

Computernumerik VO

Prüfungsfragen plus Ausarbeitung

WS 2003/04

Zitat Prof. Weinmüller: „Das ändert das ganze nicht, aber sehr wohl!“

1. Definieren Sie die Norm in einem linearen Vektorraum.

Es sei V ein linearer Vektorraum über \mathbb{R} .

Eine Abbildung $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ heißt eine Norm, falls sie die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- $\|x\| \geq 0, \forall x \in V; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall x \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in V$

2. Wozu dient die Norm, warum brauchen wir sie?

Die Norm bietet die Möglichkeit, die Genauigkeit von Daten und ihren numerischen Ergebnissen zu messen, um die dabei auftretenden Fehler zu erkennen.

{

Zur Messung von Längen von Matrizen und Vektoren

(Das zentrale Anliegen bei der Ermittlung der numerischen Näherung ist dabei auftretende Fehler zu schätzen und durch entsprechende Maßnahmen so weit zu verringern, dass die Toleranzforderung erfüllt wird. Wir benötigen deshalb eine Möglichkeit, die Genauigkeit von Daten des Problems und der numerischen Ergebnisse zu messen. Die übliche Definition der absoluten und relativen Genauigkeit greift zu kurz, wenn man bedenkt, dass es sich um Fehler von Vektoren, Matrizen und Funktionen handeln kann. Die richtige Größe, mit der sich der Begriff der Genauigkeit geeignet erweitern lässt, ist die Norm.)

}

3. Wie werden die Abstände (Fehler) in einer Norm gemessen?

Absolute Fehler: $\|\bar{x} - x\|$ absoluter Fehler := Näherungswert – exakter Wert

Relative Fehler: $\frac{\|\bar{x} - x\|}{\|x\|}$ absoluter Fehler/ exakter Wert, (exakter Wert $\neq 0$)

4. Deuten Sie die Dreiecksungleichung im \mathbb{R}^2 bezüglich der euklidischen Norm an.

x, y Vektoren: $|x + y| < |x| + |y|$

Länge von $x + y$ ist immer kleiner als Länge von x + die Länge von y \rightarrow Dreiecksungleichung

5. Welche drei Vektornormen kennen Sie?

Betragssummennorm (1er Norm): $\|x\|_1 := \sum_{k=1}^n |x_k|$

Euklidische Norm (2er Norm): $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$

Maximumnorm: $\|x\|_\infty := \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$

6. Ergänzen Sie die Ungleichung $\|A_x\|_2 \leq \dots$ und beschreiben Sie alle Größen auf der rechten Seite.

$$\|A_x\|_2 \leq \|A\|_2 \cdot \|x\|_2$$

A ... lineare Abbildung $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

7. Definieren Sie Vorwärts- und Rückwärtsfehler.

Der absolute Fehler wird auch Vorwärtsfehler genannt (der Fehler in der Lösung).

Vorwärtsfehler: VF: $\|\hat{x} - x\|$

Ist x eine Lösung eines mathematischen Problems zu Daten d , $x = F(d)$, und \hat{x} eine Näherung für x , so bezeichnet man als Rückwärtsfehler eine Datenstörung $\Delta_a(d)$ die so beschaffen ist, dass \hat{x} die (exakte) Lösung des gestörten Problems ist. Das heißt:

$$x = F(d) \quad \text{und} \quad \Delta_a(d) \quad \text{so dass} \quad \hat{x} = F(d + \Delta_a(d))$$

\hat{x} wird interpretiert als exaktes Ergebnis zu den verfälschten Daten $d + \Delta_a(d)$.

Rückwärtsfehler: RF: $\Delta_a(d), \|\Delta_a(d)\|$

8. Womit beschäftigt sich die Kondition eines mathematischen Problems?

Die Kondition beschreibt die "Empfindlichkeit" eines mathematischen Problems. Das heißt, sie gibt an, wie sehr sich die Lösung verändert, wenn sich die zugrundeliegenden Daten ändern. Aus diesem Ansatz heraus lässt sich mittels der Kondition bestimmen, wie stark sich Datenfehler auf das Ergebnis auswirken.

Angegeben wird die Kondition durch die Konditionszahl.

Die absolute Konditionszahl ist die Konditionsabschätzung bezüglich absoluter Datenänderungen:

$$\|\bar{x} - x\| \leq k \cdot \|\bar{D} - D\|$$

x ungestörte Lösung

\bar{x} gestörte Lösung

D ungestörte Daten

\bar{D} gestörte Daten

Die relative Konditionszahl ist die Konditionsabschätzung bezüglich relativer Datenänderungen:

$$\frac{\|\bar{x} - x\|}{\|x\|} \leq k \cdot \frac{\|\bar{D} - D\|}{\|D\|}$$

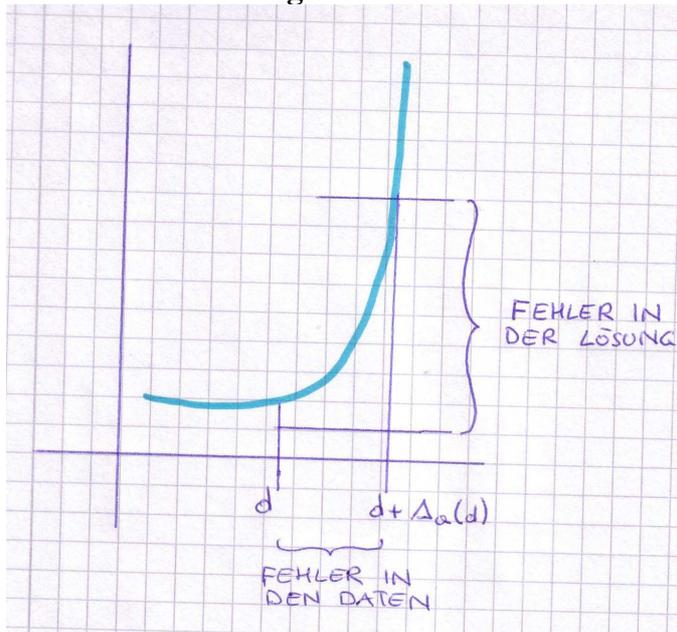
9. Wann ist ein Problem gut/schlecht konditioniert?

