1.5 Relationen u. Abbildungen

- geordnetes Paar: je 2 math. Objekte (Elemente, Mengen, ...) x, y

  → können zu einem geord. Paar (x,y) verknüpft werden

  Charakterisierende Eigenschaft:

  $(x,y)=(x',y') \iff x=x' \wedge y=y'$

- kartesisches Produkt Def 1.51

  $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$ der Mengen A u. B

  Analog "n-Tupel" $a_1 \dots a_n$ und n-fache kartesische Produkte $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots a_n) \mid a_1 \in A_1, \dots a_n \in A_n\}$

  $A^n = \underbrace{A \times A \times A \times \dots \times A}_{n\text{-mal}}$

- Eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$ heißt Relation zw. A und B, im Falle $A = B$ auch binäre Relation auf A. Wir schreiben:

  $a R b$, wenn $(a,b) \in R$

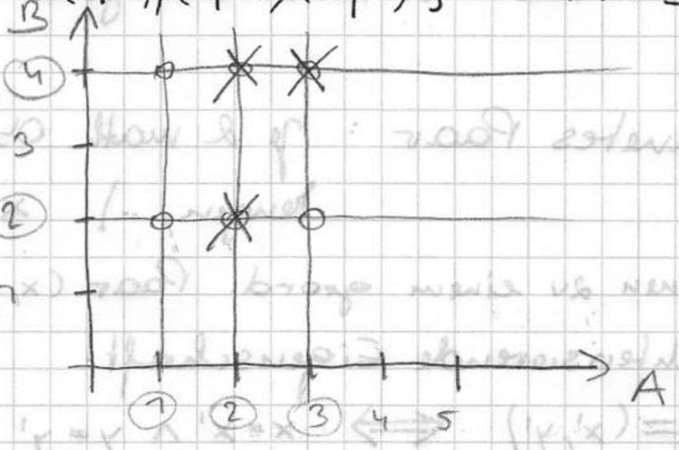
  "a steht in Relation R zu b"

  $a \not R b$, wenn $(a,b) \notin R$

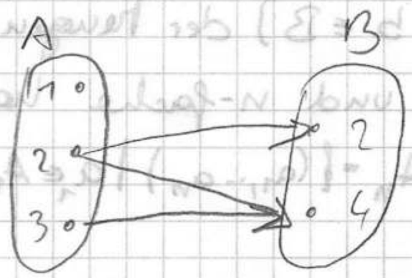
  zB.: $<$ auf $\mathbb{N}$ ist die Menge $\{(0,1), (0,2), (1,2)$
  $(0,3), (1,3), (2,3) \dots\}$

- Darstellung von Relationen am Beispiel $A = \{1,2,3\}$
  $B = \{2,4\}$, $R = \{(2,2),(2,4),(3,4)\} \subseteq A \times B$

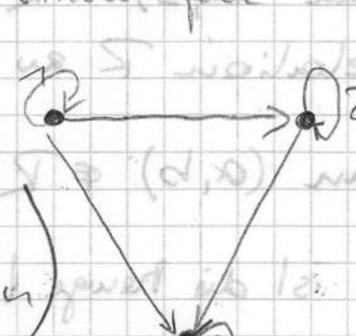
1. kartesisch:



2. Pfeildiagramm:



3. Graph $G(R)$ (bei binären Relationen)
   zB $\leq$ auf $A = \{1,2,3\}$ = Knotenmenge
   dh $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$
   Knoten: Punkte
   Kanten: Verbindungen
   Kantenmenge



(Kantenmenge gerichtet, inkl. Schlingen)

Eigenschaften von binären Relationen R auf A:

jede Zahl teilt sich selbst

reflexiv: $\forall a \in A: \ a R a$

Symetrisch: $\forall a, b \in A: \ aRb \rightarrow bRa$

antisymetrisch: $\forall a, b \in A: aRb \wedge bRa \rightarrow a = b$

s darf nicht vertauscht werden

transitiv: $\forall a, b, c \in A: \ aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$

funkt zB bei ist kleiner

Vergleichbarkeit: $\forall a, b \in A: \ aRb \vee bRa$

Äquivalenz:
- reflexiv
- symetrisch
- transitiv

Halbordnung:
- refl.
- antisym
- transitiv

Vergleichbarkeit: (lineare) Ordnung Totalordnung, Kette

Definition: 1.55, 1.60, 1.61

| Äquivalenzrelationen R auf A entsprechen Klasseneinteilungen = Partitionen von A (S. 1.59)

