

Theoretische Informatik und Logik

Übungsblatt 4 (SS 2009)

Lösungen

Aufgabe 4.1 Gegeben sei der NEA $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$. Geben Sie die entsprechende reguläre Grammatik G an.

Lösung $G = \langle N, T, P, S \rangle$ mit $N = Q$, $T = \Sigma$, $S = q_0$ und $P = \{p \rightarrow aq \mid \delta(p, a) = q\} \cup \{p \rightarrow \varepsilon \mid p \in F\}$.

Aufgabe 4.2 Geben Sie für jede der folgenden Grammatiken und die von der jeweiligen Grammatik erzeugte Sprache an, ob sie regulär, kontextfrei und/oder monoton ist:

1. $G_1 = \langle \{A, B\}, \{\underline{a}, \underline{b}\}, \{A \rightarrow \underline{a}B, B \rightarrow \underline{b}A, A \rightarrow \varepsilon\}, A \rangle$
2. $G_2 = \langle \{A, B\}, \{\underline{0}, \underline{1}\}, \{A \rightarrow \underline{0}B, B \rightarrow A\underline{1}, A \rightarrow \underline{1}\}, A \rangle$

Lösung

1. G_1 ist eine reguläre, und somit auch kontextfreie Grammatik. G_1 ist jedoch nicht monoton, da in einer monotonen Grammatik $A \rightarrow \varepsilon$ nicht erlaubt wäre, nachdem das Startsymbol A auch auf der rechten Seite einer Produktion ($B \rightarrow \underline{b}A$) vorkommt.

$\mathcal{L}(G_1)$, nachdem von einer regulären Grammatik erzeugt, ist sicher regulär und somit nach der Chomsky-Hierarchie auch kontextfrei und monoton.

(Bemerkung: $\mathcal{L}(G_1) = \{\underline{a}\underline{b}\}^*$.)

2. G_2 ist eine kontextfreie und monotone Grammatik. (Wegen der Produktionen $B \rightarrow A\underline{1}$ und $A \rightarrow \underline{1}$ ist G_2 nicht regulär.)

$\mathcal{L}(G_2) = \{\underline{0}^n \underline{1}^{n+1} \mid n \geq 0\}$ ist keine reguläre, aber eine kontextfreie, und somit auch monotone Sprache.

(Bemerkung: Dass $\mathcal{L}(G_2)$ nicht regulär ist, kann man z.B. mittels einer gsm-Abbildung auf $\{\underline{0}^n \underline{1}^n \mid n \geq 0\}$ beweisen.)

Insgesamt erhalten wir also:

	regulär	kontextfrei	monoton
G_1	×	×	
$\mathcal{L}(G_1)$	×	×	×
G_2		×	×
$\mathcal{L}(G_2)$		×	×

Aufgabe 4.3 Sei $L = \{w \in \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{3}\}^+ \mid |w|_{\underline{0}} = 2|w|_{\underline{1}} = 3|w|_{\underline{2}} = 6|w|_{\underline{3}}\}$.

Zeigen Sie durch Reduktion auf die Sprache $\{\underline{a}^{6n} \underline{b}^{6n} \underline{c}^{6n} \mid n \geq 1\}$, dass L nicht kontextfrei ist.

Lösung Es gibt mehrere Möglichkeiten, auf die Sprache $\{\underline{a}^{6n} \underline{b}^{6n} \underline{c}^{6n} \mid n \geq 1\}$ zu reduzieren.

Eine ist es, eine deterministische gsm zu konstruieren:

$M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{3}\}, \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}, \delta, q_0, \{q_2\})$,

$\delta(q_0, \underline{0}) = (q_0, \underline{a})$, $\delta(q_0, \underline{1}) = \delta(q_1, \underline{1}) = (q_1, \underline{b}^2)$, $\delta(q_1, \underline{2}) = \delta(q_2, \underline{2}) = (q_2, \underline{c}^3)$, $\delta(q_2, \underline{3}) = (q_2, \varepsilon)$.