Ist die Konditionszahl für ein mathematisches Problem sehr groß (viel größer als 1), so wirken sich bereits kleine Datenänderungen stark auf das Ergebnis aus - man spricht von einer schlechten Konditionierung. Anders gesagt, der Fehler in der Lösung ist größer als der Fehler in den Daten. Umgekehrt gilt ein Problem mit einer kleinen Konditionszahl als gut konditioniert.

10. Wie lautet die Konditionszahl bei der Funktionsauswertung einer Veränderlichen?

$$K_{y \leftarrow x} = \left| \frac{d \cdot f'(d)}{f(d)} \right| \approx \left| \frac{d \cdot f'(d)}{f(d)} \right| \quad \text{bzw. (einfacher ausgedrückt)} \quad K_{y \leftarrow x} = \left| \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} \right|$$

11. Interpretieren Sie graphisch eine schlechte Konditionsauswertung bei der Funktionsauswertung einer Veränderlichen.



12. Welche der vier Rechenoperationen ist schlecht konditioniert?

Die Subtraktion annähernd gleich großer Zahlen ist schlecht konditioniert.
Begründung: nächste Frage

$$\text{Kondition der Subtraktion: } K(a-b) \leftarrow a = \left| \frac{a}{a-b} \right|$$

13. Angabe relativer Konditionszahlen und Begründung?

Eine relative Änderung einer der beiden Subtrahenden in der Größenordnung 10^{-5} kann zu einer 100%igen Änderung der Lösung führen - die Konditionszahl beträgt dann hier 10^5 .

Beispiel: $1,23457 - 1,23456 = 1,0 \cdot 10^{-5}$

Bei einer Änderung der zweiten Zahl auf 1,23455 kommt als Ergebnis $2,0 \cdot 10^{-5}$ heraus.

14. Geben Sie die Arten der Verfahrensfehler mit Beispiel an.

-) Bei exakten Algorithmen treten keine Verfahrensfehler auf.

-) Iterationsverfahren ergeben eine Folge von Näherungslösungen, die gegen die gesuchte Lösung konvergieren. Der Verfahrensfehler entsteht hier durch Abbruch der Iteration. Bei der Nullstellensuche bei nichtlinearen Gleichungen kann man das Newton-Verfahren anwenden, um den Verfahrensfehler zu minimieren.

-) Diskretisierungsverfahren machen aus einem unendlich-dimensionalen ein endlich-dimensionales Problem.

Es können auch Kombinationen der zwei Verfahrensfehler auftreten.

15. Was sind die Unterschiede zwischen a priori und a posteriori Fehlerschranken?

Bei Näherungsverfahren kann aufgrund der Kenntnis des konkreten Problems im Vorhinein (a priori) eine Abschätzung des möglichen auftretenden Fehlers gemacht werden bzw. können Fehlerschranken hergeleitet werden. Es wird im Vorhinein festgelegt, in welcher Fehlertoleranz man Fehler akzeptieren möchte. Das Problem dabei ist aber, dass zur Schätzung des Verfahrensfehlers explizite Kenntnis der problematischen Größen vorausgesetzt wird, was aber nicht möglich ist. A Priori Schranken werden daher nicht für quantitative Fehlerschätzungen eingesetzt, sondern mehr zur qualitativen Beurteilung numerischer Näherungsverfahren.

Auf Grund der Erkenntnis, die man während des Rechenverlaufs gewinnt, kann im Nachhinein (a posteriori) eine Abschätzung des tatsächlich aufgetretenen Verfahrensfehlers erfolgen. Dadurch ist es möglich, die Einhaltung der vorgegebenen Toleranz zu überprüfen. Es erfolgt im Nachhinein eine Bewertung eines bereits vorliegenden Resultats im Hinblick auf die vorgegebene Toleranz.

16. Ergänzen Sie für eine zweimal differenzierte stetige Funktion

$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| \leq \dots$, wobei $x \in [a, b]$ und $f \in^2 [a, b]$, und beschreiben Sie die rechte Seite.

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| \leq h \cdot \frac{M_2}{2}, \quad \text{wobei } M_2 \geq |f''_{(x, x+h)}| \quad h \text{ ist die Intervallgröße}$$

17. Geben Sie die Definition des Verfahrensfehlers für $h \rightarrow 0$ an. (Ordnung von p?)

$$\|x^{\circ} - x\| \leq C \cdot h^p \quad h \rightarrow 0 \dots \text{unendlich feine Diskretisierung}$$

C... Konstante

- p=1 ...linear
- p=2 ...quadratisch
- p=3 ...kubisch
- .
- .
- .

