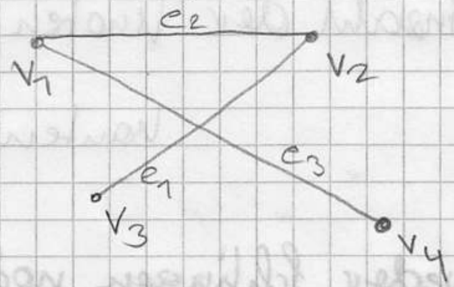
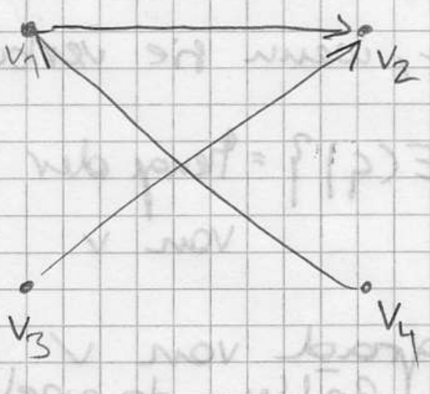
2.2. Graphentheorie

Mi, 04.11.09

Graphen $G = (V, E)$ (vgl. Def 2.10) sind gegeben durch Knotenmenge $V = V(G)$ und Kantenmenge $E = E(G)$ zB $E(G)$ geg. durch Graphen wobei Kanten je zwei Knoten verbinden



ungerichtete (keine Richtung) Kanten als ungeord. Paar zB. $e_2 = \{v_1, v_2\} = v_1 v_2$



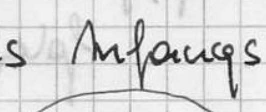
gerichtete Kanten als geordn. Paar

Paar $e_2 = (v_1, v_2)$

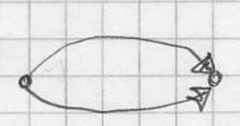
d.h E ist binäre Relation auf V (Menge d. Knoten)

Mehrfachkanten

u.U. zugelassen, mehreren Elementen von E (also mehreren Kanten) werden die selben Knoten als Anfangs- u. Endpunkte zugeordnet.



ungerichteter Fall



gerichteter Fall

Schlinge

Notationen Schlagworte:

adjazent (v_1, v_2): $v_1 \overset{e}{\text{———}} v_2$

v_1 und v_2 inzidieren mit e

$\alpha_0(G) := |V(G)|$ Macht der Knotenmenge

$\alpha_1(G) := |E(G)|$ Kanten

G heißt schlicht $\iff$ weder Schlingen noch Mehrfachkanten auftreten

2 Knoten sind Nachbarn, wenn sie verbunden sind.

$\Gamma(v) := \{ w \in V(G) \mid vw \in E(G) \}$ = Menge der Nachbarn von v

$d(v) := |\Gamma(v)|$ = Knotengrad von v
Schlingen zählen doppelt

ungerichtet

Wenn Graph Schlingen hat sinnvoll Schlingen doppelt zählen! (Anfangs- u. Endpunkt)

$\Gamma^+(v) \{ w \in V(G) \mid (v,w) \in E(G) \}$ = Menge der Nachfolger von v

$\Gamma^-(v) \{ w \in V(G) \mid (w,v) \in E(G) \}$ = Menge d. Vorgänger

gerichtet

gerichtet

$\Gamma(v) := \Gamma^+(v) \cup \Gamma^-(v)$ = Menge aller Nachbarn von v

$d^+(v) := |\Gamma^+(v)|$ = Weggrad von v

$d^-(v) := |\Gamma^-(v)|$ = Hingrad von v

<u>Handschlaglemma</u> (2.13)

jeder Knoten hat Knotengrad (Anz. der Nachbarn)

