

RESOLUTION

Prinzip:

- indirekter Beweis
- Transformation in Normalform
- Deduktion auf Normalformen

warum Normalformen?

- effizientere Inferenzsysteme.
- geeignet für Automatisierung.

Transformation in Klauselform:

Hauptschritte:

- Elimination von \supset ,
 \neg nur noch vor Atomen,
Variablen-Standardisierung.
- Elimination von \exists .
- Weglassen der \forall -Quantoren,
transformieren in konjunktive NF.
- Repräsentation als Menge atomarer Sequente.

Beispiel:

I. negierter Satz:

$$\neg [((\forall x)(M(x) \supset S(x)) \wedge M(s)) \supset S(s)].$$

II. Normalform 1:

$$((\forall x)(\neg M(x) \vee S(x)) \wedge M(s)) \wedge \neg S(s).$$

III. konjunktive Normalform:

$$(\neg M(x) \vee S(x)) \wedge M(s) \wedge \neg S(s).$$

IV. Klauselform:

$$\{M(x) \vdash S(x); \vdash M(s); S(s) \vdash\}.$$

SCHRITT 1:

Durch erschöpfende Regelanwendung von

(T1) – (T6):

$$\begin{array}{ll} (T1) & (\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2) \Rightarrow (\neg \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2), \\ (T2) & \neg(\mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2) \Rightarrow (\neg \mathcal{F}_1 \vee \neg \mathcal{F}_2), \\ (T3) & \neg(\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2) \Rightarrow (\neg \mathcal{F}_1 \wedge \neg \mathcal{F}_2), \\ (T4) & \neg \neg \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}, \\ (T5) & \neg(\forall \alpha) \mathcal{F} \Rightarrow (\exists \alpha) \neg \mathcal{F}, \\ (T6) & \neg(\exists \alpha) \mathcal{F} \Rightarrow (\forall \alpha) \neg \mathcal{F}. \end{array}$$

(T1) - (T6): semantisch korrekt.
Wenn $A \Rightarrow B$ dann $A \sim B$.

VARIABLEN-NORMALISIERUNG:

(Q1) verschiedene Vorkommen von Quantoren binden verschiedene Variablen (d.h. es ist unmöglich, daß $(\forall x)$ oder $(\exists x)$ mehr als einmal in einer Formel vorkommen).

(Q2) Variablen kommen nicht gleichzeitig frei und gebunden in einer Formel vor.

Die Syntaxeigenschaften (Q1), (Q2) lassen sich immer durch Umbenennung *gebundener* Variablen herbeiführen, wobei die logische Äquivalenz erhalten bleibt.

BEISPIEL:

$$(\forall x)A(x) \wedge (\exists x)B(x) \Rightarrow (\forall x)A(x) \wedge (\exists y)B(y)$$

$$A(x) \wedge (\forall x)A(x) \Rightarrow A(x) \wedge (\forall y)A(y).$$

$$\begin{aligned} (T1) \quad & (\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2) \Rightarrow (\neg \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2), \\ (T2) \quad & \neg(\mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2) \Rightarrow (\neg \mathcal{F}_1 \vee \neg \mathcal{F}_2), \\ (T3) \quad & \neg(\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2) \Rightarrow (\neg \mathcal{F}_1 \wedge \neg \mathcal{F}_2), \\ (T4) \quad & \neg \neg \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}, \\ (T5) \quad & \neg(\forall \alpha)\mathcal{F} \Rightarrow (\exists \alpha)\neg \mathcal{F}, \\ (T6) \quad & \neg(\exists \alpha)\mathcal{F} \Rightarrow (\forall \alpha)\neg \mathcal{F}. \end{aligned}$$