18. Was ist der wesentliche Unterschied zwischen Festpunkt- und Gleitkommazahlen?

Bei einem Integer- oder Festpunktsystem ist, wie der Name schon sagt, das Komma immer an einer festen Stelle und es gibt damit eine feste Anzahl von Vorkomma- und Nachkommastellen. Nimmt man an, das dies zum Beispiel nach zwei Zahlen von rechts ist, können nur Zahlen von -99999,99 bis +99999,99 dargestellt werden. Es gibt einen kleinsten Abstand zwischen den Zahlen, der wäre in unserem Beispiel 0,01. Daher sind die absoluten Abstände immer konstant, die relativen liegen im Intervall $[10^{-7}, 1]$ - derselbe Bereich, in dem auch der relative Fehler liegt. Ein Festpunktsystem liefert sehr ungenaue Ergebnisse für kleine Zahlen und eher exaktere Ergebnisse für größere Zahlen (um 0 herum befinden sich zuwenig Zahlen, weiter außen zuviel). Es besitzt aber mindere Qualität und wird daher wissenschaftlich nicht verwendet.

Bei der Gleitkommadarstellung ist das Komma nicht fix. Es können daher unendliche viele Zahlen dargestellt werden (theoretisch, ist aber im Computer durch den Speicherplatz begrenzt) und es gibt keinen kleinsten Abstand zwischen den Zahlen, da immer wieder noch kleiner gemacht werden kann. Der relative Fehler bei Gleitkommazahlen beträgt immer $3 \cdot 10^{-10}$, egal wo diese Zahlen liegen.

19. Wie ist die Zahl in Gleitkommadarstellung dargestellt? Beschreiben Sie alle auftretenden Größen.

$$x = \pm m \cdot b^e$$

m Mantisse (Festpunkt-Zahl mit p vorgegebenen Stellen)

b Basis, fest vorgegeben (bei Binärzahlen: $b=2$; bei Dezimalzahlen: $b=10$)

e Exponent (ganze Zahl mit $e_{\min} \leq e \leq e_{\max}$)

20. Was sind normalisierte Gleitkommazahlen?

Bei normalisierten Gleitkommazahlen darf die erste Stelle der Mantisse nie 0 sein. Diese Normalisierung bewirkt eine größere relative Genauigkeit, da die führenden Nullen keine zusätzliche Information bringen würden.

Ausnahme: Der Bereich um Null, dort wo $e = e_{\min}$. Hier lassen manche Zahlensysteme auch denormalisierte Zahlen zu.

21. Durch welche Schranke sind im normalisierten Zahlenbereich eines Gleitkommasystems die relativen elementaren Rundungsfehler beschränkt?

Im Computer müssen Zahlen gerundet werden, da sie wegen dem Speicherplatz begrenzt werden müssen - dabei treten natürlich Rundungsfehler auf. Bei normalisierten Gleitkommazahlen lassen sich diese aber durch zwei Schranken eingrenzen:

$$\left| \frac{\bar{z} - z}{z} \right| \leq \begin{cases} b^{1-p} & \text{wenn Abschneiden verwendet wird} \\ \frac{1}{2}b^{1-p} & \text{wenn Runden verwendet wird} \end{cases}$$

Die Schranken hängen von e nicht ab, sie gelten daher für den gesamten Zahlenbereich, nicht nur für einen bestimmten Exponenten.

22. Welche Rechengesetze gelten nicht im Bereich der Maschinenzahlen (IF)?

Das **Assoziativgesetz** (bei Addition und Multiplikation) und das **Distributivgesetz** gehen im Bereich der Maschinenzahlen verloren. Grund dafür ist, dass bei einer Rechnung $a + b$ die dem Ergebnis nächstgelegene Maschinenzahl als Ergebnis geliefert wird und nicht die exakte Gleitkommazahl. Man muss daher damit rechnen, dass folgende Gleichung gilt:

$$((a + b) - a) \neq b$$

23. Erklären Sie das Phänomen der Auslöschung.

Von Auslöschung spricht man, wenn zwei annähernd gleiche Zahlen voneinander abgezogen werden, so dass sie einander fast zu 0 "auslöschen". Sie ist mit Abstand die häufigste Ursache für die Instabilität arithmetischer Algorithmen.

24. Warum führt Auslöschung zu großen Fehlern im Ergebnis?

Bei der Subtraktion selber entsteht normalerweise kein Rechenfehler, diese Operation läuft im Regelfall exakt ab, das Problem liegt woanders. Vorher gemachte Fehler "rutschen nämlich nach vorne" und werden plötzlich signifikant.

25. Wann nennt man einen Algorithmus instabil?

Ein Algorithmus ist stabil, wenn die einzelnen Restprobleme nicht schlechter konditioniert sind, als das gegebene Problem selbst.

{

Bei Gleitpunktarithmetik treten im Allgemeinen Rundungsfehler auf, die sich fortpflanzen und bei weiteren Operationen ebenfalls verfälschte Argumente entstehen lassen. Einen Algorithmus mit geringer Fehlerfortpflanzung nennt man numerisch stabil, andernfalls spricht man von numerischer Instabilität. Allerdings muss man zusätzlich die Kondition auch berücksichtigen: Von numerischer Instabilität wird man nur wirklich dann sprechen, wenn die interne Fehlerfortpflanzung signifikant stärker ist als man es von der Konditionszahl erwarten würde.

}

26. Was ist ein Restproblem?

Unter einem Restproblem versteht man jedes derjenigen Probleme, bei denen die jeweiligen Zwischenergebnisse, als Daten interpretiert, zum Endergebnis führen.

27. Was sind die vier Fehlerarten der Numerik und wie kann man sie verkleinern?

1) Modellfehler

Bei Modellbildungsprozessen wird die Wirklichkeit nur vereinfacht abgebildet; es werden bekannte und unbekannte Einflussgrößen vernachlässigt. Modellfehler sind dann die Abweichung eines Modells vom Original. Sie sind schwer abzuschätzen, außer man interpretiert sie als Datenfehler. Verkleinern kann man sie durch genauere Modelle.

