Mathe, 03.11.09

2. Diskrete Mathematik

2.1. Kombinatorik

abzählende Kombinatorik - Bestimmung von Anz.
Indem ich abzähle unterscheide ich sie aus

(i) Summenregel $A \cap B = \emptyset \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$

(ii) Produktregel $= |A \times B| = |A| \cdot |B|$

(iii) Gleichheitsregel $f: A \to B$ bijektiv $\Rightarrow |A| = |B|$

Schreibweisen (Def 2.3):

$0! = 1$, $(n+1)! := n! \cdot (n+1)$, also $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$
„n Fakultät" oder „n-faktorielle"

$$\left.\binom{n}{k} := \begin{cases} \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} & \text{für } n \geq k \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \right\} n, k \in \mathbb{Z}$$

Binomialkoeffizient n über k -> Satz 2.5

S48-51 Die wichtigsten Anordnungen sind Auswahlprblm.

$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots a_n\}$, $|A| = n$
oft $A = \{1, 2, \dots, n\}$

WiR

(i) Anordnungen ohne Einschränkungen:

$$|A^k| = |\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k\text{-mal}}| = |A^k| = n^k$$

Auswahl der k-Tupel auf A

"Variation mit Wiederholung" Reihenfolge wichtig!

$$|\{f \mid f: \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots n\}\}|$$

$$(a_1, a_2, \dots a_k) \mathrel{\hat{=}} f: \{1, \dots, k\} \to A$$

$$i \mapsto a_i$$

k-Tupel

Bijektion d.w.

(ii) Anordnung verschiedener Elemente ("Variation o. Wiederh.")

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{n-k!} \quad \text{für } k \leq n$$

- Auswahl d. k-Tupel auf A aus versch. Elemente $= |\{f \mid f: \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, n\} \text{ injektiv}\}|$

(iii) Permutation von A:
Spezialfall von (ii) mit $n = k$:

$$n! = |\{f \mid f: A \to A \text{ bijektiv}\}|$$

(iv) Permutationen einer Multimenge

$n=3 \quad A = \{\underset{a_1}{B}, \underset{a_2}{S}, \underset{a_3}{W}\} \quad k_1 = 2 \quad k_2 = k_3 = 1$

gezählt werden:

BBSW, BBWS
BSBW, BWBS
BSWB, BWSB
SBBW, WBBS
SBWB, WBSB
SWBB, WSBB

Allg: n verschiedene Elemente mit Häufigkeiten $k_1, k_2, \dots, k_n$; $k = \sum_{i=1}^{n} k_i$

Gesucht Anzahl der Anordnungen =

$$\left|\{f \mid f : \{1, \dots, k\} \to A \text{ mit } |\underbrace{f^{-1}(i)}_{=\{j \in \{1, \dots, k\} \mid f(j) = i\}}| = k_i \text{ für } i = 1, \dots, n\}\right|$$

Menge aller j von 1 bis k

wir betrachten jene Positionen, die gerade mit i gener. sind

Im Beispiel: $k=4$; $4!$ Permutationen

2 Permutationen liefern das selbe Ergebnis, wenn sie sich nur um eine Permutation der B's unterscheiden.

$$\Rightarrow \# \frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$$

<u>Allgemein:</u> $\# = \dfrac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}$

(v) Auswahl von Teilmengen

Spezialfall von iv mit:

$k \mapsto n$, $n \mapsto 2$, $k_1 \mapsto k$, $k_2 \mapsto n-k$;

"Kombination ohne Wiederholung"

liefert: $\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k} = \left|\{T \subseteq A \mid |T| = k\}\right|$

zählt die k-elem. Teilmenge einer n-elementr. Menge

(vi) Auswahl einer Multimenge

"Kombinationen mit Wiederh"

zB. 7 elementr. Multimenge von $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_4\}$, $n=4$, $k=7$

$a_1, a_1, a_1, a_2, a_2, a_4, a_4$ $\triangleq$

$a_1, a_1, a_1, \circ, a_2, a_2, \circ, \circ, a_4, a_4$

Die Positionen der Punkte tragen die ges. Information

wieviel Punkte 3

Anzahl der Auswahl von $n-1$ Punkten aus $n+k-1$ mögl. Positionen =

$$\binom{n+k-1}{n-1} \underset{\text{Satz 2.4}}{=} \binom{n+k-1}{k}$$

Im Beispiel also: $\binom{4+7-1}{7} \; \binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10 \cdot \cancel{9}^{3} \cdot \cancel{8}^{4}}{\cancel{2} \cdot \cancel{3}} = 120$

$$\left(\left| \{ f \mid f : \{1, \dots, n\} \to \{0, 1, \dots k\} \text{ mit } \sum_{i=1}^{n} f(i) = k \} \right| \right)$$