BEISPIEL:

$$\begin{aligned} & \neg(\forall x)(\exists y)((P(x, y) \wedge Q(y)) \supset R(y)) & T5 \\ & (\exists x)\neg(\exists y)((P(x, y) \wedge Q(y)) \supset R(y)) & T6 \\ & (\exists x)(\forall y)\neg((P(x, y) \wedge Q(y)) \supset R(y)) & T1 \\ & (\exists x)(\forall y)\neg(\neg(P(x, y) \wedge Q(y)) \vee R(y)) & T3 \\ & (\exists x)(\forall y)(\neg\neg(P(x, y) \wedge Q(y)) \wedge \neg R(y)) & T4 \\ & (\exists x)(\forall y)((P(x, y) \wedge Q(y)) \wedge \neg R(y)) & \end{aligned}$$

Definition: Eine Formel die $(Q1)$, $(Q2)$ erfüllt und irreduzibel unter $(T1)$ - $(T6)$ ist, befindet sich in *Normalform 1*.

Normalform 1:

- Implikationsfrei
- \neg nur vor Atomformeln

SCHRITT 2:

Elimination der \exists -Quantoren.

Definition:

Seien $Q_1, Q_2 \in \{\forall, \exists\}$ und F eine prädikatenlogische Formel. Wir sagen (Q_2x) ist im Bereich von (Q_1y) (in F), wenn es Teilformeln G, H von F gibt mit $G = (Q_1y)H$ und (Q_2x) kommt in H vor. Wir schreiben $(Q_1y) \sqsubset (Q_2x)$.

Bemerkung: Ist F eine Formel, die $(Q_1), (Q_2)$ erfüllt, dann ist es unmöglich, daß in F $(Q_1y) \sqsubset (Q_2x)$ und $(Q_2x) \sqsubset (Q_1y)$ gilt.

Beispiel:

$$A = (\forall y)((\exists x)P(x, y) \wedge (\forall u)(\exists v)(\neg P(u, y) \vee P(v))).$$

In A : $(\forall y) \sqsubset (\exists x), (\forall y) \sqsubset (\forall u), (\forall y) \sqsubset (\exists v)$ und $(\forall u) \sqsubset (\exists v); (\exists x) \not\sqsubset (\exists v)$.

Definition:

Sei A eine geschlossene PL-Formel in Normalform 1. Sei A^- gleich A nach Auslassung des ersten \exists -Ausdruckes (\exists) von links; gibt es keine \exists -Quantoren in A , so ist $A^- = A$.

Wir definieren nun eine Transformation

$$\alpha: \text{PL} \rightarrow \text{PL},$$

wobei wir annehmen, daß ($\exists x$) der erste \exists -Ausdruck von links in A ist.

a) A ist \exists -frei: $\alpha(A) = A$.

b) ($\exists x$) ist nicht im Bereich von (All-) Quantoren:

$$\alpha(A) = (A^-)(x/a)$$

wobei a ein Konstantensymbol ist, das nicht in A vorkommt.

c) ($\exists x$) liegt im Bereich der Allquantoren ($\forall y_1, \dots, (\forall y_k)$ (in dieser Reihenfolge von links nach rechts). Sei $f \in \text{FS}_k$ – $\text{FS}(A)$ (d.h. f kommt nicht in A vor), dann setzen wir:

$$\alpha(A) = (A^-)(x/f(y_1, \dots, y_k)).$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} A &= (\forall x)(\forall y)(\exists z)P(x, y, z) \vee (\exists u)Q(u, a) \\ \alpha(A) &= (\forall x)(\forall y)P(x, y, f(x, y)) \vee (\exists u)Q(u, a) \\ \alpha(\alpha(A)) &= (\forall x)(\forall y)P(x, y, f(x, y)) \vee Q(b, a). \end{aligned}$$

- a) Ist A geschlossen und in Normalform 1, so auch $\alpha(A)$.
- b) $\alpha(A) = A$ oder $\alpha(A)$ enthält einen \exists -Quantor weniger als A .