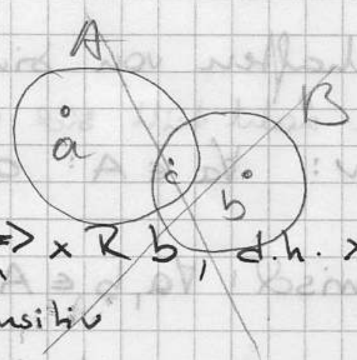
d.h. $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ mit $A_i \neq \emptyset \ \forall i \in I$, $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j \in I$

man hat als A_i lediglich die Äquivalenzklassen $K(a)$ aller $a \in A$ zu nehmen, wobei $K(a) = \{b \in A \mid aRb\}$

zB. bei modulo 2

<u>denn:</u> ist $c \in K(a) \cap K(b)$

so folgt $x \in K(a)$



$x R a,\ a R c,\ c R b \underset{\text{transitiv}}{\Rightarrow} x R b$, d.h. $x \in K(b)$

Also $K(a) \subseteq K(b)$, analog:

$K(b) \subseteq K(a) \Rightarrow K(a) = K(b)$

Wenn Klasseneinteilung dann auch Äquivalenzrelation.

Umgekehrt "induziert" jede Partition $\{A_i \mid i \in I\}$ von A eine Äquivalenzrelation R auf A

$a R b :\Leftrightarrow a, b$ liegen in derselben Klasse A_i

<u>Beispiele (1.56)</u>

a) identische Relation $a R b \Leftrightarrow a = b$

└ einelementrige Klassen

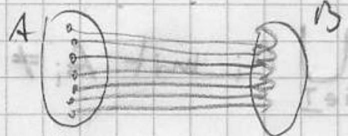
b) Allrelation $\forall a, b \in A : a R b$

└ eine einzige Klasse - alles in einen Topf

c) $\equiv$ modulo m (m Restklassen modulo m)

└ Kongruenz

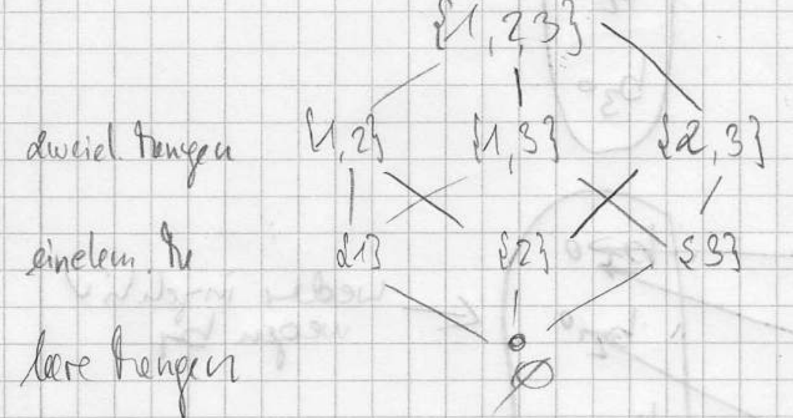
d) $f: A \to B$ Funktion



Def. 1.64

$a R a' \Leftrightarrow f(a) = f(a')$

Halbordnungen:
Darstellung durch Hassediagramme, zB Teilerverband im Abschnitt 1.2 oder
$\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ bezügl. $\subseteq$



