

Theoretische Informatik und Logik

Übungsblatt 6 (SS2009)

Lösungen

Aufgabe 6.1 Finden Sie Boolesche Ausdrücke über der Modellstruktur FamX, die folgendes ausdrücken. (Die Ausdrücke sollen nur die Variablensymbole \underline{x} und \underline{y} enthalten).

- a) \underline{x} ist eine Nichte von \underline{y} , wobei \underline{y} männlich ist;
- b) \underline{x} ist ein Sohn einer Großmutter von \underline{y} ;
- c) \underline{x} ist eine Cousine von \underline{y} .

Lösung *Anmerkung:* Es gibt jeweils auch alternative Lösungen zu den folgenden:

- a) $(\text{Onkel}(\underline{y}, \underline{x}) \wedge \text{weiblich}(\underline{x}))$
- b) Wenn man voraussetzt, dass sich das Prädikat *Onkel* nur auf die leiblichen Brüder der Mutter bzw. des Vaters einer Person bezieht, so gibt es eine sehr einfache Lösung:
 $(\underline{x} \equiv \text{Vater}(\underline{y}) \vee (\text{Onkel}(\underline{x}, \underline{y})))$.
 Allerdings wird auch der Ehemann einer Schwester meiner Mutter oder meines Vaters üblicherweise als mein Onkel bezeichnet. Daher wird folgende Lösung vorgeschlagen:
 $(\text{männlich}(\underline{x}) \wedge (\text{Mutter}(\underline{x}) \equiv \text{Mutter}(\text{Mutter}(\underline{y})) \vee \text{Mutter}(\underline{x}) \equiv \text{Mutter}(\text{Vater}(\underline{y}))))$
- c) $(\text{weiblich}(\underline{x}) \wedge (\text{Geschwister}(\text{Vater}(\underline{x}), \text{Vater}(\underline{y})) \vee (\text{Geschwister}(\text{Mutter}(\underline{x}), \text{Vater}(\underline{y})) \vee (\text{Geschwister}(\text{Vater}(\underline{x}), \text{Mutter}(\underline{y})) \vee (\text{Geschwister}(\text{Mutter}(\underline{x}), \text{Mutter}(\underline{y})))))))$

Aufgabe 6.2 Es sei $\pi = \text{while } (\underline{x} \neq \underline{y}) \text{ do begin } \underline{x} \leftarrow (\underline{x} - 1); \underline{y} \leftarrow 0 \text{ end}$

- a) Zeigen Sie schrittweise, dass $\pi \in ALI$.
- b) Berechnen Sie $\mathcal{M}_{AL}(I, \pi)$, wobei $I(\underline{x}) = 1$ und $I(\underline{y}) = 0$.

Lösung

- a) Syntaktische ('bottom up')-Analyse von π :
 - $\underline{x}, \underline{y} \in IVS \xrightarrow{BA1} \equiv (\underline{x}, \underline{y}) \in \mathcal{BA}(\mathbb{Z}) \xrightarrow{BA2} (\underline{x} \neq \underline{y}) \in \mathcal{BA}(\mathbb{Z})$, da $(\underline{x} \neq \underline{y})$ für $\neg \equiv (\underline{x}, \underline{y})$ steht
 - $\underline{x} \in IVS, (\underline{x} - 1) \in \mathcal{T}(\mathbb{Z}) \xrightarrow{AL1} \alpha_1 = \underline{x} \leftarrow (\underline{x} - 1) \in ALI$
 - $\underline{y} \in IVS, 0 \in \mathcal{T}(\mathbb{Z}) \xrightarrow{AL1} \alpha_2 = \underline{y} \leftarrow 0 \in ALI$
 - $\alpha_1, \alpha_2 \in AL \xrightarrow{AL2} \beta = \text{begin } \alpha_1; \alpha_2 \text{ end} \in ALI$
 - $(\underline{x} \neq \underline{y}) \in \mathcal{BA}(\mathbb{Z}), \beta \in ALI \xrightarrow{AL4} \pi = \text{while } (\underline{x} \neq \underline{y}) \text{ do } \beta \in ALI$

- b) Semantische Analyse, sprich: Auswertung von π in der Variablenbelegung I (unter Verwendung der Abkürzungen $\alpha_1, \alpha_2, \beta, \pi$ wie oben vereinbart):

