02.03.10

Unbestimmtes Integral

⇒ Umkehrung der Differenz/Differentiation

Differenzieren

dieser wird die Ableitung zugeordnet

$q(x) = f(x) + C$

$\downarrow$

$q'(x) = f'(x)$

unbestimmtes Integral

Problem: geg: $f(x)$

ges: FKT $F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$

Solch ein $F(x)$ heißt Stammfunkt von $f(x)$ oder eben ein unbestimmtes Integral

Notation: $\int \underbrace{f(x)} \cdot dx$

Integranden — Integrationsvariable

wenn 2 FKT's die selbe Ableitung haben heißt das ⇒ selbe FKT, nur halt verschoben der Anstieg bleibt also gleich

Sei $F(x)$ eine Stammfkt von $f(x)$, dann gilt:

jede Stammfkt von $f(x)$ lässt sich schreiben als: $G(x) = F(x) + C$ mit Integrationskonst. $C \in \mathbb{R}$

Wenn wir eine Stammfunkt. kennen, kennen wir alle.

$\int f(x) \cdot dx \Rightarrow$? Algorithm entscheidbar!

Potenzfkt x^α, e^x, $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$

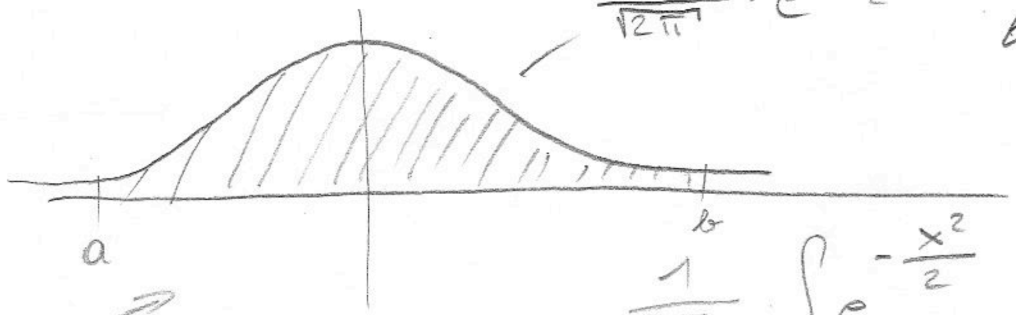
Arc sin x, arccos x, arctan x

Grundrechnungsarten, Funktionskomposition

$\Rightarrow$ ELEMENTARE FUNKTION

Nicht jede elementare Funktion besitzt eine Stammfunktion, die wieder eine elem. Fkt ist!

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ ← Gaussische Glockenkurve



$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{x^2}{2}}$

VORGRIFF (best. Integral)

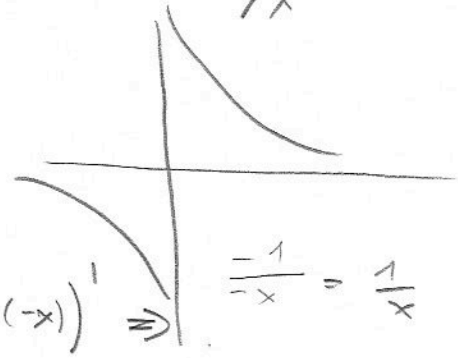
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx \Rightarrow$ keine elementare Funktion

Wie sehe ich, ob was geht?

⇒ Problem algor. entscheidbar
ob el. Fkt eine elem. Stammfunktion besitzt

→ Alg. von Riesch (1970)

$1/x$



Differenzieren: "Kochrezept"

Integrieren: "Kunst"

$x<0: (\ln(-x))' \Rightarrow \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$

Differenzieren	Unbest. Integral $\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln\lvert x\rvert + C$
$(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$\int \alpha \cdot x^{\alpha-1} dx = x^{\alpha} + C \Rightarrow \int x^{\alpha} \cdot dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\underset{\uparrow \alpha \neq -1}{\alpha+1}} + C$ $\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$(\ln x)' = 1/x$	$\int \frac{1}{x} dx = \overbrace{\ln x}^{x\in\mathbb{R}^+} + C_1 \xRightarrow{\text{zusätzl.}} \ln(-x) + C_2$ "halbe Wahrheit" C_1 für pos. x, C_2 für neg x
$\sin x = \cos x$	$\int \cos x \, dx = \sin x + C$
$\cos x = -\sin x$	$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C$
$e^x = e^x$	$\int e^x \cdot dx = e^x + C$

Integr.: von li Seite schließen wir auf die rechte

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$ $x \in (-1,1)$

Rechenregeln:

Differenzieren

Linearität

$$(\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x))' = \alpha \cdot f'(x) + \beta \cdot g'(x)$$

Produktregel:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$f'(x) \cdot g(x) = \underbrace{(f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}$$

? Buch nachschaun

Integrieren

$$\int (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)) \cdot dx$$

$$\Rightarrow \alpha \underbrace{F(x)}_{\text{Stammfkt von } f} + \beta \underbrace{G(x)}_{\text{Stammfunktion von } g} + C$$

Partielle Integration

$$\int f(x) \cdot g(x) \cdot dx =$$

unbest. Integral

$$\underbrace{F(x)}_{\text{Stammfkt}} \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x) \cdot dx$$

$$\int f'(x) \cdot g(x) \cdot dx = f(x)\, g(x) - \int f(x)\, g'(x) \cdot dx$$

Man muss min. 1 Stammfkt kennen.