Alternativ kann man, da die Familie der kontextfreien Sprachen gegenüber Durchschnitt mit regulären Sprachen abgeschlossen sind, den Durchschnitt $L \cap \{\underline{0}\}^+ \{\underline{1}\}^+ \{\underline{2}\}^+ \{\underline{3}\}^+ = \{\underline{0}^{6n} \underline{1}^{3n} \underline{2}^{2n} \underline{3}^n \mid n \geq 1\}$ bilden und mit einem Homomorphismus h mit $h(\underline{0}) = \underline{a}$, $h(\underline{1}) = \underline{b}^2$, $h(\underline{2}) = \underline{c}^3$ und $h(\underline{3}) = \varepsilon$ auf $\{\underline{a}^{6n} \underline{b}^{6n} \underline{c}^{6n} \mid n \geq 1\}$ abbilden.

Aufgabe 4.4 Geben Sie ein D0L-System für *eine der* beiden folgenden Sprachen an:

- a) $L_1 = \{\underline{a}^{4^n} \underline{b}^{2009} \underline{a}^{4^n} \mid n \geq 0\}$
 b) $L_2 = \{\underline{0}^{2^n} \underline{1}^{4^n} \underline{2}^{6^n} \underline{3}^{9^n} \mid n \geq 0\}$

Lösung

- a) $G_1 = \langle \{\underline{a}, \underline{b}\}, \{\underline{a} \rightarrow \underline{a}^4, \underline{b} \rightarrow \underline{b}\}, \underline{ab}^{2009} \underline{a} \rangle$
 b) $G_2 = \langle \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{3}\}, \{\underline{0} \rightarrow \underline{0}^2, \underline{1} \rightarrow \underline{1}^4, \underline{2} \rightarrow \underline{2}^6, \underline{3} \rightarrow \underline{3}^9\}, \underline{0123} \rangle$

Aufgabe 4.5 Geben Sie für *beide* Sprachen aus Aufgabe 4.4 einen Homomorphismus oder eine gsm an, welche(r) als Ergebnis die Sprache $\{\underline{a}^{k^n} \mid n \geq 0\}$ für ein $k \geq 2$ liefert. Ist ein Homomorphismus möglich, so ist nur dieser eine zulässige Lösung!

Lösung

- a) Hier kann kein Homomorphismus verwendet werden, da \underline{a} abhängig von der Position unterschiedlich behandelt werden muss. Wir konstruieren daher eine gsm
 $M = \langle \{q_0, q_1\}, \{\underline{a}, \underline{b}\}, \{\underline{a}\}, \delta, q_0, \{q_1\} \rangle$ mit
 $\delta(q_0, \underline{a}) = (q_0, \underline{a}), \delta(q_0, \underline{b}) = \delta(q_1, \underline{b}) = \delta(q_1, \underline{a}) = (q_1, \varepsilon),$
 die L_1 auf $\{\underline{a}^{4^n} \mid n \geq 0\}$ abbildet.
- b) Hier kann ein Homomorphismus verwendet werden, etwa $h(\underline{0}) = \underline{a}$ und $h(\underline{1}) = h(\underline{2}) = h(\underline{3}) = \varepsilon$, der L_2 auf $\{\underline{a}^{2^n} \mid n \geq 0\}$ abbildet.

Zusatzbeispiel Sie werden in der Übung ein Beispiel erhalten, für das Sie 10 Minuten Zeit haben. Das Beispiel ist alleine zu bearbeiten; als Unterlage ist lediglich das Skriptum gestattet.

Es hat dabei die Form einer Aussage, die Sie als richtig oder falsch klassifizieren müssen, außerdem müssen Sie Ihre Wahl begründen.

Die Teilnahme ist freiwillig, für falsche oder fehlende Antworten gibt es keinen Abzug. Sie können jedoch bis zu vier Bonuspunkte für eine korrekte Antwort mit korrekter Begründung erhalten.