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{AL}(I, \pi) &= \mathcal{M}_{AL}(I, \text{while } (\underline{x} \neq \underline{y}) \text{ do } \beta) \\
&\quad \left[\mathcal{M}_{BA}(I, (\underline{x} \neq \underline{y})) = (\mathcal{M}_T(I, \underline{x}) \neq \mathcal{M}_T(I, \underline{y})) = (1 \neq 0) = \mathbf{t} \right] \\
&\stackrel{MAL4}{=} \mathcal{M}_{AL}(\mathcal{M}_{AL}(I, \beta), \text{while } (\underline{x} \neq \underline{y}) \text{ do } \beta) \\
&\stackrel{MAL2}{=} \mathcal{M}_{AL}(\mathcal{M}_{AL}(\mathcal{M}_{AL}(I, \alpha_1), \alpha_2), \text{while } (\underline{x} \neq \underline{y}) \text{ do } \beta) \\
&\stackrel{MAL1}{=} \mathcal{M}_{AL}(\mathcal{M}_{AL}(I', \alpha_2), \text{while } (\underline{x} \neq \underline{y}) \text{ do } \beta) \\
&\quad \text{wobei } I'(\underline{x}) = \mathcal{M}_T(I, (\underline{x} - \underline{1})) = \mathcal{M}_T(I, \underline{x}) - \mathcal{M}_T(I, \underline{1}) \\
&\quad \quad = I(\underline{x}) - 1 = 1 - 1 = 0 \\
&\quad \quad I'(v) = I(v) \text{ für } v \neq \underline{x} \\
&\stackrel{MAL1}{=} \mathcal{M}_{AL}(I'', \text{while } (\underline{x} \neq \underline{y}) \text{ do } \beta) \\
&\quad \text{wobei } I''(\underline{y}) = \mathcal{M}_T(I, \underline{0}) = 0 \\
&\quad \quad I''(v) = I'(v) \text{ für } v \neq \underline{y} \\
&\quad \left[\mathcal{M}_{BA}(I'', (\underline{x} \neq \underline{y})) = (\mathcal{M}_T(I'', \underline{x}) \neq \mathcal{M}_T(I'', \underline{y})) = (I''(\underline{x}) \neq I''(\underline{y})) \right. \\
&\quad \quad \quad \left. = (I'(\underline{x}) \neq 0) = (0 \neq 0) = \mathbf{f} \right] \\
&\stackrel{MAL4}{=} I'', \text{ wobei } I''(\underline{x}) = 0 \text{ und } I''(\underline{y}) = 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 6.3 Erweitern Sie die Programmiersprache *ALI* um eine repeat-Schleife. Genauer: Spezifizieren Sie in Ergänzung von Definition 2.17 des Vorlesungsskriptums eine Bedingung (AL5) zur Festlegung der Syntax und in Ergänzung von Definition 2.20 eine entsprechende Bedingung (MAL5) zur Festlegung der Semantik der üblichen repeat-Schleifenkonstruktion.

Lösung

(AL5) Ist $B \in \mathcal{BA}(\mathbb{Z})$ und $\alpha \in ALI$, dann ist repeat α until $B \in ALI$.

$$\begin{aligned}
(MAL5) \quad \mathcal{M}_{AL}(I, \text{repeat } \alpha \text{ until } B) &= \begin{cases} \mathcal{M}_{AL}(I, \alpha) & \text{für } w = \mathbf{t} \\ \mathcal{M}_{AL}(\mathcal{M}_{AL}(I, \alpha), \text{repeat } \alpha \text{ until } B) & \text{für } w = \mathbf{f} \end{cases} \\
&\quad \text{wobei } w \text{ eine Abkürzungen für } \mathcal{M}_{BA}(\mathcal{M}_{AL}(I, \alpha), B) \text{ ist.}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6.4 Bestimmen Sie für folgende Formeln durch Angabe des Wahrheitswertverlaufs, ob sie gültig, erfüllbar, widerlegbar, bzw. unerfüllbar sind. Geben Sie, wo möglich, jeweils ein Modell bzw. ein Gegenbeispiel an.

- $(A \supset (B \vee C)) \supset ((A \vee B) \equiv (A \vee C))$
- $(B \supset \neg A) \downarrow (\neg A \supset B)$
- $A \subset (B \wedge ((C \supset \mathbf{f}) \downarrow A))$

Lösung

- Wir verwenden die Abkürzungen $F = (A \supset (B \vee C)) \supset ((A \vee B) \equiv (A \vee C))$ sowie $G = (A \vee B) \equiv (A \vee C)$.

A	B	C	$B \vee C$	$A \supset (B \vee C)$	$A \vee B$	$A \vee C$	G	F
f	f	f	f	t	f	f	t	t
f	f	t	t	t	f	t	f	f
f	t	f	t	t	t	f	f	f
f	t	t	t	t	t	t	t	t
t	f	f	f	f	t	t	t	t
t	f	t	t	t	t	t	t	t
t	t	f	t	t	t	t	t	t
t	t	t	t	t	t	t	t	t

Die Formel ist also sowohl erfüllbar als auch widerlegbar, daher weder gültig noch unerfüllbar. Die zweite und die dritte Zeile der Tabelle liefern Gegenbeispiele. Z.B., ist F unter I mit $I(A) = \mathbf{f}$, $I(B) = \mathbf{f}$ und $I(C) = \mathbf{t}$ falsch. Alle anderen Interpretationen, z.B. I' mit $I'(A) = \mathbf{f}$, $I'(B) = \mathbf{f}$ und $I'(C) = \mathbf{f}$, sind Modelle von F .

- b) Wir verwenden die Abkürzung $F = (B \supset \neg A) \downarrow (\neg A \supset B)$.

