E(plus; I_1^3, I_3^3)(x, n, mal(x, n))$
und damit

$$mal = Pr(C_0^1, E(plus; I_1^3, I_3^3)).$$

$$\begin{aligned} h(x, 0) &= f(x), \\ h(x, n+1) &= g(x, n, h(n, y)). \end{aligned}$$

Auch n für die Rekursion wichtig!

Faktorielle ! aus $+$ und $*$:

$$\begin{aligned} h(0) &= 1, \\ h(n+1) &= S(n) * h(n), \end{aligned}$$

liefert offensichtlich $h(n) = n!$.

$$\begin{aligned} h(n+1) &= mal(S(n), h(n)) \\ &= mal \circ (S \times I^1)(n, h(n)), \\ h &= Pr(1, mal \circ (S \times I^1)). \end{aligned}$$

definiere exp mit $\exp(x, y) = x^y$:

$$\begin{aligned}\exp(x, 0) &= 1, \\ \exp(x, n+1) &= x * \exp(x, n).\end{aligned}$$

$$h = Pr(C_1^1, E(mal; I_1^3, I_3^3)).$$

$$\begin{aligned}f(0) &= 2, \\ f(n+1) &= \exp(2, f(n)),\end{aligned}$$

$$f = \text{Pr}(2, E(\exp; C_2^2, I_2^2)).$$

f wächst sehr stark.

$$f(0) = 2, f(1) = 2^2, f(2) = 2^{2^2}, f(3) = 2^{2^{2^2}}, \text{ etc.}$$

Der μ -Operator:

Sei h eine totale Funktion. Der μ -Operator (Minimisierung) ist definiert als

$$\begin{aligned}(\mu h)(x_1, \dots, x_n) &= \\ \min\{k \mid h(x_1, \dots, x_{n-1}, k) = x_n\}.\end{aligned}$$

Achtung: μh i.A. nicht total!

$$\begin{aligned}D(\mu h) &= \\ \{(x_1, \dots, x_n) \mid (\exists k)h(x_1, \dots, x_{n-1}, k) = x_n\} &= x\end{aligned}$$

Der μ_0 -Operator:

$$\begin{aligned}(\mu_0 h)(x_1, \dots, x_{n-1}) &= \\ \min\{k \mid h(x_1, \dots, x_{n-1}, k) = 0\}.\end{aligned}$$

Die Anwendung des μ -Operators wird μ -*Rekursion*, die des μ_0 -Operators μ_0 -*Rekursion* genannt.

μ - und μ_0 -Operator mittels $\{E, \times\}$ wechselseitig ausdrückbar. So ist

$$\mu h = \mu_0 h'$$

mit

$$h'(x_1, \dots, x_n, y) = (h(x_1, \dots, x_{n-1}, y) \dot{-} x_n) + (x_n \dot{-} h(x_1, \dots, x_{n-1}, y)).$$

Der μ -Operator ist auch über Prädikaten definierbar.

Ist P ein Prädikat auf \mathbb{N}^{k+1} , so ist μP eine (partielle) Funktion $\mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$. Die Definition ist

$$\begin{aligned} &(\mu P)(x_1, \dots, x_k) = \\ &\min\{m \mid P(x_1, \dots, x_k, m) = \mathbf{t}\}. \end{aligned}$$

Beispiele:

$$(\mu h)(x_1, \dots, x_n) = \min\{k \mid h(x_1, \dots, x_{n-1}, k) = x_n\}.$$

$$(\mu minus)(x, y) = \min\{k \mid minus(x, k) = y\}.$$

Für $x < y$ ist $(\mu minus)(x, y)$ undefiniert.!

Denn

$$D(\mu minus) = \{(x, y) \mid y \leq x\}.$$

Wenn $(x, y) \in D(\mu minus)$ dann

$$y + (\mu minus)(x, y) = x.$$

$$(\mu P)(x_1, \dots, x_{k-1}) = \min\{m \mid P(x_1, \dots, x_{k-1}, m) = \mathbf{t}\}.$$

μ -Operator über Prädikaten: findet kleinste Zahl mit einer bestimmten Eigenschaft.

Sei T das Prädikat teilt, d.h.

$$T(m, n) = \mathbf{t} \iff m \text{ teilt } n.$$

$$Q(n, m) = T(m, n) \wedge m > 1 \wedge m < n.$$

$Q(n, m)$: m ist nicht-trivialer Teiler von n ist. Dann ist

$$(\mu Q)(n) = \min\{m \mid T(m, n), m > 1, m < \mu Q = \text{kleinster nicht-trivialen Teiler.}$$

$$D(\mu Q) = \{n \mid n \geq 2, n \text{ ist nicht prim}\}.$$

Basisfunktionen:

Wir bezeichnen die Menge BF der Funktionen $\{C_r^n, I_m^n, I^n, \Delta_m^n \mid n, m \geq 1, r \geq 0\}$ als *Basisfunktionen*.

