27.10.

1.3 Elementare Aussagenlogik (Seite 27)

Prinzip der zweiwertigen Logik...
Mathem. Aussagen haben einen eindeutigen Wahrheitswert (w = wahr, f = falsch) $\Rightarrow$ "zweiwertige Logik"

Junktor, Metaaussage

Junktoren: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ $\quad \Leftrightarrow$

Def. mittels Wahrheitswerttafeln

p	$\neg p$
w	f
f	w

wenn heute Sonntag $\Rightarrow$ morgen Mittwoch (w)

wenn heute Montag dann ist morgen Dienstag

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$\neg p$	$\neg q$
w	w	w	w	w	w	f	f
w	f	f	w	f	f	f	w
f	w	f	w	w	f	w	f
f	f	f	f	w	w	w	w

p	q	$\neg(p \wedge q)$	$(\neg p) \vee (\neg q)$	$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$	$p \wedge \neg p$
w	w	f	f	w	f
w	f	w	w	w	f
f	w	w	w	w	f
f	f	w	w	w	f

Semantische Äquivalenz

Tautologie $\rightarrow$ immer wahr

de Morgan'sche Gesetze

$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$

Kontradiktion (immer falsch)

Prädikatenlogik: zusätzl. Bestandteile

Die Tafel ist grün. | 4 ist eine gerade Zahl

- Prädikate (Eigenschaften) von einem od. auch mehreren Objekten

  $P_1(x)$ ..... x ist ein Mensch

  $P_2(x)$ .... x ist sterblich

  für alle x gilt, wenn $P_1(x)$ dann auch $P_2(x)$.

- Quantoren $\forall x$ .... "für alle x"

  $\exists x$ ... "es gibt (min) ein x"

  $\exists! x$ od. $\hat{\exists} x$ .... "... genau ein x"

Beispiele allg. gültiger Formeln Seite 29 x - xiii

klassisches Beispiel (Aristoteles)

$$\underbrace{(\forall x : P_1(x) \rightarrow P_2(x))}_{\text{"Alle Menschen sind sterblich."}} \wedge \underbrace{P_1(S)}_{\text{Sokrates ist ein Mensch}} \Rightarrow P_2(S)$$

Für die Mathematik sind Prädikate in mehreren Variablen ("mehrstellige Prädikate") unverzichtbar!

$$\exists x \ \forall y \quad Q(x,y) \overset{\text{Implikation}}{\Longrightarrow} \forall y \ \exists x \quad Q(x,y)$$

$$\not\Longleftarrow$$

vergl. $Q(x,y) \Leftrightarrow x < y$

1.4 Mengen

? Unvollständigkeitssatz von Gödel

Mengendefinition von Georg Cantor: (Def 1.38)

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung od. unseres Denkens zu einem Ganzen!

<u>Problem</u> (Russellklasse): $Ru := \{x \mid x \notin x\}$

$$Ru \in Ru \Leftrightarrow Ru \notin Ru$$

Äquivalenz zw. Aussage und ihrer Negation!

<u>Wichtiges über Mengen</u> Def 1.40, 1.41, 1.42

- Die Objekte x, welche in einer Menge A zusammengefasst sind, heißen Elemente der Menge symbolisch $x \in A$;
  $x \notin A$ für $\neg x \in A$
- Ist A eine Menge, so gilt für alle x entweder $x \in A$ oder $x \notin A$ (vergl. zweiwertige Logik), auch wenn sich das nicht immer entscheiden lässt.
- $\emptyset = \{\}$, <u>leere Menge</u> : $\forall x : x \notin \emptyset$
- $|A|$ oder $\#A$ bezeichnet die Anzahl der Elemente von A, genannt auch: Kardinalität oder Mächtigkeit von A. A ist endlich $\Leftrightarrow |A| \in \mathbb{N}$
  sonst unendlich zB: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

- A heißt Teilmenge von B, $A \subseteq B$,
falls: $\forall x : x \in A \rightarrow x \in B$