Sei

$$\begin{aligned}\alpha^0(A) &= A, \\ \alpha^{(n+1)}(A) &= \alpha(\alpha^{(n)}(A)).\end{aligned}$$

Definition:

Eine Formel A ist in Normalform 2, wenn sie in Normalform 1 und \exists -frei ist. Ist B eine Normalform 1 von A und ist $\alpha^{(n)}(B)$ in Normalform 2, so heißt $\alpha^{(n)}(B)$ *Skolemform* von A .

Beispiel: $(\forall x)(\forall y)P(x, y, f(x, y)) \vee Q(b, a)$ ist Skolemform von

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)P(x, y, z) \vee (\exists u)Q(u, a).$$

Transformation in Skolemform:

erhält **nicht** die logische Äquivalenz!
 nur *Erfüllungs-Äquivalenz* ist garantiert.

Satz:

Ist A eine geschlossene Formel in Normalform 1, und ist B Skolemform von A , so gilt

$$B \sim_e A.$$

SCHRITT 3:

Weglassung der Allquantoren in der Skolemform.

Rechtfertigung:

- Stellung der Quantoren unerheblich.
- Äquivalenz zu Pränexform.

beruht auf Verschiebungsregeln:

$$(\forall z)A \vee B \Rightarrow (\forall z)(A \vee B),$$

$$B \vee (\forall z)A \Rightarrow (\forall z)(B \vee A),$$

$$(\forall z)A \wedge B \Rightarrow (\forall z)(A \wedge B),$$

$$B \wedge (\forall z)A \Rightarrow (\forall z)(B \wedge A).$$

Beispiel:

$$A = (\forall x)(\forall y)(\neg P(x, f(x)) \wedge Q(x, y)) \vee (\forall u)(R(u) \wedge (\forall v)Q(v, v)).$$

Pränexform von A :

$$(\forall x)(\forall y)(\forall u)(\forall v)((\neg P(x, f(x)) \wedge Q(x, y)) \vee (R(u) \wedge Q(v, v))).$$

Quantorenfreie Form:

$$(\neg P(x, f(x)) \wedge Q(x, y)) \vee (R(u) \wedge Q(v, v)).$$

Definition:

Sei A eine Formel in Normalform 2 und A^0 sei A nach Weglassung aller Quantoren aus A . A^0 ist dann in *Negationsnormalform* (negation normal form, NNF).

A^0 ist eine offene Formel, aber als *geschlossene* zu interpretieren!

SCHRITT 4:

Transformation in konjunktive Normalform (KNF).

Notation:

$A_1 \wedge \dots \wedge A_n$ für $A_1 \wedge (A_2 \wedge \dots (A_{n-1} \wedge A_n) \dots$

$A_1 \vee \dots \vee A_n$ für $A_1 \vee (A_2 \vee \dots (A_{n-1} \vee A_n) \dots$

Definition:

Atomformeln sind *Literale* und negierte Atomformeln sind Literale. Ist A eine Atomformel, so heißt A *positives* und $\neg A$ *negatives* Literal.

Definition:

Sei $F = C_1 \wedge \dots \wedge C_n$, wobei alle C_i von der Form $(L_i^1 \vee \dots \vee L_i^{k_i})$ für Literale L_i^j sind. Wir sagen dann, F ist in konjunktiver Normalform (KNF).

Transformation in KNF:

durch die Distributivregeln:

$$(D1) \quad \mathcal{F}_1 \vee (\mathcal{F}_2 \wedge \mathcal{F}_3) \Rightarrow (\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2) \wedge (\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_3)$$

$$(D2) \quad (\mathcal{F}_2 \wedge \mathcal{F}_3) \vee \mathcal{F}_1 \Rightarrow (\mathcal{F}_2 \vee \mathcal{F}_1) \wedge (\mathcal{F}_3 \vee \mathcal{F}_1)$$

und durch entsprechende Klammerstreichungen (nach vollständiger Reduktion durch (D1) und (D2)).