2) Datenfehler

Sie beschreiben Fehler in den Daten, also Abweichungen der Zahlenwerte von den wahren Werten. Entstehen können sie zum Beispiel durch Messungenauigkeiten, verkleinern lassen sie sich daher durch bessere Messungen oder bessere Auswertungen.

Die beiden oberen Fehler lassen sich nicht komplett verhindern, eben nur verkleinern, mit einem gewissen Grad von beidem muss man leben.

3) Verfahrensfehler

Bei numerischen Näherungsverfahren sind Vereinfachungen erforderlich, Verfahrensfehler sind alle bei der Konstruktion eines numerischen Verfahrens gemachten Vereinfachungen. Mit entsprechendem Aufwand lassen sie sich beliebig klein machen.

4) Rechenfehler

Da im Computer nur endlich viele Zahlen zur Verfügung stehen, können Rechenoperationen im Allgemeinen nicht exakt ausgeführt werden, sondern es wird gerundet. Der Rechenfehler ist dann der Unterschied zwischen dem gerundeten Resultat und der exakten Lösung. Wenn ein Algorithmus stabil ist, verhalten sie sich wie $K \cdot (\text{Anzahl Operationen}) \cdot \epsilon$. In groben Zügen lassen sie sich durch eine Schranke verkleinern.

Die beiden letzten Fehlerarten kann man durch Toleranzgrenzen in den Griff bekommen.

28. Worin besteht das Prinzip der experimentellen Konditionsuntersuchung?

Man möchte gern die Kondition eines Problems untersuchen, doch der Umfang ist zu groß, um dies händisch zu machen. Man benötigt daher ein Experiment, um die Kondition zu untersuchen - dieses funktioniert in folgenden Schritten:

1. Wähle ein konvergentes Verfahren und einen stabilen Algorithmus (dadurch lassen sich Verfahrensfehler und Rechenfehler ausschließen)

2. Wähle einen Satz der Problemdaten und erkläre sie als exakt

3. Störe die exakten Daten (statistisch) auf dem relativen Niveau 10^{-5} .

Man macht das mittels der Formel $f(x) = f(x) \cdot (1 + \varepsilon \cdot 10^{-5})$, wobei ε eine Zufallszahl aus dem Intervall $[-1,1]$ ist.

4. Vergleiche exakte und gestörte Lösung. Je nachdem, wie der Unterschied zwischen den beiden ist, ergibt sich eine gute oder schlechte Kondition.

29. Geben Sie die relative Konditionsabschätzung für die Datenfehler in b an. Beschreiben Sie alle in dieser Abschätzung auftretenden Größen.

(stammt aus dem Kapitel lineare Gleichungssysteme, denn ein solches lässt sich in Matrixschreibweise als $Ax = b$ anschreiben)

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq K \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}, \quad \text{wobei } K = \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \quad x \dots \text{Lösung, } b \dots \text{Daten,}$$

$$\Delta x \text{ entspricht } \cancel{x} \text{, } \Delta b \text{ entspricht } \cancel{b} - D$$

Auf der linken Seite der Ungleichung steht der relative Fehler in b. Rechts vom Ungleichheitszeichen steht K, die relative Konditionszahl, und b kommt aus dem linearen Gleichungssystem. Relative Fehler in b verstärken sich durch die Zahl K - das A in der Gleichung entspricht der Matrix des linearen Gleichungssystems.

30. Wann nennt man ein lineares Gleichungssystem schlecht konditioniert?

Die Konditionszahl eines linearen Gleichungssystem lautet $\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$. Sie ist aber nur in einem theoretischen Sinn zu verstehen, da es aufwändiger ist, A^{-1} zu suchen, als direkt das Ergebnis des Gleichungssystems zu berechnen. Es gibt aber Methoden, um A^{-1} zu schätzen, und diese kommen dann hier zur Anwendung.

Ist die obige Konditionszahl sehr groß (wenn $\kappa(A) \cdot \text{eps}$ sehr viel größer als 1 ist), spricht man von einer schlechten Konditionierung des Gleichungssystems.

31. Auf welche Eigenschaft der Matrix A ist schlechte Kondition eines Gleichungssystems zurückzuführen?

Schlechte Konditionierung tritt dann auf, wenn die Matrix A fast singulär ist (Einschub: Eine $(n \times n)$ -Matrix heißt singulär, wenn ihr Rang kleiner als n ist (\rightarrow Determinante fast 0)).

32. Wie kann man die schlechte Kondition in κ^2 geometrisch deuten?

2 Gerade: Berechnung des Schnittpunktes

Wenn die Geraden fast parallel sind wirken sich kleine Störungen in den Daten stark auf die Berechnung des Schnittpunktes aus.

33. Wann nennt man eine Matrix numerisch singulär?

Die "fast-Singulärität" aus Frage 31 bezeichnet man als numerisch singulär - das heißt, in der numerischen Praxis ist die (eigentlich reguläre) Matrix von einer singulären nicht mehr zu unterscheiden. Die konkrete Beurteilung hängt dabei ab von der Genauigkeit der verwendeten Gleitpunktarithmetik und dem Genauigkeitsniveau der Daten.

