

## Unifikation

**Definition:** Eine *Substitution*  $\sigma$  ist eine Abbildung  $V \rightarrow T$  mit  $\sigma(v) \neq v$  nur für endlich viele Variablen  $v \in V$ . Notation für  $\sigma(x_1) = t_1, \dots, \sigma(x_i) = t_i$  für  $x_i \neq t_i$  und  $\sigma(v) = v$  für  $v \notin \{x_1, \dots, x_n\}$ :

$$\sigma = \{x_1 \leftarrow t_1, \dots, x_n \leftarrow t_n\}.$$

Homomorphe Erweiterung:

- $\sigma(c) = c$  für Konstantensymbole  $c$ ,
- $\sigma(f(t_1, \dots, t_m)) = f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_m))$  für Terme  $f(t_1, \dots, t_m)$ ,
- $\sigma(P(t_1, \dots, t_k)) = P(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_k))$  für Atome  $P(t_1, \dots, t_k)$ .

Erweiterung auf Mengen und Sequente:

$$\sigma(\{X_1, \dots, X_m\}) = \{\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_m)\},$$

$$\sigma(\mathcal{F} \vdash \mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{F}) \vdash \sigma(\mathcal{G}).$$

**Zusammensetzung** von Substitutionen:

$$\tau \circ \sigma(v) = \tau(\sigma(v))$$

für alle Variablen  $v$ .

**Allgemeinheit:**

Seien  $A_1$  und  $A_2$  zwei Atome.  $A_1$  heisst *allgemeiner* als  $A_2$  wenn ein  $\sigma$  existiert mit

$$\sigma(A_1) = A_2.$$

Schreibweise:  $A_1 \leq_s A_2$ .

$\sigma$  heisst *allgemeiner* als  $\tau$  ( $\sigma \leq_s \tau$ ) wenn ein  $\theta$  existiert mit

$$\theta \circ \sigma = \tau.$$

### Beispiel:

$$A_1 = P(x, f(y), f(y)) \text{ und} \\ A_2 = P(x', y', f(x')).$$

und  $t$  ein Term, welcher von  $x$  und  $x'$  verschieden ist. Dann gilt für

$$\begin{aligned} \sigma_t = \{x \leftarrow t, y \leftarrow t, x' \leftarrow t, y' \leftarrow f(t)\}. \\ \sigma_t(P(x, f(y), f(y))) = \sigma_t(P(x', y', f(x'))) \\ = P(t, f(t), f(t)). \end{aligned}$$

Gilt ebenso für

$$\sigma = \{y \leftarrow x, x' \leftarrow x, y' \leftarrow f(x)\}.$$

Offensichtlich gilt

$$\sigma \leq_s \sigma_t$$

wegen  $\{x \leftarrow t\} \circ \sigma = \sigma_t$ .

### Definition (Unifikator):

Sei  $\mathcal{A}$  eine nicht-leere Menge von Atomen oder von Termen.

$\sigma$  heisst *Unifikator* von  $\mathcal{A}$  wenn für alle  $A, A' \in \mathcal{A}$  gilt:

$$\sigma(A) = \sigma(A').$$

$\sigma$  heisst *allgemeinster Unifikator* (A.U.) (Englisch: m.g.u., *most general unifier*) von  $\mathcal{A}$  wenn für jeden Unifikator  $\theta$  von  $\mathcal{A}$  gilt

$$\sigma \leq_s \theta.$$

### Bemerkung:

Ist  $\mathcal{A} = \{A\}$  dann ist *jede* Substitution Unifikator von  $\mathcal{A}$  und die identische Substitution  $\epsilon = \{\}$  ist der A.U. von  $\mathcal{A}$ .  $\diamond$

1. Gibt es immer einen A.U. einer unifizierbaren Menge?
2. Sind A.U.s algorithmisch berechenbar?

Antwort: **JA**.

Unifikation von Atomen kann auf Unifikation von Termen reduziert werden:  
Prädikatsensymbole  $\Rightarrow$  neue Funktionssymbole.

### Beispiel:

reduziere Problem

$$\{P(x, x), P(x, y), P(y, f(z))\}$$

auf

$$\{g(x, x), g(x, y), g(y, f(z))\}.$$

### Unifikationsalgorithmus:

Regel-basierte Methode zur Lösung von Termgleichungssystemen.

