

## LK für die Prädikatenlogik

## Strukturelle Regeln:

*Sequente* sind Formen der Gestalt

$$\mathcal{F} \vdash \mathcal{G}$$

mit Mengen *prädikatenlogischer* Formeln  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$ .

*Notation:*  $\mathcal{F} \vdash \mathcal{G}$ ,  $A$  für  $\mathcal{F} \vdash \mathcal{G} \dot{\cup} A$ .

*Gültigkeit von Sequenten:*

Ein Sequent  $S : \mathcal{F} \vdash \mathcal{G}$  heißt *wahr in einer Interpretation*  $\mathcal{M}$  (von  $\wedge \mathcal{F} \supset \vee \mathcal{G}$ ) wenn

$$v_{\mathcal{M}}(\wedge \mathcal{F} \supset \vee \mathcal{G}) = \mathbf{t}.$$

$S$  heißt gültig, wenn  $S$  in allen Interpretationen (von  $S$ ) wahr ist.

Schnittregel:

$$\frac{\mathcal{F} \vdash \mathcal{G}, A \quad A, \mathcal{F} \vdash \mathcal{G}}{\mathcal{F} \vdash \mathcal{G}} S$$

Abschwächungsregeln:

$$\frac{\mathcal{F} \vdash \mathcal{G}}{A, \mathcal{F} \vdash \mathcal{G}} Al \quad \frac{\mathcal{F} \vdash \mathcal{G}}{\mathcal{F} \vdash \mathcal{G}, A} Ar$$

### Logische Regeln (Junktoren):

$$\begin{array}{c}
\frac{\mathcal{F} \vdash \mathcal{G} \cup \{A\}}{\neg A, \mathcal{F} \vdash \mathcal{G}} \neg I \qquad \frac{\{A\} \cup \mathcal{F} \vdash \mathcal{G}}{\mathcal{F} \vdash \mathcal{G}, \neg A} \neg r \\
\\
\frac{\frac{\{A, B\} \cup \mathcal{F} \vdash \mathcal{G}}{(A \wedge B), \mathcal{F} \vdash \mathcal{G}} \wedge I}{\mathcal{F} \vdash \mathcal{G} \cup \{A\} \quad \mathcal{F} \vdash \mathcal{G} \cup \{B\}} \wedge r \\
\\
\frac{\frac{\{A\} \cup \mathcal{F} \vdash \mathcal{G} \quad \{B\} \cup \mathcal{F} \vdash \mathcal{G}}{(A \vee B), \mathcal{F} \vdash \mathcal{G}} \vee I}{\mathcal{F} \vdash \mathcal{G} \cup \{A\} \quad \{B\} \cup \mathcal{F} \vdash \mathcal{G}} \vee r \\
\\
\frac{\mathcal{F} \vdash \mathcal{G} \cup \{A\} \quad \{B\} \cup \mathcal{F} \vdash \mathcal{G}}{(A \supset B), \mathcal{F} \vdash \mathcal{G}} \supset I \quad \frac{\{A\} \cup \mathcal{F} \vdash \mathcal{G} \cup \{B\}}{\mathcal{F} \vdash \mathcal{G}, (A \supset B)} \supset r
\end{array}$$

### Logische Regeln (Quantoren):

*Variablenbedingungen:*

Sei  $V_b(A)$  die Menge aller gebundenen Variablen in  $A$ .

- Sei  $S = A(x/y)$ ,  $\mathcal{F} \vdash \mathcal{G}$  oder  $S = \mathcal{F} \vdash \mathcal{G}, A(x/y)$  für eine Variable  $y$ .  $S$  erfüllt die Variablenbedingung 1 (VB1) bezüglich  $(S, A, y)$  wenn  $y$  weder in  $A$  noch in  $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$  vorkommt. Ist (VB1) erfüllt, so nennt man  $y$  eine *Eigenvariable*.
- Sei  $S = A(x/t)$ ,  $\mathcal{F} \vdash \mathcal{G}$  oder  $S = \mathcal{F} \vdash \mathcal{G}, A(x/t)$  für einen Term  $t$ .  $S$  erfüllt die Variablenbedingung 2 (VB2) bezüglich  $(A, t)$  wenn  $V(t) \cap V_b(A) = \emptyset$  (d.h.  $t$  enthält *keine* Variable die in  $A$  gebunden vorkommt).