34. In welche Standardform bringt man ein Gleichungssystem $Ax=b$, um es mit der Gauß-Elimination zu lösen?

Die Matrix A wird auf eine einfachere Form gebracht und aus diesem vereinfachten Gleichungssystem wird dann x berechnet. Die Vereinfachung wird durchgeführt mittels LU-Zerlegung, die die Matrix auf eine Dreiecksgestalt bringt.

$$PA = LU$$

35. Wie sieht die Lösung eines linearen Gleichungssystems aus? Was sind die Vorteile?

$$\begin{cases} LU = Pb \\ \text{Subs: } Ly = Pb \rightarrow y \\ \text{Rücksubs.: } Ux = y \rightarrow x \end{cases} \quad \text{Vorteile: LU wird nur einmal durchgeführt.}$$

P...Permutationsmatrix, A...Matrix, L...untere Dreiecksmatrix, U... obere Dreiecksmatrix

36. Warum löst man im Allgemeinen das lineare Gleichungssystem nicht $x=A^{-1} \cdot b$?

A^{-1} (Invertieren) zu teuer!

Wegen der Effizienz - hier würde man n Rücksubstitutionen benötigen, während man sonst mit einer auskommt. Außerdem ist das Invertieren einer Matrix ein sehr "teurer" Prozess.

37. Wie heißen die algorithmischen Maßnahmen, die stabilisierende Maßnahmen im Sinne der Rundungsfehler sind?

- Pivotsuche
- Vorkalibrierung

38. Gleichungssystem der Form $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m > n$, $\text{Rang}(A) = n$

- **Hat dieses Gleichungssystem eine Lösung?**

Nein, da mehr Unbekannte als Gleichungen

- **Hat die Aufgabe $\|Ax - b\|_2^2 \rightarrow \min$ eine Lösung?**

Wenn $A^T(Ax - b) = 0$, ja.

- **Wenn ja, ist die Lösung eindeutig?**

Da $A^T A$ regulär ist, ja.

- **Stellen Sie die Lösung x dieses Gleichungssystem mit Hilfe der verallgemeinerten Inversen dar.**

$$x = A^+ b \quad \text{mit } A^+ := (A^T A)^{-1} A^T$$

39. Wie lautet die Gauß'sche Normalgleichung?

$$A^T A x = A^T b \rightarrow B x = b \quad \text{zum Merken: } A^T A x = A^T b$$

40. Zählen Sie die Eigenschaften der Matrix $A^T A$ auf.

Regulär

Positiv definit (?)

41. Wie funktioniert das QR-Verfahren?

- Bestimme $b_A \in B(A)$

Das funktioniert nach folgendem Satz:

Für jede $m \times n$ -Matrix A gilt die Zerlegung $\mathbb{R}^m = B(A) \oplus N(A^T)$, dabei bezeichnet $B(A)$ den Bildraum von A , das heißt den Teilraum von \mathbb{R}^m , der von den Spalten von A aufgespannt wird. $N(A^T)$ bezeichnet den Nullraum von A^T , das heißt den Teilraum von \mathbb{R}^m , der von A^T auf 0 abgebildet wird. $B(A)$ und $N(A^T)$ sind zueinander orthogonal.

- Bestimme die eindeutige Lösung x von $Ax = b_A$

42. In welcher Situation ist die QR-Zerlegung den Gauß'schen Normalgleichungen vorzuziehen (wegen numerischer Stabilität)?

Wenn die Konditionszahl $K_2 \gg 1$ (also sehr viel größer ist).

(QR Faktorisierung rettet zumindest die halben eps Stellen)

43. Wie ist die allgemeine Interpolationsaufgabe formuliert?

Aus gegebenen Funktionsdaten soll die zugrundeliegende Funktion ermittelt werden. Die zu approximierenden Daten können sowohl diskret als auch analytisch vorliegen. Man wählt dann zwischen zwei Approximationstypen: diskrete Approximation oder Funktionsapproximation.

44. Definieren Sie lineare Approximation.

Eine Approximationsfunktion nennt man linear, wenn sie additiv und homogen bezüglich ihrer Parameter ist, also folgende Eigenschaften besitzt:

- $g(x;b+c) = g(x;b) + g(x;c)$ (Additivität)
- $g(x;\alpha c) = \alpha g(x;c)$ (Homogenität)

45. Was sind die Vorteile linearer Approximation?

- niedriger Rechenaufwand
- Erweiterung um zusätzliche Terme ist einfach
- Additivität: $\{(x_i, y_i), i \in I\} + \{(x_i, \overline{y}_i), i \in I\} = \{(x_i, y_i + \overline{y}_i), i \in I\}$

46. Was sind die Unterschiede zwischen lokaler und globaler Approximation?

Bei globalen Approximationsmethoden hängt der Wert der Approximationsfunktion g an jeder beliebigen Stelle x in B von allen Datenpunkten ab. Daher ist die Kenntnis aller Datenpunkte für die Ermittlung der Parameter erforderlich. Die Störung eines Datenpunkts wirkt sich auf den gesamten Funktionsverlauf aus.

Bei lokalen Approximationsmethoden hängt die Approximationsfunktion zwischen zwei Datenpunkten nur von diesen beiden ab (und eventuell noch einigen aus der näheren Umgebung, aber nie von allen). Die Störung eines Datenpunkts wirkt sich nur in seiner unmittelbaren Umgebung aus.

47a. Definieren Sie die Monombasis und die Lagrangebasis für den Raum für die Polynome vom Grad d .

Der Raum P^d , der Polynome von Maximalgrad d , kann mit Hilfe einer Basis² dargestellt werden. Mit anderen Worten, es gibt $d+1$ Elemente aus P^d derart, dass jedes Polynom p eindeutig mit Hilfe dieser Elemente dargestellt werden kann. Die Menge der ersten $d+1$ Monome

$B_M^d = \{1, x, x^2, x^3, \dots, x^d\}$ besitzt dabei Basiseigenschaft.

