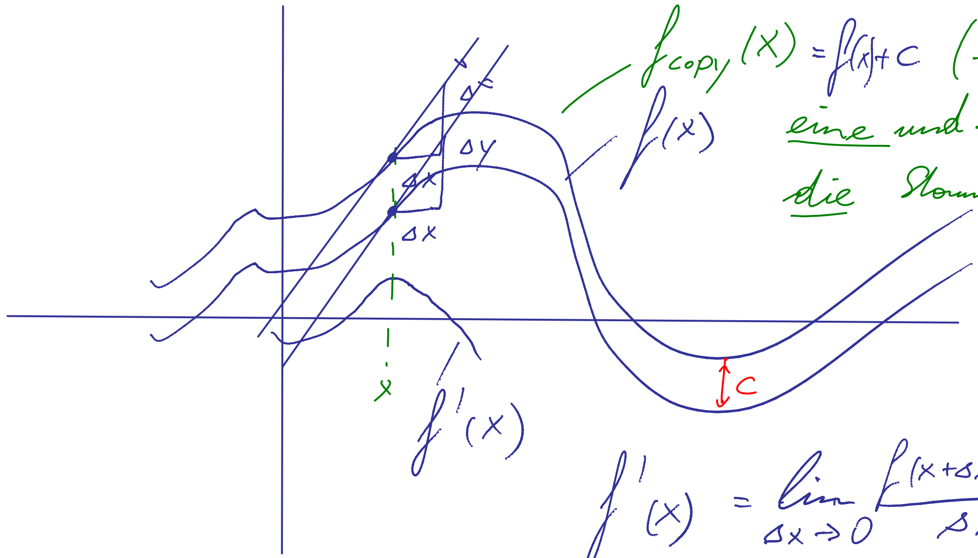
Differenzieren

Montag, 01. März 2010
09:27

20100301 + 20100302

$f_{copy}(x) = f(x) + c$ (⇒ Warum eine und nicht die Stammfkt)



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ableiten (= Differenzieren)

- Diff. von Grundfunktionen
  x^{α}, e^{x}, $\ln x$ ...

- Rechenregeln
  - Linearität
  - Produktregel
  - Quotientenregel
  - Kettenregel
  - Abl. der Umk.-fkt.

- „Umkehrproblem" des Diff.
  - geg. Fkt $f(x)$ auf Intervall I
  - ges. Fkt $F(x)$ für die gilt:

- ges. Fkt $F(x)$, für die gilt:
$f(x) = F'(x)$

- jede Fkt. $F(x)$ auf I, für die gilt:
$$F'(x) = f(x)$$

heißt eine Stammfkt von $f(x)$
bzw. ein unbestimmtes Integral von $f(x)$

Warum nicht "die"?

aus M1: Fkt $f(x)$, $g(x)$ auf $I=[a,b]$
es gelte: $f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in I$
$$\Rightarrow \boxed{g(x) = f(x) + C} \quad \forall x \in I$$
mit Konst. $C \in \mathbb{R}$

(„Um Konst. Faktor verschiedene (kopierte) Funktionen F_k")

- Satz: geg $f(x)$ auf I
sei $F(x)$ eine Stammfkt. von $f(x)$ $\quad (F'(x) = f(x))$
$\rightarrow$ dann: Alle Stammfkt. $G(x)$

von $f(x)$ sind geg. durch:

$$\boxed{G(x) = F(x) + C}$$

C bel. aus $\mathbb{R}$

→ „wenn wir eine Stammfkt. F haben, sind alle gefunden" (nur untersch. durch C)

Notation

$$F(x) = \underbrace{\int \overset{\text{Integrand}}{f(x)}\, \overset{\text{Integrationsvar.}}{dx}}_{\text{unbest. Integ.}} + \underbrace{C}_{\text{Integrationskonst.}}$$

Grundintegral

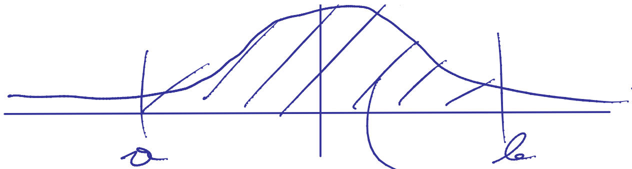
(Integral von Grundfkt.)

- x^α, e^x, $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\arcsin x$, $\arccos x$

Grundrechenarten, Funktionskomposition

⟹ Elementare Stammfkt.

- Nicht jede elementare Funktion besitzt eine Stammfkt., die wieder eine elementare Fkt. ist.
- Beispiel: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$



$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

Fläche herausfinden

- Problem „Finde Stammfunktion": algorithmisch entscheidbar, ob eine elem. Stammfkt. vorhanden (Alg. von Risch, 1970)

- Differenzieren: „Kochrezept"
  Integrieren: früher „Kunst"

• Diff. | unbest. Integ.

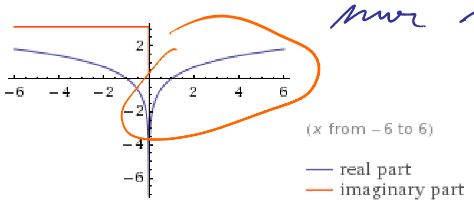
Diff.	unbest. Integ.
$\alpha \in \mathbb{R}$: $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$\int x^\alpha \cdot dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\, dx = \underbrace{\overbrace{\ln x}^{x>0} + C_1}_{x\in\mathbb{R}} \;+\; \underbrace{\ln(-x) + C_2}_{x<0}$, $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

• $\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \Big|\ \alpha \neq -1$

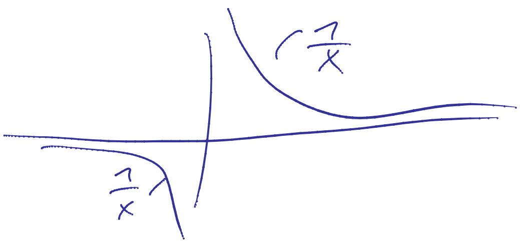
$$\left(x^{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)\cdot x$$

• $\int \frac{1}{x}\, dx$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$



nur in $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ definiert!



$$x < 0: \left(\ln(-x)\right)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \begin{cases} \ln x + C_1 & x > 0 \\ \ln(-x) + C_2 & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \ln \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$$

- $(e^x)' = e^x$

$$\rightarrow \int e^x\, dx = e^x + C$$

- $(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$

$$\rightarrow \int \cos x\; dx = \sin x + C \quad \ldots$$

- $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \arctan x + C$$

- $\left(\arcsin(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \arcsin x + C$$

$$1-x^2 > 0$$
$$1 > x^2 \quad \Rightarrow x \in (-1, 1)$$

/20100301

Rechenregeln

Dienstag, 02. März 2010
09:53

- Linearität

$$\left(\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)\right)' = \alpha \cdot f'(x) + \beta \cdot g'(x)$$

$$\int \left(\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)\right) dx = \alpha \cdot \underbrace{F(x)}_{\text{Stammfkt. von } f} + \beta \cdot G(x) + C$$

...

- Produktregel

$$\left(f(x) \cdot g(x) \right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) \cdot g(x) = \left(f(x) \cdot g(x)\right)' - f(x)\, g'(x)$$

Partielle Integration

$$\int f(x)\, g(x)\, dx = F(x)\, g(x) - \int F(x) \cdot g'(x)\, dx$$