### Beispiel:

$$A_1 = P(g(x), f(x, z)) \text{ und} \\ A_2 = P(g(g(u)), v).$$

Reduziere auf Gleichungssystem:

$$\mathcal{E}_1 = \{g(x) \doteq g(g(u)), v \doteq f(x, z)\}$$

Suche *Lösung*  $\theta$  mit

$$g(x)\theta = g(g(u))\theta, v\theta = f(x, z)\theta,$$

sodass für alle anderen Lösungen  $\eta$  gilt

$$\theta \leq_s \eta.$$

$$\mathcal{E}_1 = \{g(x) \doteq g(g(u)), v \doteq f(x, z)\}$$

ist *äquivalent* zu

$$\mathcal{E}_2 = \{x \doteq g(u), v \doteq f(x, z)\}.$$

$\mathcal{E}_2$  kann als *Substitution*

$$\theta = \{x \leftarrow g(u), v \leftarrow f(x, z)\}$$

interpretiert werden;  
aber  $\theta$  ist keine Lösung!

$$\mathcal{E}_1 = \{g(x) \doteq g(g(u)), v \doteq f(x, z)\}$$

$$\mathcal{E}_2 = \{x \doteq g(u), v \doteq f(x, z)\}.$$

weitere Transformation:

wende  $x \doteq g(u)$  als *Substitution* auf

$$\mathcal{E}_2 - \{x \doteq g(u)\}$$

an.

Ergebnis: das äquivalente System

$$\mathcal{E}_3 = \{x \doteq g(u), v \doteq f(g(u), z)\}.$$

$\mathcal{E}_3$  ist in *gelöster Form*.

In der Tat ist

$$\sigma = \{x \leftarrow g(u), v \leftarrow f(g(u), z)\}$$

*allgemeinste Lösung* von  $\mathcal{E}_3$  und damit von  $\mathcal{E}_1$  ist. Klarerweise ist  $\sigma$  auch A.U. von  $\{A_1, A_2\}$ .

**Bemerkung:** A.U.s sind im allgemeinen *nicht* eindeutig.  $\{x \leftarrow y\}$  und  $\{y \leftarrow x\}$  sind beide Unifikatoren von

$$\{f(x), f(y)\}.$$

AUs sind aber *eindeutig modulo Umbenennung* von Variablen.  $\diamond$

- **Ziel:**

Suche allgemeinste Lösung eines Termgleichungssystems.

- **Weg:**

Transformation in äquivalente gelöste Form.

**nötig sind noch:**

- Kriterien für Unlösbarkeit
- Termination

**Definition:**

Ein *System von Termgleichungen* ist eine endliche Menge der Form

$$\mathcal{E} = \{s_1 \doteq t_1, \dots, s_n \doteq t_n\}$$

wobei  $s_i, t_i$  (für  $i = 1, \dots, n$ ) Terme sind. Eine Substitution  $\theta$  heisst *Lösung* von  $\mathcal{E}$ , wenn für alle  $i = 1, \dots, n$  gilt

$$s_i\theta = t_i\theta.$$

Eine Lösung  $\sigma$  heisst *allgemeinste Lösung* von  $\mathcal{E}$ , wenn für alle Lösungen  $\theta$  von  $\mathcal{E}$   $\sigma \leq_s \theta$  gilt.

## Äquivalenz:

Zwei Systeme  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{E}'$  heißen *äquivalent*, wenn sie die selbe Menge von Lösungen besitzen.

**gelöste Form:** Sei

$$\mathcal{E} = \{s_1 \doteq t_1, \dots, s_n \doteq t_n\}.$$

$\mathcal{E}$  ist in *gelöster Form* wenn

- $\{s_1, \dots, s_n\} \subseteq V$  und
- jedes  $s_i$  kommt nur einmal in  $\mathcal{E}$  vor (für  $i = 1, \dots, n$ ).  $\diamond$

## Regeln:

- Eliminiere Redundanz
- Orientiere Gleichungen

**(trivial)** Wenn  $s \doteq s$  in  $\mathcal{E}$  dann

$$\mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{E} - \{s \doteq s\}.$$

**(Orientiere)** Wenn  $\mathcal{E}$  eine Gleichung der

Form  $t \doteq v$  enthält, wobei  $v$  eine Variable ist nicht aber  $t$ , dann

$$\mathcal{E} \Rightarrow (\mathcal{E} - \{t \doteq v\}) \cup \{v \doteq t\}.$$

## Unlösbarkeit:

reduziere Probleme auf  $\perp$ .

### Definition (U-Regeln):

Sei  $\mathcal{E}$  ein System von Termgleichungen und  $s \doteq t$  eine Gleichung in  $\mathcal{E}$ .