- $A = B$ falls $(\forall x : x \in A \leftrightarrow x \in B)$
oder auch $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
äquivalent

- Symb. Darstellung von Mengen:

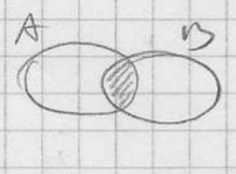
a) aufzählend, zB $A = \{1,2,3\}$
bedeutet: A hat die Elem. 1, 2, 3 sonst keine.

b) beschreibend: $A = \{x \mid P(x)\}$
besitzt als Elemente genau jene x, welche die Eigenschaft P haben.
zB. $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge 1 \leq x \leq 3\} = \{1,2,3\}$
$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 3\}$

- Multimenge (Verallgemeinerung)
Elemente dürfen mehrfach vorkommen
siehe Kombinatorik. zB. Seite 49

Mengenoperationen (Def 1.43, 44, 45, 47)

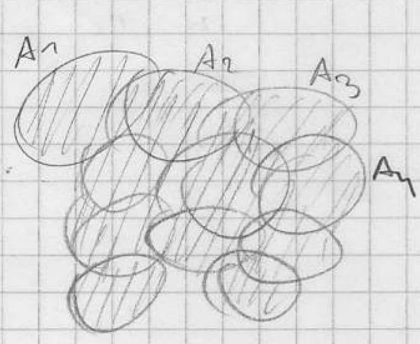
Vereinigung: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$



Durchschnitt: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

große Vereinigung:

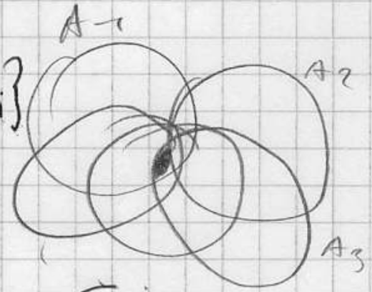
$\underbrace{A_i}_{\text{Menge}}$, $i \in I$, I heißt Indexmenge



$\bigcup_{i \in I} A_i \quad \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\}$

große Durchschnitt:

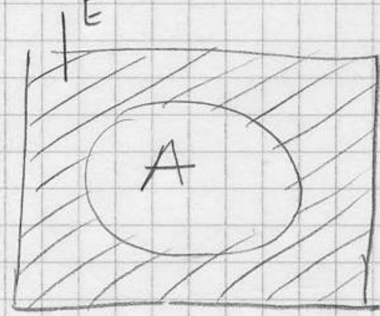
$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{ x \mid \forall i \in I : x \in A_i \}$$



Komplement:

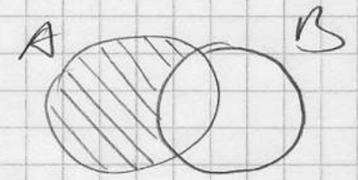
von A (bezogen auf ein "Universum" E)

$$A' = \{ x \in E \mid x \notin A \}$$



Mengendifferenz:

$$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$$



Symetrische Differenz:

$$A \triangle B = A \setminus B \cup B \setminus A$$

$$= A \cup B \setminus A \cap B$$

Bsp. einer Mengenidentität (vergl. 1.46)

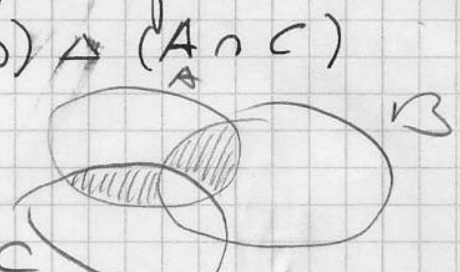
analog zur Tautologie

Beweis von Mengenidentitäten

a) durch Nachweis von $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

b) mittels Elementschaftstabellen, analog. Wahrheitstafel

zB $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$



	A	B	C	$B \triangle C$	$A \cap (B \triangle C)$	$A \cap B$
$\in$	w	w	w	f	$\notin$	$\in$
$\in$	w	w	f	w	$\in$	$\in$
$\in$	w	f	w	w	$\in$	$\notin$
$\in$	w	f	f	f	$\notin$	
$\notin$	f	w	w	f	$\notin$	
$\notin$	f	w	f	w	$\notin$	
$\notin$	f	f	w	w	$\notin$	
$\notin$	f	f	f	f	$\notin$	

