MATHE VO

20.10.2009

$\boxed{\mathbb{N} \quad + \quad \cdot}$

RECHENREGELN (GESETZ)

- Kommutativität:

$$m+n = n+m \quad , \quad m \cdot n = n \cdot m$$

- Assoziativität:

$$m+(n+k) = (m+n)+k$$
$$m \cdot (n \cdot k) = (m \cdot n) \cdot k$$

- Distributivität: Verträglichkeit der Addition & Multipl.

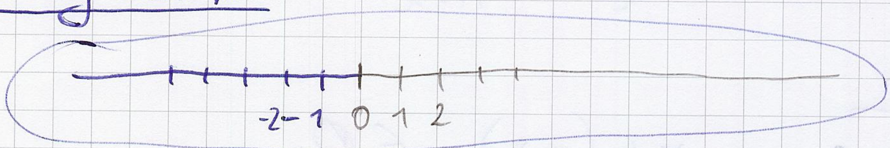
$$(m+n) \cdot k = m \cdot k + n \cdot k$$

- Existenz von neutralen Element

0 neutrales ϵ $+$: $n+0 = n$

1 neutrales ϵ $\cdot$: $n \cdot 1 = n$

Erweiterung der $\mathbb{N}$



$\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} = \{ \ldots, -2, -1, 0, 1, 2 \ldots \}$ zu jeder $\mathbb{N}$ ⇒ negative Zahl
↳ Subtraktion möglich

Bsp: $n + x = m$ in $\mathbb{N}$ nicht immer lösbar

$x = m - n$ "Differenz" ist in $\mathbb{N}$ nur definiert falls $m \geq n$

aber: in $\mathbb{Z}$ immer eindeutig lösbar

RATIONALE ZAHLEN

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

$$\boxed{n \cdot y = m}$$

in $\mathbb{N}$ nicht immer lösbar

$\underset{(\mathbb{Z})}{\mathbb{N}}$: falls Lösg. in $\underset{(\mathbb{Z})}{\mathbb{N}}$, dann n / m („n teilt m")

$$\boxed{y = \frac{m}{n}}$$

y = Quotient

RECHNEN IN $\mathbb{Q}$

- **Kehrwert** einer rationalen Zahl: $r = \frac{m}{n}$ mit $n \neq 0$

$$r^{-1} := \frac{1}{r} := \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$$

- **Addition** von $r = \frac{m}{n}$ und $s = \frac{k}{l} \in \mathbb{Q}$

$$r + s = \frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{ml + kn}{n \cdot l} \in \mathbb{Q}$$

- **Multiplikation**

$$r \cdot s = \frac{m}{n} \cdot \frac{k}{l} = \frac{m \cdot k}{n \cdot l} \in \mathbb{Q}$$

- **Subtraktion**

$$r - s := r + (-s) \in \mathbb{Q}$$

Das Negative einer rationalen Zahl: $-\frac{m}{n} := \frac{(-m)}{n}$

- **Division**

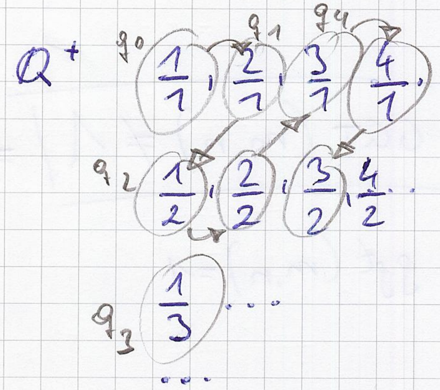
$$\underset{\frac{m}{n}}{\overset{\shortparallel}{r}} \in \mathbb{Q},\quad \underset{\frac{k}{l}}{\overset{\shortparallel}{s}} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$$

$$r : s = \frac{\frac{m}{n}}{\frac{k}{l}} = \frac{m \cdot l}{n \cdot k} \in \mathbb{Q}$$

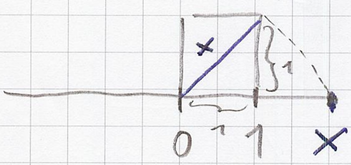
MATHE VO 20.10.2009

- $\mathbb{Q}$ ist abzählbar unendlich (Bijektion zw. $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$)

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$q_0 \quad q_1 \quad q_2$$



1. Cantorsche Diagonalisierungsverfahren — sicher stellt dass jede rationale Zahl enthalte



$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$1^2 + 1^2 = 2$$
$$\boxed{x^2 = 2}$$

Lösung dieser Gleichung: $\sqrt{2} = x$

keine rationale Zahl

INDIREKTER BEWEIS: Gegenteil angenommen

Satz $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl

Annahme: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

d.h. $\exists\, m, n \in \mathbb{N}$, sodass $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Wähle m und n so, dass sie ~~ungerade~~ teilerfremd sind. (Kürzen sofern möglich)

$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, $GGT(m,n) = 1$

$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$

$\sqrt{2} \cdot n = m \quad |$ Quadr.

$2n^2 = m^2 \Rightarrow 2$ teilt m^2

$\Downarrow$

2 teilt m d.h. $n = 2 \cdot k,\ k \in \mathbb{N}$

$\cancel{2}n^2 = (2k)^2 = \cancel{4}^{2}k^2$

$\Downarrow$

$\boxed{n^2 = 2k^2}$

$2 | n^2 \Rightarrow 2 | n$

$\Rightarrow$ n gerade, m gerade $\Rightarrow \boxed{GGT(m,n) \neq 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Widerspruch zur Voraussetzg. : $ggt(m,n) = 1$