Mit Hilfe der Lagrange-Basis lässt sich die Lösbarkeit des Interpolationsproblems beweisen. Sie

lautet: $L_j(x) := \prod_{k=0, k \neq j}^d \frac{x - x_k}{x_j - x_k}; \quad j = 0, 1, \dots, d; \quad x \in R$

47b. Unter welcher Bedingung ist die Lösung der Interpolationsaufgabe mit einem Polynom des Grades d eindeutig lösbar.

Wenn $d+1$ disjunkte Stützstellen vorhanden sind.

48. Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch?

- Die Kondition des Interpolationspolynoms $p_d(x)$ ($|\overline{p_d(x)} - p_d(x)| \leq \Lambda_d \max_{0 \leq i \leq d} |\bar{f}_i - f|$)

bezüglich Störungen in f ist für die äquidistanten Knoten und beliebig großes d sehr gut. ist falsch

- Die Kondition des Interpolationspolynoms $p_d(x)$ ($|\overline{p_d(x)} - p_d(x)| \leq \Lambda_d \max_{0 \leq i \leq d} |\bar{f}_i - f|$)

bezüglich Störungen in f ist für die transformierten Tschebyscheff-Abszissen (=Tschebyschoff Nullstellen??) und beliebig großes d sehr gut. ist richtig

- Die Kondition der Koeffizienten des Interpolationspolynoms $p_d(x)$ bezüglich Störungen in f ist für große Grade d am besten für die Darstellung des Interpolationspolynoms $p_d(x)$ bezüglich Monombasis und äquidistanten Knoten.

nein

- Die Kondition der Koeffizienten des Interpolationspolynoms $p_d(x)$ bezüglich Störungen in f ist für große Grade d am besten für die Darstellung des Interpolationspolynoms $p_d(x)$ bezüglich Tschebyscheff-Basis und Abszissen.

ja

49. Welcher Satz liegt dem Newill-Schema zugrunde und was besagt er?

Dem Newill-Schema liegt das Lemma von Aitken zugrunde.

An der Knotenmenge $\{x_0, x_1, \dots, x_d\}$ seien die Werte f_0, f_1, \dots, f_d vorgegeben. Hat man für $i \neq j \dots$

... das Interpolationspolynom p_{d-1}^1 zu den Knoten $\{x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d\}$

... das Interpolationspolynom p_{d-1}^2 zu den Knoten $\{x_0, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_d\}$

so erhält man das Interpolationspolynom p_d zu der gesamten Knotenmenge durch folgende Linearkombination:

$$p_d(x) := \frac{x_i - x}{x_i - x_j} p_{d-1}^1(x) - \frac{x_j - x}{x_i - x_j} p_{d-1}^2(x)$$

50. Wozu dient der Newill-Algorithmus?

Das Lemma von Aitken wird sukzessive auf die Polynome p_{k-1}^{j-1} zu den Knoten $\{x_{j-k}, x_{j-k+1}, \dots, x_{j-1}\}$ sowie p_{k-1}^j zu den Knoten $\{x_{j-k+1}, \dots, x_j\}$ angewendet. Das resultierende Polynom p_k^j interpoliert dann an den Knoten $\{x_{j-k}, x_{j-k+1}, \dots, x_j\}$.

51. Wozu dient die Methode der divergiernten Differenzen?

Muss man in einer gewissen Ausgangssituation das Interpolationspolynom selbst aufstellen, so wird in der Praxis dafür die Methode der divergiernten Differenzen verwendet. Dabei verwendet man eine weitere Polynombasis, die Newton-Basis.

52. Geben Sie die dazu verwandte Basis-Darstellung des Polynoms an.

$$N_j(x) := \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_i); \quad j = 0, 1, \dots, d; \quad x \in \mathbb{R}$$

