MATHE VO 19.10.2009

Natürl. Zahlen

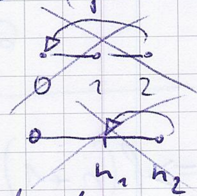
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \dots\}$

$\overset{\circ}{0}$ $\quad \overset{\circ}{n} \longrightarrow \overset{\circ}{n'} = n+1$ für jede natürliche Zahl gibt es einen Nachfolger

$\emptyset$ = natürl. Zahl

PEANO-Axiome

- 0 ist eine natürl. Zahl
- n natürl. Zahl $\Rightarrow$ n' ist natürl. Zahl (jede Zahl: Nachfolger)
- 0 = kein Nachfolger einer natürl. Zahl
- 2 verschiedene natürl. Zahlen:
  ↳ auch deren Nachfolger sind verschieden



- INDUKTIONSAXIOM

  $P(n)$

  Eigenschaft = Prädikat

  Falls: "0 hat diese Eigenschaft"

  $P(0)$ UND falls für jede nat. Zahl:

  falls n Eig. hat $\Rightarrow$ n + 1 besitzt die Eigenschaft

  $\Rightarrow$ alle nat. Zahlen besitzen die Eigenschaft

$$\Big(P(0) \wedge \big(\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \Rightarrow P(n+1)\big)\Big) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : P(n)$$

↳ Grundlage des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion

VOLLST. INDUKTION

Ind. anfang: $P(0)$ (= Ind. voraussetz.)

Ind. schritt (od. schluss): $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

~~Ind voraussetz.~~ Induktionsannahme

- **Bsp**

alle Zahlen von 0 bis n eingesetzt

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k\cdot(k+1)}{2} = \frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n}{6}$$ → durch vollst. Ind. zeigen

$$= \frac{0\cdot(0+1)}{2} + \frac{1(1+1)}{2} + \dots \frac{n(n+1)}{2}$$

$\boxed{P(0)}$ $$\sum_{n=0}^{0} \frac{k\cdot(k+1)}{2} = \frac{0(0+1)}{2} = 0$$ Ind. anfang

$$\frac{(0+2)(0+1)\cdot 0}{6} = 0$$

$\boxed{P(n) \Rightarrow P(n+1)}$

Voraussetz.: Formel gilt für n

zu zeigen: Formel gilt für n+1

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{k\cdot(k+1)}{2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k\cdot(k+1)}{2} + \frac{(n+1)\cdot(n+1+1)}{2} =$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)n}{6} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{6}\cdot(n+3) = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}$$

W.A. $\boxed{\checkmark}$

MATHE VO 19.10.2009

Ind. anfang (IA) verschieben: erst ab bestimmten Index

$P(n_0)$

$\forall n \geq n_0 : P(n) \Rightarrow P(n+1)$ für alle Zahlen ab n_0

typisch: Ungleichungen

Bsp $n^2 > 2n$ F.A.

$0^2 > 2 \cdot 1$ F.A.

$1^2 > 2 \cdot 2$ F.A.

$3^2 > 2 \cdot 3$ W.A.

$P(3)$: $9 = 3^2 > 2 \cdot 3 = 6$ ✓

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$:

Vor.: $n^2 > 2n$

Beh.: $(n+1)^2 > 2(n+1)$

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 > 2n + 2n + 1 = 2n + 2 + \underbrace{2n - 1}_{\geq 0 \text{ für alle } n \geq 1} \geq \boxed{2(n+1)}$$

VARIANTE:

beim Ind. Schluss auf alle vorhergehenden Zahlen zugreifen

(bisher: 0 geprüft, dann von $n \to n+1$)

$\forall k \leq n : P(k)$

alle vorhergehenden Zahlen

$\mathbb{N}$: geordnete Menge

↳ Aussage mögl.: $n < / = / > m$

lineare Ordnung

$n < m$: n vorher in der Aufzählung

$n \leq m$: kleiner oder = m

$(n<m) \vee (n=m)$

RECHNEN IN $\mathbb{N}$:

+ Addition: $\boxed{\begin{array}{l} n+0 = 0+n = n \\ n + \underbrace{k'}_{\text{Nachfolger}} = (n+k)' \end{array}}$ ← Definition

· Multiplikation

$$\boxed{\begin{array}{l} n \cdot 0 = 0 \cdot n = 0 \\ n \cdot \overset{(k+1)}{k'} = n \cdot k + n \end{array}}$$ ← Def.

Eigenschaften von + u. ·

Kommutativität: $m+n = n+m$

$m \cdot n = n \cdot m$