Komposition der Zahl k in n Summanden

Binomialkoeffizienten u. Binomischer Lehrsatz

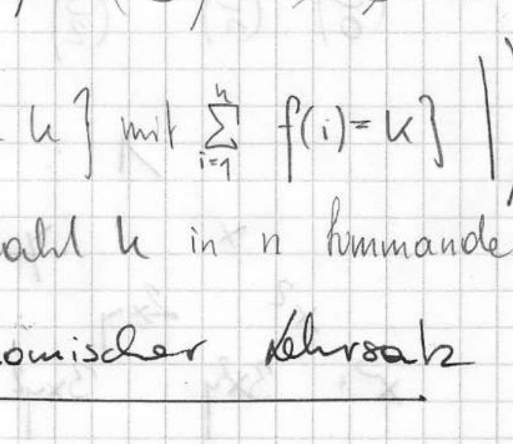
Satz 2.4:

(i) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

(ii) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(iii) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

Beweis von iii durch Rechnung -> Seite 52 od. Kombinatorik!



$$\binom{n+1}{k+1} = |\{T \mid T \subseteq A, |T| = k+1\}| =$$

$$= |\{T \mid T \subseteq A \setminus \{a_{n+1}\}, |T| = k+1\}| +$$

$$+ |\{T \mid a_{n+1} \in T \subseteq A, |T| = k+1\}|$$

$$= \left| \{ T \mid T \subseteq A \setminus \{a_{n+1}\} \; |T| = k \} \right|$$

$$= \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

$\Rightarrow$ Pascal'sche Dreieck

$$\begin{matrix} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \end{matrix} = \begin{matrix} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} & & & 1 & & & \\ & & x & & y & & \\ & x^2 & & 2xy & & y^2 & \\ x^3 + & & 3x^2y & & 3xy^2 & & y^3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} (x+y)^0 \\ (x+y)^1 \\ (x+y)^2 \\ (x+y)^3 \end{matrix}$$

Binomischer Lehrsatz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Beweis mittels Induktion nach n:

$n = 0, 1$

$n \mapsto n+1$

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n \cdot (x+y)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k (x+y) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} =$$

$$= \binom{n}{0} x^{n+1} y^0 + \binom{n}{1} x^n y^1 + \binom{n}{2} x^{n-1} y^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} x^2 y^{n-1} + \binom{n}{n} x^1 y^n +$$
$$+ \binom{n}{0} x^n y^1 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^2 + \ldots + \binom{n}{n-2} x^2 y^{n-1} + \binom{n}{n-1} x^1 y^n + \binom{n}{n} x^0 y^{n+1} =$$

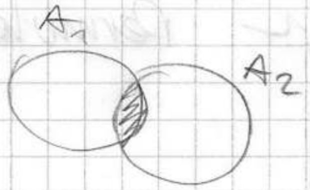
$$= \sum_{k=\emptyset}^{n+1} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) x^{n+1-k} y^k \quad (\text{Satz } 2.4 \text{ iii})$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k$$

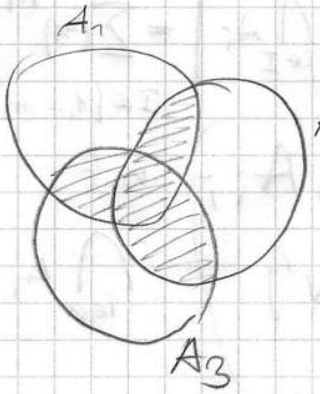
1. Term → Induktion
mit $(x+y)$ multiplizieren

mit Indizes!

Das Inklusions-Exklusionsprinzip! Satz 2.6



$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$



$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

__Allgemein:__

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \ldots - |A_{n-1} \cap A_n|$$
$$+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \ldots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| -$$
$$- |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| - \ldots$$
$$\pm |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

Vorzeichen wechselt

$$\sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \ldots, n\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

__Satz 2.6__

Gilt nämlich „komplementäre Variante" zB 2.8
Auswahl der Fixpunktfreien Permutation
von $\{1, \dots, n\}$

$$= \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i'\right| = \left|E \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = |E| - \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| = \sum_{I \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

$A_i = \{f \in E \mid f(i) = i\}$, $A_i' = E \setminus A_i$, mit $\bigcap_{i \in \emptyset} A_i =: E$

$E = \{f \mid f: \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots n\}$ bijektiv$\}$

Schnitt wird kleiner, je mehr Mengen ich schneide

Schnitt über die leere Menge ?

A_i ... all jene Permutationen welche das i fest lassen

$$\overset{*}{=} \sum_{I \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|} \overbrace{(n - |I|)!}^{\text{Permutation}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (n-k)! = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \cdot (-1)^k$$

$$= \underbrace{n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}}$$

Exponentialreihe ?

nähert sich für $n \to \infty$ den Wert $e^{-1} \approx 0{,}37$ an
Vergleiche Abschnitt 4.4

d.h. für große n sind etwa 37 %
aller Permutationen fixpunktfrei!

Insg. gibt es n faktorielle Permutationen

A_i ... lassen ite Element fest

A_i' lassen nicht fest

Schnitt über A_i'

lässt es jedes i nicht fix
$\Rightarrow$ kein Fixpunkt