A	B	$\neg A$	$B \supset \neg A$	$\neg A \supset B$	F
\mathbf{f}	\mathbf{f}	\mathbf{t}	\mathbf{t}	\mathbf{f}	\mathbf{f}
\mathbf{f}	\mathbf{t}	\mathbf{t}	\mathbf{t}	\mathbf{t}	\mathbf{f}
\mathbf{t}	\mathbf{f}	\mathbf{f}	\mathbf{t}	\mathbf{t}	\mathbf{f}
\mathbf{t}	\mathbf{t}	\mathbf{f}	\mathbf{f}	\mathbf{t}	\mathbf{f}

Die Formel ist also unerfüllbar und damit auch widerlegbar, aber weder erfüllbar noch gültig. Es gibt demnach keine Modelle, sondern jede Interpretation ist ein Gegenbeispiel für F , z.B. I mit $I(A) = \mathbf{t}$, $I(B) = \mathbf{t}$.

- c) Wir verwenden die Abkürzungen $F = A \subset (B \wedge ((C \supset \mathbf{f}) \downarrow A))$ und $G = (C \supset \mathbf{f}) \downarrow A$.

A	B	C	$C \supset \mathbf{f}$	G	$B \wedge G$	F
\mathbf{f}	\mathbf{f}	\mathbf{f}	\mathbf{t}	\mathbf{f}	\mathbf{f}	\mathbf{t}
\mathbf{f}	\mathbf{f}	\mathbf{t}	\mathbf{f}	\mathbf{t}	\mathbf{f}	\mathbf{t}
\mathbf{f}	\mathbf{t}	\mathbf{f}	\mathbf{t}	\mathbf{f}	\mathbf{f}	\mathbf{t}
\mathbf{f}	\mathbf{t}	\mathbf{t}	\mathbf{f}	\mathbf{t}	\mathbf{t}	\mathbf{f}
\mathbf{t}	\mathbf{f}	\mathbf{f}	\mathbf{t}	\mathbf{f}	\mathbf{f}	\mathbf{t}
\mathbf{t}	\mathbf{f}	\mathbf{t}	\mathbf{f}	\mathbf{f}	\mathbf{f}	\mathbf{t}
\mathbf{t}	\mathbf{t}	\mathbf{f}	\mathbf{t}	\mathbf{f}	\mathbf{f}	\mathbf{t}
\mathbf{t}	\mathbf{t}	\mathbf{t}	\mathbf{f}	\mathbf{f}	\mathbf{f}	\mathbf{t}

Die Formel ist also sowohl erfüllbar als auch widerlegbar, daher weder gültig noch unerfüllbar. Die vierte Zeile der Tabelle liefert das Gegenbeispiel I mit $I(A) = \mathbf{f}$, $I(B) = \mathbf{t}$ und $I(C) = \mathbf{t}$. Alle anderen Interpretationen, z.B. I' mit $I'(A) = \mathbf{f}$, $I'(B) = \mathbf{f}$ und $I'(C) = \mathbf{f}$, sind Modelle.

Aufgabe 6.5 Zeigen Sie, dass folgende Formeln H_1 , H_2 , H_3 paarweise äquivalent sind. Verwenden Sie dazu Satz 3.23 und Folgerung 3.25 aus dem Vorlesungsskriptum.

$$H_1 = \neg((A \vee (C \supset B)) \downarrow (E \wedge \neg F))$$

$$H_2 = (E \wedge \neg F) \vee (A \vee (C \supset B))$$

$$H_3 = \neg(E \wedge \neg F) \supset (A \vee (C \supset B))$$

Lösung Es sei σ die Substitution $[^{A \vee (C \supset B)}_A \ ^{E \wedge \neg F}_B]$, sowie $F_1 = \neg(A \downarrow B)$, $F_2 = B \vee A$ und $F_3 = \neg B \supset A$. Dann gilt $H_i = F_i \sigma$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$. Laut Satz 3.23 und Folgerung 3.25 genügt es daher, die paarweise Äquivalenz von F_1 , F_2 und F_3 zu zeigen. Diese läßt sich unmittelbar aus folgender Wahrheitstabelle ablesen:

A	B	$\neg(A \downarrow B)$	$B \vee A$	$\neg B \supset A$	$F_1 \equiv F_2$	$F_1 \equiv F_3$	$F_2 \equiv F_3$
\mathbf{f}	\mathbf{f}	\mathbf{f}	\mathbf{f}	\mathbf{f}	\mathbf{t}	\mathbf{t}	\mathbf{t}
\mathbf{f}	\mathbf{t}	\mathbf{t}	\mathbf{t}	\mathbf{t}	\mathbf{t}	\mathbf{t}	\mathbf{t}
\mathbf{t}	\mathbf{f}	\mathbf{t}	\mathbf{t}	\mathbf{t}	\mathbf{t}	\mathbf{t}	\mathbf{t}
\mathbf{t}	\mathbf{t}	\mathbf{t}	\mathbf{t}	\mathbf{t}	\mathbf{t}	\mathbf{t}	\mathbf{t}