Die Transformation mittels (D1), (D2) terminiert stets, denn

$$\text{KNF}(F_1 \vee (F_2 \wedge F_3)) = \text{KNF}(F_1 \vee F_2) \wedge \text{KNF}(F_1 \vee F_3)$$

Beispiel:

$$(D1) \quad \mathcal{F}_1 \vee (\mathcal{F}_2 \wedge \mathcal{F}_3) \Rightarrow (\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2) \wedge (\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_3)$$

$$(D2) \quad (\mathcal{F}_2 \wedge \mathcal{F}_3) \vee \mathcal{F}_1 \Rightarrow (\mathcal{F}_2 \vee \mathcal{F}_1) \wedge (\mathcal{F}_3 \vee \mathcal{F}_1)$$

$A = (\neg P(x, f(x)) \wedge Q(x, y)) \vee (R(u) \wedge Q(v, v))$
mit $X = \neg P(x, f(x))$, $Y = Q(x, y)$, $Z = R(u)$, $U = Q(v, v)$.

$$(X \wedge Y) \vee (Z \wedge U) \Rightarrow \text{via (D1)}$$

$$((X \wedge Y) \vee Z) \wedge ((X \wedge Y) \vee U) \Rightarrow \text{via (D2)}$$

$$((X \vee Z) \wedge (Y \vee Z)) \wedge ((X \wedge Y) \vee U) \Rightarrow \text{via (D2)}$$

$$((X \vee Z) \wedge (Y \vee Z)) \wedge ((X \vee U) \wedge (Y \vee U)) \Rightarrow$$

$$(X \vee Z) \wedge (Y \vee Z) \wedge (X \vee U) \wedge (Y \vee U) \Rightarrow$$

daher

$$\text{KNF}(A) =$$

$$(\neg P(x, f(x)) \vee R(u)) \wedge (Q(x, y) \vee R(u)) \wedge$$

$$(\neg P(x, f(x)) \vee Q(v, v)) \wedge (Q(x, y) \vee Q(v, v)).$$

Schreibe

$$F: \neg A_1 \vee \dots \neg A_n \vee B_1 \vee \dots \vee B_m$$

(für Atomformeln A_i, B_j) als *Sequente*

$$S: A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m$$

letzter Transformationsschritt:

Übersetzung der konjunktiven Normalform in eine *Menge von Klauseln*.

Definition:

Eine *Klausel* ist ein atomares Sequent. D.h. Klauseln sind Sequente der Gestalt

$$\mathcal{F} \vdash \mathcal{G}$$

wobei \mathcal{F} und \mathcal{G} (endliche) Mengen von Atomen sind.

Klausel-Semantik:

Sei $C = \mathcal{F} \vdash \mathcal{G}$ eine Klausel und $\{x_1, \dots, x_n\}$ die Menge aller Variablen welche in $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ vorkommen. \mathcal{M} heisst *Interpretation* von $\{C\}$ genau dann wenn \mathcal{M} Interpretation der Formel

$$\bar{C} = (\forall x_1) \dots (\forall x_n) (\wedge \mathcal{F} \supset \vee \mathcal{G})$$

ist. Insbesondere ist C wahr in \mathcal{M} (per definitionem) wenn \bar{C} wahr in \mathcal{M} ist.

Ist $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$ eine Menge von Klauseln dann heisst \mathcal{M} Interpretation von \mathcal{C} genau dann wenn \mathcal{M} Interpretation der Formel

$$\hat{\mathcal{C}} = \bigwedge_{i=1}^k \bar{C}_i$$

ist. Insbesondere ist \mathcal{M} genau dann ein Modell von \mathcal{C} wenn \mathcal{M} Modell von $\hat{\mathcal{C}}$ ist.

Andere Klauselbegriffe:
statt

$$P(x) \vdash Q(x, y), R(x)$$

die Notationen:

$\{\neg P(x), Q(x, y), R(x)\}$ (Mengennotation) und
 $\neg P(x) \vee Q(x, y) \vee R(x)$ (Disjunktionsnotation).