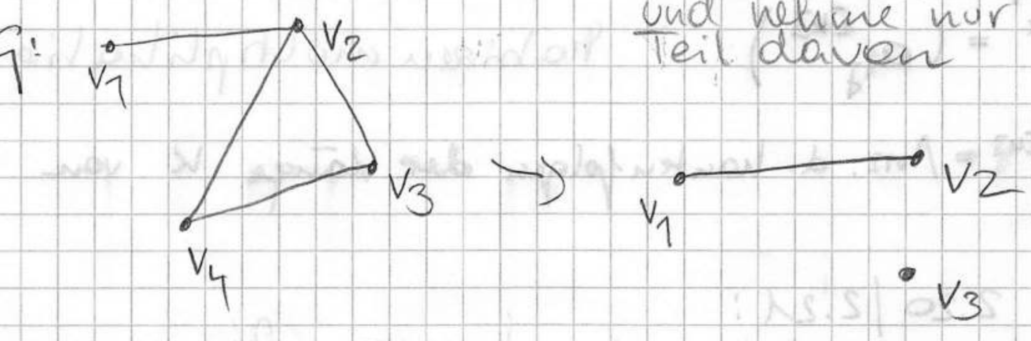
G schlicht u. ungerichtet $\Rightarrow \sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|$

G gerichtet $\Rightarrow \sum_{v \in V(G)} d^+(v) = \sum_{v \in V(G)} d^-(v) = |E(G)|$

hin und weg muss gleich viel sein

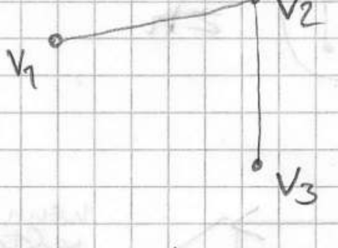
Def 2.14 Teilgraph wie Teilmenge

Ich hab Knoten u. Kanten und nehme nur einen Teil davon



Teilgraph

V'', E'



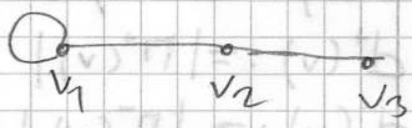
induzierter Teilgraph

$G'' = (V'', G'')$

mit allen Kanten $e \in E$ zwischen Knoten aus V''

Adjazenzmatrix (vDef. 2.18)

$A(G) = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$



$n = 3$ // Anz. Knoten

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

von v_1 zu v_1 = 1

v_1 zu v_2 = 1

v_1 zu v_3 = 0

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

quad 3×3 Matrix

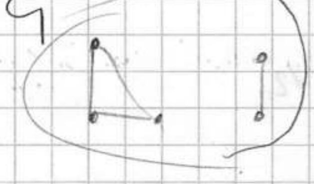
Bemerkung (vgl. 3.22)

$A(G)^k = (a_{ij}^{[k]})$ Matrizenmultiplikation

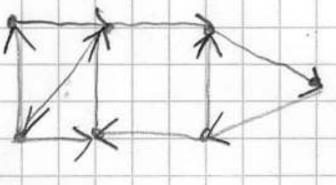
mit $a_{ij}^{[k]}$ = Anz. d. Kantenfolgen der Länge k von v_i nach v_j

Zur Def. 2.20 / 2.21:

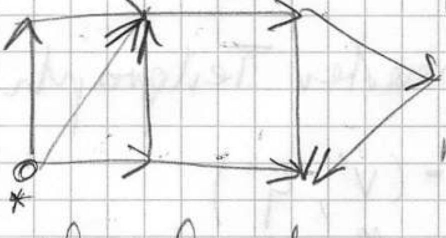
← ist zh



nicht zusammenhäng.
zh



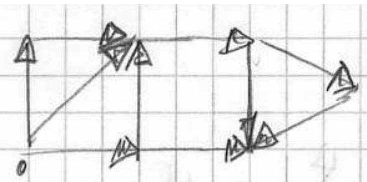
stark zusammenhängend



wenn ich zu rechts bin, komm ich nicht mehr raus

schwach aber nicht stark zh

* wenn ich hier starte komm ich hier nicht mehr zurück

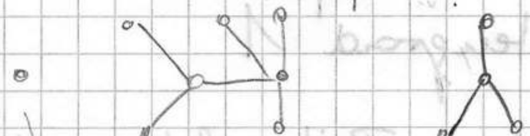


schwach (nicht stark) zh
starke komponenten
sind sogar einpunktig

Bäume v. Wälder (2.22)