Halbordnung, keine Kette

Funktion

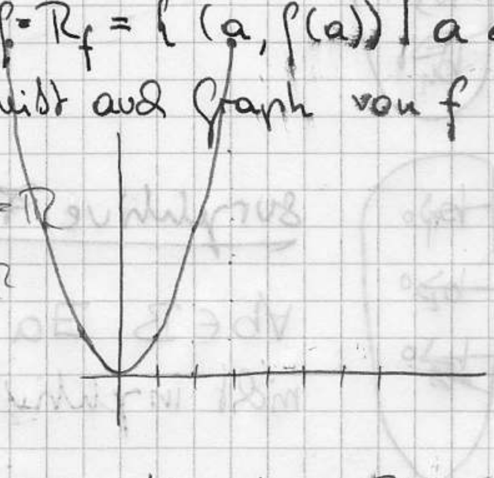
Eine Fkt od. Abbildung f von A nach B ist eine Relation $R_f \subseteq A \times B$ mit:

$$\forall a \in A \ \exists!\, b \in B : a R_f b$$

Man schreibt: $b = f(a)$ und $f: A \to B$, $f: a \mapsto f(a)$

Formal also: $f = R_f = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$
heißt auch Graph von f

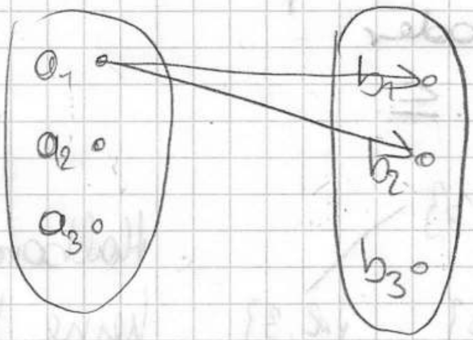
zB $A = B = \mathbb{R}$
$f(a) = a^2$



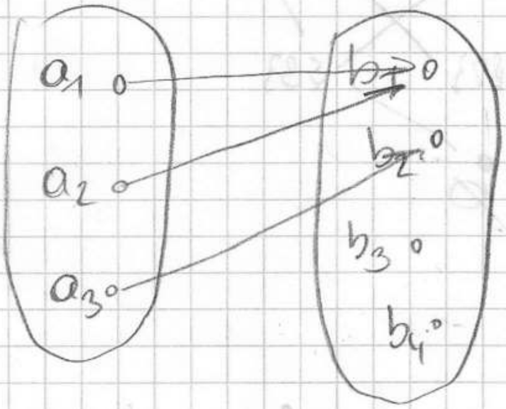
A ... heißt Definitionsbereich
B ... heißt Zielbereich

Illustration durch Pfeildiagramme:

keine Fkt wegen a_1



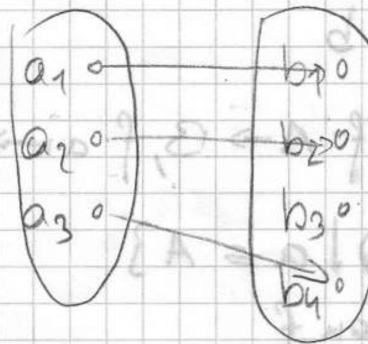
sehr wohl eine Fkt



weder injektiv wegen b_1

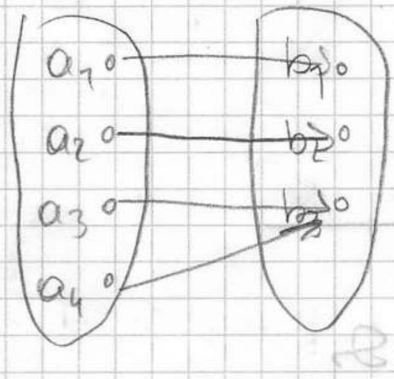
noch surjektiv wegen b_3, b_4

Wichtige Begriffe dazu:



injektive Fkt

$f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$



surjektive Fkt

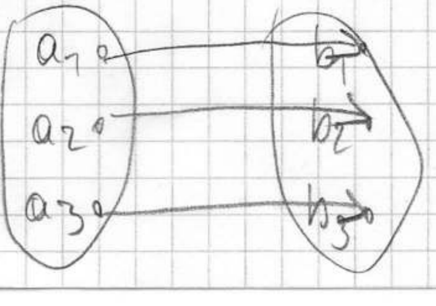
$\forall b \in B \ \exists a \in A : f(a) = b$

nicht injektiv wegen b_3

bijektive Fkt

d.h. injektiv $\wedge$ surjektiv

$\forall b \in B \ \exists! \, a \in A : f(a) = b$



Bsp 1.66 $f: a \mapsto b$

$A = B = \mathbb{R}$ weder injektiv noch surjektiv

$A = \mathbb{R}_0^+$, $B = \mathbb{R}$ injektiv (jeder Wert höchstens 1x) nicht surj. weil negativ