$A \cap C$	$(A \cap B) \triangle (A \triangle C)$
$\in$	$\notin$
$\notin$	$\in$
$\in$	$\in$
$\notin$	$\notin$

stimmen überein $\Rightarrow$

Mengen sind gleich

Potenzmengen $P(A)$ von A

$P(A) = \{ C \mid C \subseteq A \}$ zB $P(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$3 \Rightarrow 8$ $\quad$ 2 4 8 16

Allg. gilt für endliche Mengen $\quad$ Satz 1.49

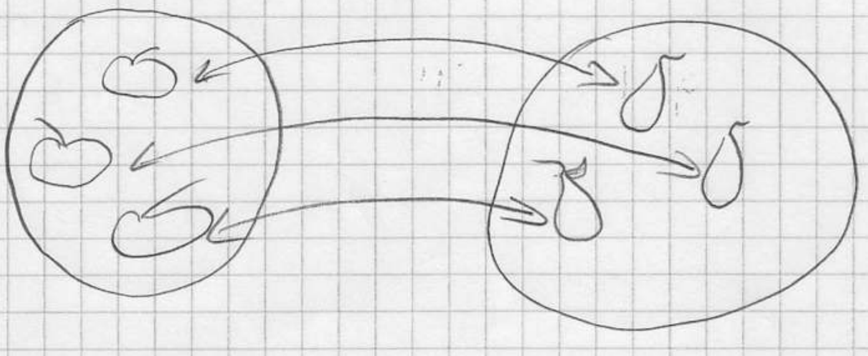
$$|P(A)| = 2^{|A|}$$

Verallgemeinerung für unendliche Mengen?

Exkurs übers Buch hinaus:

Beginn der eigentl. Mengenlehre bei Cantor:

$A =$



$= B$

$A \sim B$ oder $|A| = |B|$, A und B sind gleichmächtig, haben gleich viele Elemente

$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$

0	1	2	3	4	5	6
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
0	1	-1	2	-2	3	-3

Die Elemente von $\mathbb{Z}$ lassen sich durchnummerieren, $\mathbb{Z}$ ist abzählbar

$\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \{ 0 = \frac{0}{1} = \pm 1 = \frac{1}{1} = \pm 2 = \pm \frac{2}{1}, \pm\frac{1}{-1}, \left(\frac{\pm 2}{-2}\right),$$
$$\pm \frac{1}{3} \; \pm \frac{1}{4} \; \pm \frac{2}{3} \; \pm \frac{3}{2} \; \pm \frac{4}{1} \; \pm \frac{1}{5} \ldots \}$$

ist auch abzählbar

↓

stimmt nicht mehr bei reellen Zahlen

$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$

$\mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ ist <u>nicht</u> abzählbar,

denn zu jeder abzählbaren Liste L reeller Zahlen gibt es eine reelle Zahl, die in L nicht vorkommt.

<u>Beweis</u>: Seien $r_1, r_2, \ldots$ der Reihe nach jene Elemente der Liste, die zw. $\emptyset$ u. 1 liegen und in denen nur die Ziffern $\emptyset$ und 1 vorkommen.

$$r_1 = \emptyset, a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \ldots$$
$$r_2 = \emptyset, a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \ldots$$
$$\vdots$$
$$r = 0, a_1\, a_2\, a_3 \qquad \notin L$$

$$a_k \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \text{für } a_{kk} \begin{cases} 1 \\ \emptyset \end{cases}$$

$r \neq r_1$ bei erster Nachkommastelle usw.