Wald: schlichter, ungerichteter Graph ohne Kreise, pos. Länge

zB



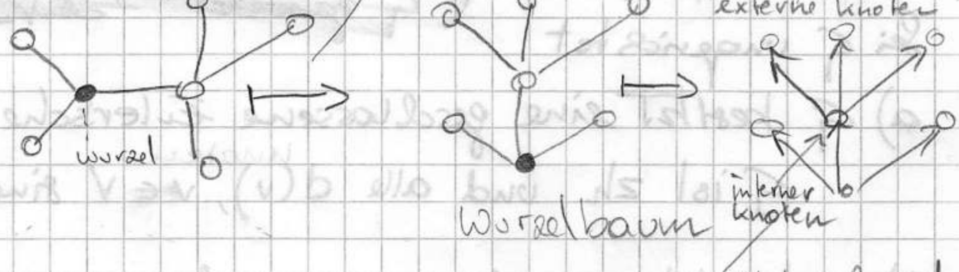
schlicht: keine Schlingen u. keine doppelte Kanten

3 Bäume

Aufstellen wie Eduard Sachbauer

Baum: zh. Wald

Baum T:



Wir haben immer um einen Knoten mehr als Kanten

gerichteter Graph (von Wurzel weg)

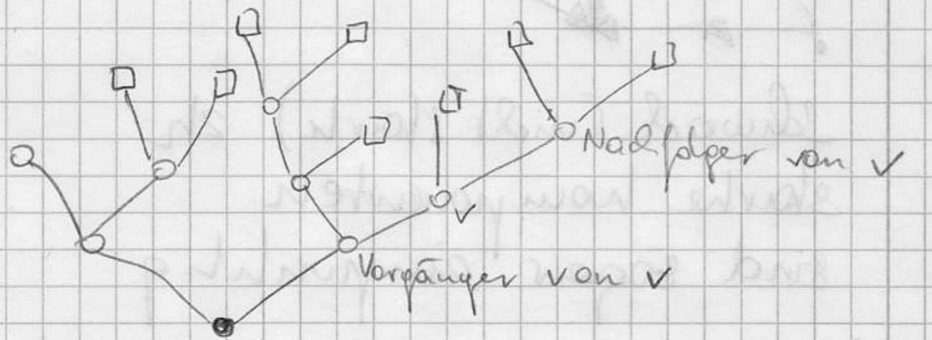
Satz 2.23

Wenn T Baum $\Rightarrow \alpha_0(T) = \alpha_1(T) + 1$

W Wald $\Rightarrow \alpha_0(W) = \alpha_1(W) + k$

k... Anz. d. Bäume-Komponente

Binärbäume



Wurzel • Knotengrad 2

sonst. innere Knoten o Knotengrad 3

externe Knoten □ Knotengrad 1

oft spielt auch die li/re - Reihenfolge eine Rolle.

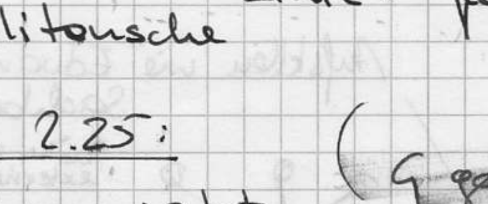
Euler'sche / Hamiltonsche Linie: jede(n) Kante / Knoten genau einmal.

Satz 2.25: (G gerichtet → Satz 2.26)

Sei G ungerichtet

a) G besitzt eine geschlossene Euler'sche Linie $\Leftrightarrow$
G ist zh und alle $d(v)$, $v \in V$ (Knoten) sind gerade

b) G besitzt eine offene Euler'sche Linie genau dann wenn $\Leftrightarrow$
G ist zh und für genau zwei $v \in V$ ist $d(v)$ ungerade



$e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6$

$e_7 - e_9 - e_{10} - e_8$

wo kam ich an einer Eulerschen Linie

Netzwerke: Gerichtete od. ungerichtete Graphe mit einer Kantenbewertung (wie lang ist die Kante)