**(symbol clash)** Wenn  $s$  und  $t$  Funktionsterme mit verschiedenen führenden Funktionssymbolen sind dann

$$\mathcal{E} \Rightarrow \perp.$$

**(occurs check)** Ist  $s$  eine Variable mit  $s \neq t$  und kommt  $s$  in  $t$  vor, dann

$$\mathcal{E} \Rightarrow \perp.$$

◇

## Beispiel:

Sei

$$\mathcal{E} = \{x \doteq y, x \doteq g(y)\}.$$

$\mathcal{E}$  ist unlösbar: In der Tat existiert **keine** Substitution  $\theta$  mit

$$\theta(x) = \theta(y) \text{ und } \theta(x) = \theta(g(y)).$$

denn sonst wäre

$$\theta(y) = \theta(g(y)) = g(\theta(y)).$$

(symbol clash) und (occurs check) beide nicht anwendbar.

Wenden wir aber  $x \doteq y$  als Substitution  $\{x \leftarrow y\}$  auf die andere Gleichung an so erhalten wir das äquivalente System

$$\mathcal{E}' = \{x \doteq y, y \doteq g(y)\}.$$

Dieses kann mittels (occurs check) zu  $\perp$  reduziert werden. ◇

## Dekomposition und Ersetzung:

**(Dekomposition)** Sei  $s \doteq t$  eine Gleichung in  $\mathcal{E}$ , sodass ein Funktionssymbol  $f \in \text{FS}_n$  und Terme  $s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_n$  existieren mit

$$\begin{aligned} s &= f(s_1, \dots, s_n), \\ t &= f(t_1, \dots, t_n). \end{aligned}$$

Dann

$$\mathcal{E} \Rightarrow (\mathcal{E} - \{s \doteq t\}) \cup \{s_1 \doteq t_1, \dots, s_n \doteq t_n\}.$$

**(Ersetzung)** Sei  $s \doteq t$  eine Gleichung in

$\mathcal{E}$  mit den Eigenschaften

- (1)  $s$  ist eine Variable und
- (2)  $s$  kommt nicht in  $t$  vor und
- (3)  $s$  kommt in  $\mathcal{E} - \{s \doteq t\}$  vor.

Dann

$$\mathcal{E} \Rightarrow \{s \leftarrow t\}(\mathcal{E} - \{s \doteq t\}) \cup \{s \doteq t\}.$$

## Definition:

Sei  $\mathcal{R}$  die Menge der Regeln

- (trivial),
- (orient),
- (symbol clash),
- (occurs check),
- (decomposition),
- (replacement).

Wenn  $\mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{E}'$  mittels  $\mathcal{R}$  dann

$$\mathcal{E} \succ \mathcal{E}'.$$

reflexive und transitive Hülle von  $\succ$  ist  $\succ^*$ .

$\mathcal{E}$  heisst *irreduzibel*, wenn *keine* Regel in  $\mathcal{R}$  auf  $\mathcal{E}$  anwendbar ist.

$\perp$  ist irreduzibel per Definition.



### Unifikation:

- Transformation eines Systems in irreduzible Form,
- beliebige Reihenfolge der Regelanwendung.

### Beispiel:

$$\mathcal{E} = \{g(x) \doteq g(g(u)), v \doteq f(x, z)\}.$$

Dann gilt  $\mathcal{E} \succ \mathcal{E}'$  (mittels (Dekomposition)) mit

$$\mathcal{E}' = \{x \doteq g(u), v \doteq f(x, z)\}.$$

Nun ist (Ersetzung) anwendbar und

$$\mathcal{E}' \succ \mathcal{E}'',$$

wobei

$$\mathcal{E}'' = \{x \doteq g(u), v \doteq f(g(u), z)\}.$$

$\mathcal{E}''$  ist irreduzibel und in gelöster Form.  $\diamond$

- Jedes System in gelöster Form ist irreduzibel.
- Jedes irreduzible System ist in gelöster Form oder  $\perp$ .

## Unifikationstheorem:

- $\mathcal{R}$  ist ein Unifikationssystem, das heisst
- $\mathcal{R}$  terminiert immer.
  - Wenn  $\mathcal{E}$  lösbar ist dann existiert ein System  $\mathcal{E}'$  mit

$$\mathcal{E} \succ^* \mathcal{E}',$$

mit

- $\mathcal{E}'$  in gelöster Form,
- $\mathcal{E}'$  liefert allgemeinste Lösung von  $\mathcal{E}$ .