## Quantoreneinführungsregeln des LK:

Sei  $S = A(x/t), \mathcal{F} \vdash \mathcal{G}$  oder  $S = \mathcal{F} \vdash \mathcal{G}, A(x/t)$  sodaß  $S$  (VB2) bezüglich  $(A, t)$  erfüllt. Dann sind die folgenden Quantoreneinführungsregeln  $\forall I$  und  $\exists r$  zulässig:

$$\frac{A(x/t), (\forall x)A, \mathcal{F} \vdash \mathcal{G}}{(\forall x)A, \mathcal{F} \vdash \mathcal{G}} \forall I, \quad (\text{VB2})$$

$$\frac{\mathcal{F} \vdash \mathcal{G}, (\exists x)A, A(x/t)}{\mathcal{F} \vdash \mathcal{G}, (\exists x)A} \exists r, \quad (\text{VB2})$$

Sei  $S = \mathcal{F} \vdash \mathcal{G}, A(x/y)$  oder  $S = A(x/y), \mathcal{F} \vdash \mathcal{G}$  sodaß  $S$  (VB1) bezüglich  $(S, A, y)$  erfüllt.

Dann sind die folgenden Quantoreneinführungsregeln  $\exists I$  und  $\forall r$  zulässig:

$$\frac{A(x/y), \mathcal{F} \vdash \mathcal{G}}{\{(\exists x)A\} \cup \mathcal{F} \vdash \mathcal{G}} \exists I, \quad (\text{VB1})$$

$$\frac{\mathcal{F} \vdash \mathcal{G}, A(x/y)}{\mathcal{F} \vdash \mathcal{G} \cup \{(\forall x)A\}} \forall r, \quad (\text{VB1})$$

## Anfangssequente, Endsequente:

Sei  $\psi$  eine LK-Ableitung. Sequente in  $\psi$  welche nicht Konklusionen von Schlüssen sind heissen *Anfangssequente* von  $\psi$ . Das (einzige) Sequent von  $\psi$  welches nicht die Prämisse eines Schlusses ist heisst *Endsequent* von  $\psi$ . Anfangssequente der Form

$$A, \mathcal{F} \vdash \mathcal{G}, A$$

, wobei  $A$  eine Formel und  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  Mengen von Formeln sind, heissen *Axiome*.

## beweisbare Sequente und Formeln:

Ein Sequent  $S$  heißt *beweisbar* in LK, wenn es eine LK -Ableitung von  $S$  gibt deren Anfangssequente Axiome sind. Eine Formel  $F$  heißt beweisbar in LK, wenn das Sequent  $\vdash F$  beweisbar ist. Der entsprechende Beweis von  $\vdash F$  heißt dann Beweis von  $F$ .

## Die Schnittregel:

$$\frac{\mathcal{F} \vdash \mathcal{G}, A \quad A, \mathcal{F} \vdash \mathcal{G}}{\mathcal{F} \vdash \mathcal{G}} S$$

Zur Verwendung von Lemmata in Beweisen.

Zu beweisen ist die Formel

$$(\forall x)(A \vee B) \supset (\neg B \supset (\forall x)A)$$

(für  $x$  nicht in  $B$ ) unter Verwendung eines Beweises  $\psi$  von  $(\forall x)(A \vee B) \supset (\forall x)A \vee B$ .  
Wir nehmen das vorletzte Sequent

$$(\forall x)(A \vee B) \vdash (\forall x)A \vee B$$

in  $\psi$  und dessen Beweis  $\psi'$ . Weiters kombinieren wir  $\psi'$  mit einem Beweis  $\omega$  des Sequentes

$$(\forall x)A \vee B \vdash \neg B \supset (\forall x)A$$

auf folgende Weise:

7

$$\frac{\frac{\psi'}{(\forall x)(A \vee B) \vdash \neg B \supset (\forall x)A \vee B} \quad \frac{Ar}{(\forall x)A \vee B, (\forall x)A \vee B \vdash \neg B \supset (\forall x)A}}{\frac{(\forall x)(A \vee B) \vdash \neg B \supset (\forall x)A \vee B \quad (\forall x)A \vee B, (\forall x)A \vee B \vdash \neg B \supset (\forall x)A}{\vdash (\forall x)(A \vee B) \supset (\neg B \supset (\forall x)A)} \supset r} \omega$$

Es genügt nun  $\omega$  anzugeben.  $\omega$  ist eine Instanz des Beweisschemas:

$$\frac{\frac{\mathcal{B} \vdash \{A, \mathcal{B}\}}{\{\neg \mathcal{B}, A\} \vdash A} \quad \frac{\mathcal{B}, \neg \mathcal{B} \vdash A}{\neg \mathcal{B}, A \vee \mathcal{B} \vdash A} \neg l \quad \vee l}{A \vee \mathcal{B} \vdash \neg \mathcal{B} \supset A} \supset r$$

8