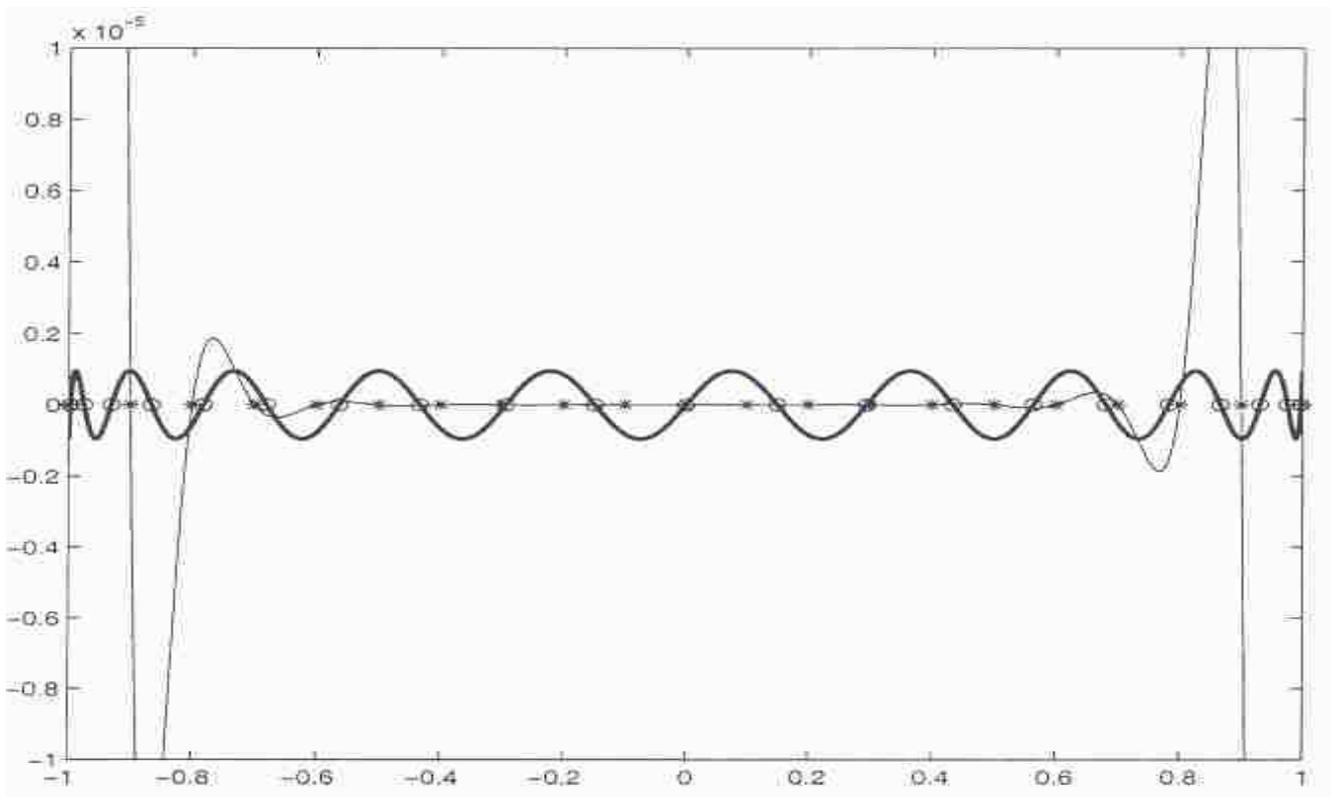
53. Geben Sie die Formel für den Verfahrensfehler bei der Interpolation an. Beschreiben Sie dabei alle auftretenden Größen.

$$\left| p_d(x) - f(x) \right| \leq \frac{M_{d+1}}{(d+1)!} |\omega_{d+1}(x)|, \quad \forall x \in [a, b]$$

$$M_{d+1} \geq \max_{x \in [a, b]} |f^{(d+1)}(x)| = \|f^{(d+1)}\|_{\infty}$$

$$\omega_{d+1}(x) := \prod_{j=0}^d (x - x_j)$$

54. Zeichnen Sie den typischen Fehlerverlauf für äquidistante Knoten und für die Tschebyscheff-Abszissen (= Stützstellen).



* ...äquidistante Knoten

O ...Tscherbyschoff Nullstellen

55. Geben Sie die Beziehung zwischen dem Verfahrensfehler der Interpolation und dem des bestapproximierenden Polynoms an. Beschreiben Sie alle auftretenden Größen.

Für das Interpolationspolynom $p_d \in P_d$ mit den Interpolationsknoten

$x_i \in [a, b]; \quad i = 0, \dots, d+1$ gilt $\|p_d - f\|_\infty \leq (1 + \Delta_d)E_d^*(f)$, wobei Δ_d die durch die Lösung

des Interpolationsproblems $p(x) = \sum_{j=0}^d y_j L_j(x)$ definierte Konditionszahl des

Interpolationsproblems ist.

56. Begründen Sie, warum die Approximation zu den Tschebyscheff-Abszissen von hoher Qualität ist.

Die Tschebyscheff-Nullstellen sind die idealen Interpolationsknoten, da sie genau dem Fehlerverhalten bei der Approximation entsprechen. Es gibt nämlich am Rand besonders viele und in der Mitte eher weniger.

57. Ein Anwender hat eine große Menge von mit Messfehlern behafteten Daten, deren analytischen Zusammenhang er mit einem Polynom approximieren will. Er schwankt dabei zwischen einem linearen Ausgleich (mit einem Polynom niederen Grades) und einem Polynom hohen Grades - geben Sie ihm einen Rat.

Er sollte das Polynom niederen Grades, also den linearen Ausgleich, wählen.

58. Ein Anwender hat eine Menge genauer Daten, deren analytischen Zusammenhang er mit einem Polynom approximieren will. Er schwankt dabei zwischen einer Interpolation mit äquidistanten Knoten und einer mit Tschebyscheff-Nullstellen - geben Sie ihm einen Rat.

Er sollte die mit den Tschebyscheff-Nullstellen verwenden.

59. Geben Sie vier Gründe dafür, dass man die Interpolation mit Tschebyscheff-Nullstellen gegenüber der Interpolation an der Tschebyscheff-Basis bevorzugt.

- die Qualität der Approximation ist besser (Hauptgrund)
- gute Kondition
- leichtere Berechnung der Koeffizienten
- kompaktere Darstellung

60. Definition der kubischen Spline Interpolation (mit Randbedingungen)

Eine kubische Spline Funktion ist ein stückweise zusammengesetztes Polynom 3. Grades welches an den Knoten in der 1. und 2. Ableitung übereinstimmt.