$A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}_0^+$ injekt nicht weil Werte doppelt angen. surj. schon

$A = \mathbb{R}_0^+$, $B = \mathbb{R}_0^+$ hier gilt beides

Bemerkungen:

- Ist $f: A \mapsto B$ bijektiv, A, B endlich $\Rightarrow |A| = |B|$

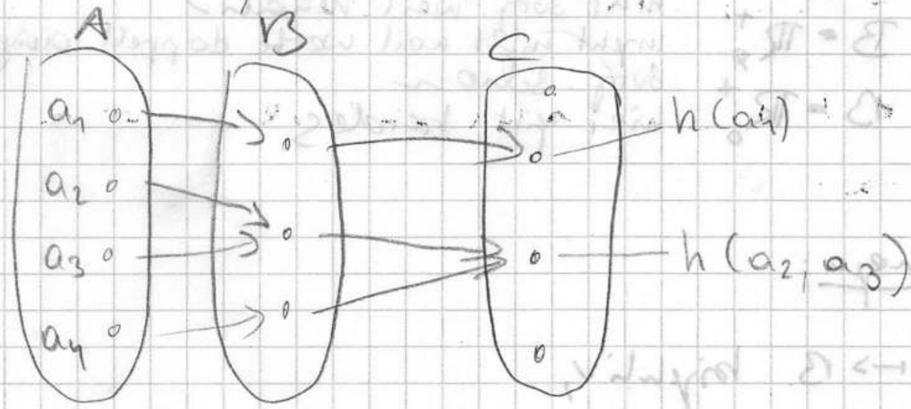
- Satz 1.67 $f: A \mapsto B$ $|A| = |B| \in \mathbb{N}$ so sind äquivalent (i) f ist injektiv
(ii) f ist surjektiv
(iii) f ist bijektiv

- Man nennt auch unendl. Mengen A, B gleich groß oder gleich mächtig i.Z. $A \sim B$ oder $|A| = |B|$ falls $\exists f: A \to B$ bijektiv
A heißt abzählbar falls $A \sim \mathbb{N}$
Es gilt: $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{Q} \not\sim \mathbb{R}$
mehr

vgl. Exkurs 27.10

Komposition oder Zusammensetzung $h = g \circ f$

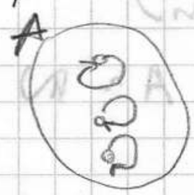
$$\left.\begin{array}{l} f: A \mapsto B \\ g: B \mapsto C \end{array}\right\} \text{Induziert } h: A \to C,\ a \mapsto g(f(a))$$



Satz 1.70:

f, g injektiv / surjektiv / bijektiv $\Rightarrow$ h injektiv / surjektiv / bijektiv

$\mathrm{id}_A: A \mapsto A,\ a \mapsto a$, also $\mathrm{id}_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$

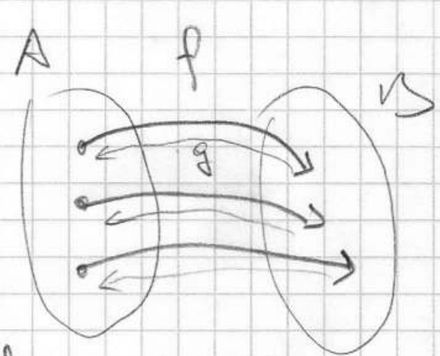


diese Fkt heißt identische Funktion

$g: B \mapsto A$ heißt zu $f: A \to B$ <u>inverse</u> Funktion, i.Z. $g = f^{-1}$

falls $g \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ g = \mathrm{id}_B$

da steht id bei B



bijektiv

SIEHE Satz 1.73