Basiooperatoren:

E, \circ und \times heissen *Basisoperatoren* (Bezeichnung BO).

Ist F eine Klasse von Funktionen und O eine Menge von Operatoren so bezeichnet $cl_O(F)$ die kleinste Klasse die F enthält und unter $O \cup BO$ abgeschlossen ist.

Sei F eine Funktionenklasse und $G \subseteq F$. F heisst

- *mittels O aus G erzeugt*

wenn $cl_O(G) = F$. Ist $f \in F$ so sagen wir, dass auch (die einzelne Funktion) f mittels O aus G erzeugt ist.

- $+$ ist mittels Pr aus $BF \cup \{S\}$ erzeugt.
- $*$ ist mittels Pr aus $BF \cup \{+\}$ erzeugt.
- Damit ist auch $*$ mittels Pr aus $BF \cup \{S\}$ erzeugt.

primitiv rekursive Funktionen:

Die Funktionenklasse welche

- mittels Pr aus $BF \cup \{S\}$ erzeugt

ist heisst die Klasse der *primitiv rekursiven Funktionen* und wird mit PR bezeichnet.

partiell rekursive Funktionen:

Die Funktionenklasse PREK welche

- aus $BF \cup \{S\}$ mittels $\{Pr, \mu\}$ erzeugt

ist heisst die Klasse der *partiell rekursiven Funktionen*.

rekursive Funktionen:

Die Teilklasse REK welche aus den totalen Funktionen in PREK besteht heisst die Klasse der *rekursiven Funktionen*.

Prädikatenklassen:

Sei $g: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ eine totale Funktion dann definiert man das zugehörige Prädikat $\pi(g)$ als

$$\pi(g)(x) = \mathbf{t} \text{ iff } g(x) \neq 0.$$

Die Prädikatenklasse zu einer Funktionenklasse F ist

$$Praed(F) = \{\pi(g) \mid g \in F_1, g \text{ total}\}.$$

Die Menge der k -stelligen Prädikate aus $Praed(F)$ bezeichnen wir mit $Praed^k(F)$.

- $Praed(PR)$: primitiv rekursive Prädikate,
- $Praed(REK)$: rekursive Prädikate.

Achtung: $Praed(REK) = Praed(PREK)$.

Sind P und Q k -stellige Prädikate, also

$$P, Q: \mathbb{N}^k \rightarrow \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\},$$

so definieren wir in naheliegender Weise

$$(P \wedge Q)(x) = \mathbf{t} \iff P(x) = \mathbf{t} \text{ und } Q(x) = \mathbf{t},$$

$$(P \vee Q)(x) = \mathbf{t} \iff P(x) = \mathbf{t} \text{ oder } Q(x) = \mathbf{t},$$

$$(\neg P)(x) = \mathbf{t} \iff P(x) = \mathbf{f}.$$

- Alle definierten Funktionenklassen sind abgeschlossen unter
 - booleschen Operationen,
 - Fallunterscheidungen und
 - beschränkter Quantifikation.
- Das bedeutet, dass die Verwendung dieser Operatoren zu keinen neuen Funktionen führt.

$$T(n, m) = \mathbf{t} \iff n \text{ teilt } m$$

T ist primitiv rekursiv:

$$Q(x, y, z) = \mathbf{t} \iff x * z = y,$$

$$\begin{aligned} T(x, y) = \mathbf{t} &\iff (\exists z) x * z = y \\ &\iff (\exists z \leq y) x * z = y. \end{aligned}$$

Per definitionem von Q^e gilt

$$\begin{aligned} Q^e(x, y, z) = \mathbf{t} &\iff (\exists i \leq z) Q(x, y, i) \text{ und} \\ T(x, y) = \mathbf{t} &\iff Q^e(x, y, y) = \mathbf{t}. \end{aligned}$$

Wegen Abschlusssatz ist $T \in \text{Praed}(\text{PR})$.

Das Primzahlprädikat ist primitiv rekursiv:

$$\text{Prim}(x) \iff$$

$$\begin{aligned} x &> 1 \wedge (\forall z \leq x)(T(z, x) \supset (z = 1 \vee z = x)) \\ &\iff \end{aligned}$$

$$x > 1 \wedge (\forall z \leq x)(\neg T(z, x) \vee (z = 1 \vee z = x)).$$

Wegen Abschlusssatz ist

$$\{>, =\} \subseteq \text{Praed}(\text{PR})$$

und $\text{Praed}(\text{PR})$ ist unter booleschen Operationen und beschränkter Quantifikation abgeschlossen. Damit ist

$$\text{Prim} \in \text{Praed}(\text{PR}).$$