Natürliche Randbedingung: 2. Ableitung in den Randpunkten wird 0 gesetzt. $s''(a) = 0, s''(b) = 0$

Hermite Randbedingung: 1., 2. Ableitung werden in den Randpunkten geschätzt indem ein Polynom 3. Grades durch die ersten/letzten 4 Stützstellen gelegt wird. $s''(a) = f''(a), s''(b) = f''(b)$

Not-a-knot Bedingung: 3. Ableitung um Punkt x_1 bez. x_{k-1} gleichsetzen (1., 2. Ableitung stetig).
 $s^{(3)}(x_{1-}) = s^{(3)}(x_{1+}), s^{(3)}(x_{k-1-}) = s^{(3)}(x_{k-1+})$

Periodische Randbedingung: $s'_{(a)} = s'_{(b)} \quad s''_{(a)} = s''_{(b)}$
 $s''(a) = s''(b)$

61. Konvergenzverhalten einer Spline Interpolation in C^4

$O(h^4)$ $h \dots$ maximale Schrittweite

62. Vor-, Nachteile von Interpolation mit kubischen Splines

Nachteile:

- Globale Approximation \rightarrow Änderung von einem Punkt erfordert Neuberechnung der ganzen Kurve
- Kann deshalb bei großen linearen Gleichungssystemen ineffizient werden

Vorteile:

- Glatte Aussehen bei sprunghaften Daten
- Speicherplatzeffizienz

63. Definition der kubischen Akima-Interpolation

Zusammensetzung aus Polynomen 3. Grades

1. Ableitung muss stetig sein

Zum Berechnen nötig: Knotenpunkt + Näherung der 1. Ableitung

64. Vor-, Nachteile der Akima-Interpolation

Vorteile:

- Rechenzeiteffizienz
- Lokale Interpolation
- Speicherplatzeffizienz
- Günstige Form

Nachteile:

- Kein glattes Aussehen bei sprunghaftem Verhalten der Daten

65. Polynom welchen Grades kann aus 3 Stützstellen exakt integriert werden

Der Grad muss 2 sein, da nur Polynome 2. Grades exakt über drei Stützstellen definiert sind. D.h. Es gibt unendlich viele Polynome bei festem Grad > 2 die durch 3 Stützstellen gehen.

66. Kann eine lineare Funktion exakt mit der Trapezregel integriert werden?

Ich glaube: Ja, wenn linear bezüglich Eingangsgröße (x bei f(x)) gemeint ist.
Nein, wenn linear bezüglich der Parameter gemeint ist.

67. Bestimmen sie die Kondition von f(x) bei x=x+dx?

Einfach nur $K(x) = \left| \frac{x-f'(x)}{f(x)} \right|$??

65. Polynom welchen Grades kann aus 3 Stützstellen exakt integriert werden

Der Grad muss 2 sein, da nur Polynome 2. Grades exakt über drei Stützstellen definiert sind. D.h. Es gibt unendlich viele Polynome bei festem Grad > 2 die durch 3 Stützstellen gehen.

66. Kann eine lineare Funktion exakt mit der Trapezregel integriert werden?

Ich glaube: Ja, wenn linear bezüglich Eingangsgröße (x bei f(x)) gemeint ist.
Nein, wenn linear bezüglich der Parameter gemeint ist.

67. Bestimmen sie die Kondition von f(x) bei x=x+dx?

Einfach nur $K(x) = \left| \frac{x-f'(x)}{f(x)} \right|$??

68. Prinzip der Entstehung der Newton-Cotes Formeln

69. Prinzip der Entstehung der Gauß-Formel

70. Beispiele der Newton-Cotes-Formeln

- Trapezregel
- Simpsonregel
- Pulcherrima
- Milneregel

71. Welcher Fehler bezüglich Rechenfehler ist bei der numerischen Integration wesentlich? S. 34

Diskretisierungsfehler (Ersetzen kontinuierlicher durch diskrete Fehler)

72. Wesentlicher Unterschied zwischen Gauß und Newton-Cotes

- Bei der Gauß Formel liegen die Knoten innerhalb der Interpolationsintervalle nichtäquidistant. Es gibt daher keine feste Schrittweite h.
- Die Randpunkte der Interpolationsintervalle sind keine Quadraturknoten

- höhere Ordnung durch Gauß Formel

73. Asymptotische Entwicklung des Verfahrensfehlers der Trapezregel

$|T_h[f] - I[f]| \leq h^2((b-a)/12)M_2$
wobei $M_2 := \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)| = ||f''||_{\text{unendlich}}$ unendlich steht für das unendlich Zeichen

74. Probleme bei Implementierung von Quadratur

75. Vorgangsweisen für a-posteriori Fehlerschätzung

- $h - h/2$ Kriterium: Man berechnet mit der gleichen Quadraturformel zwei Näherungswerte für $I(f)$, $Q_h(f)$ mit der Schrittweite h und $Q_{h/2}(f)$ mit der Schrittweite $h/2$.
- Formelpaare: Man verschafft sich zwei Näherungswerte $Q_1(f)$, $Q_2(f)$ für $I(f)$, die auf zwei verschiedenen Quadraturformeln verschiedener Ordnung basieren. Annahme, dass in der genaueren Formel höherer Ordnung auch alle Funktionsauswertungen der ungenaueren Formel verwendet werden.

76. Wofür a-posteriori Fehlerschätzung?

Um die Einhaltung von vorgegebenen Toleranzen zu überprüfen

77. Wann liegt eine Singularität vor?

Wenn eine Matrix nicht regulär (invertierbar) ist dann liegt eine Singularität vor. Singularität kann man als Grenzfall einer „unendlich schlechten“ Kondition deuten.

78. Welche 2 alg. Maßnahmen bei der LU-Zerlegung führen zu einem stabilen Ablauf?

- Pivotsuche
- Vorkalibrierung

79. Warum löst man das innere Gleichungssystem mit Inversionen auf?

80. Wie löst man das gestapelte Gleichungssystem?

81. Was ist die LU-Zerlegung

Die LU-Zerlegung bezeichnet die Zerlegung einer Matrix (A) in das Produkt einer linken unteren Dreiecksmatrix (L) und einer rechten oberen Dreiecksmatrix (U).