$w: E \to \mathbb{R}$

Adjazenzmatrix $A_w(G)$ – jetzt schreiben wir die Gew. Länge rein

$A_w(G) = (w(v_i, v_j))_{1 \le i,j \le n}$

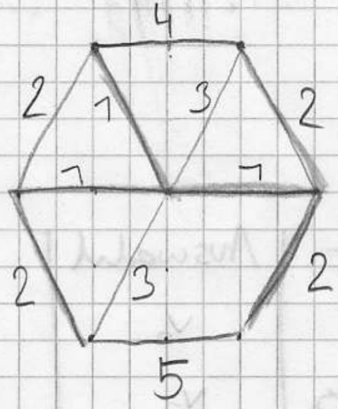
Anwendung: zB. Straßenkilometer minimieren

Kruskal-Algorithmus liefert einen "spannenden Baum T" mit min. $w(T)$

Baum der alle Knoten enthält

analog für Wälder + Gerüste

$$w(T) = \sum_{e \in E(T)} w(e)$$



Vorgangsweise ("Greedy-Algorithmus")

1) Sei $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ mit
$w(e_1) \le w(e_2) \le \dots \le w(e_m)$

2) Setze $E' := \emptyset, j := 1$ (abgearb. Kanten) initialisieren

3) Ist $(V, E' \cup \{e_j\})$
wenn kreisfrei dann:
$E' := E' \cup \{e_j\}$ (informatisch)

4) $\overbrace{j = |V| - 1}^{\text{beim Knoten 2 Kanten}}$ oder $j = m$? → ja = Ende
nein: $j := j + 1$
und gehe zu Schritt 3.)

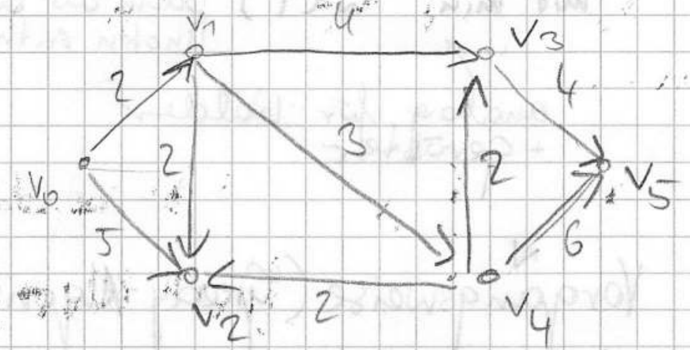
Dijkstra - Algorithmus:

Deixtra

Bestimmung der „Distanzen"

$d(v_0, v)$, $v \in V$, für vorgegebenes $v_0 \in V$

$$d(v,w) := \underbrace{\min\left\{\sum_{j=1}^{k} w(e_j) \,\middle|\, e_1, \dots, e_k \text{ ist Kantenfolge von } v \text{ nach } w\right\}}_{\infty \text{ falls } = \emptyset}$$



Schritt	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	Auswahl	Vorgänger
0	$\boxed{0}$						v_0	
1		$\boxed{2}$	5	∞	∞	∞	v_1	v_0
2			$\boxed{4}$	6	5	∞	v_2	v_1
3				6	$\boxed{5}$	∞	v_4	v_1
4				$\boxed{6}$		11	v_3	v_1
5						$\boxed{10}$	v_5	v_3

Allg. Vorgangsweise

1.) Setze $l(v_0) := 0$, $l(v) := \infty$
$\forall v \in K \{v_0\}$, $U := \{v_0\}$, $u := v_0$

2.) Für alle $v \in V \setminus U$ mit $(u, v) \in E$ und
$l(v) > l(u) + w(u, v)$
setze $p(v) := u$, $l(v) := l(u) + w(u, v)$

Vorgängerknoten

3.) Sei $m = \min \{ l(v) \mid v \in V \setminus U \}$, $z \in V \setminus U$ mit $l(z) = m$
$U := U \cup \{z\}$, $u := z$

4.) Falls $U = V$ oder $\forall v \in V \setminus U : l(v) = \infty \Rightarrow$ beenden
sonst Schritt 2)