

# Theoretische Informatik und Logik

## Übungsblatt 5 (SS 2009)

### Lösungen

**Aufgabe 5.1** Definieren Sie eine deterministische Turingmaschine, welche die Sprache

$$L = \{\underline{a}^{n+m} \equiv \underline{a}^n \pm \underline{a}^m \mid m, n \geq 1\}$$

akzeptiert und die Kellerautomatenbedingung erfüllt (s. Definition 1.122 auf Seite 70 im Skriptum).

**Lösung**

$$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{\underline{a}, \pm, \equiv\}, \{Z_0, A\}, \delta, p, \{Z_0, Z_1, Z_2\}, B, \{q_3\})$$

mit

$\delta(q_0, \underline{a}, B) = (q_0, A, R, R)$ : für jedes eingelesene Symbol  $\underline{a}$  merke ein Symbol  $A$  im „Keller“ (d.h., auf dem Arbeitsband);

$\delta(q_0, \equiv, B) = (q_0, B, R, L)$ : wenn Symbol  $\equiv$  kommt, gehe nach links auf das erste Symbol  $A$  im „Keller“; ein zweites Symbol  $\equiv$  kann somit nicht verarbeitet werden;

$\delta(q_0, \underline{a}, A) = (q_1, B, R, L)$ : wenn erstes Symbol  $\underline{a}$  nach  $\equiv$  kommt, wechsele den Zustand, um „Keller“ wieder abzubauen; mindestens dieses eine Symbol  $\underline{a}$  muss vorkommen;

$\delta(q_1, \underline{a}, A) = (q_1, B, R, L)$ : für jedes eingelesene Symbol  $\underline{a}$  wird ein Symbol  $A$  im „Keller“ gelöscht;

$\delta(q_1, \pm, A) = (q_2, A, R, S)$ : beim Lesen von Symbol  $\pm$  wechsele in den Zustand  $q_2$ ;

$\delta(q_2, \underline{a}, A) = (q_2, B, R, L)$ : für jedes eingelesene Symbol  $\underline{a}$  wird ein Symbol  $A$  im „Keller“ gelöscht;

$\delta(q_2, Z_2, Z_0) = (q_3, Z_0, S, R)$ : wird „Kellergrundsymbol“, also das linke Begrenzungssymbol  $Z_0$  auf dem Arbeitsband, gleichzeitig mit dem Endsymboll  $Z_2$  auf dem Eingabeband erreicht, dann gehe in den Endzustand  $q_3$  über und akzeptiere die Eingabe.

**Aufgabe 5.2** Geben Sie eine Matrixgrammatik (ohne ac) mit erweitert regulären Produktionen, also Produktionen der Gestalt  $A \longrightarrow wC$ ,  $A \longrightarrow w$  für  $A, C \in N$  und  $w \in T^*$ , für *eine der* beiden folgenden Sprachen an:

a)  $L_1 = \{\underline{0}^{3n} \underline{1}^{2009} \underline{0}^{3n} \mid n \geq 0\}$

b)  $L_2 = \{\underline{0}^{5n} \underline{1}^{6n} \underline{2}^{7n} \underline{3}^{8n} \mid n \geq 0\}$

**Lösung**

a)  $G_1 = (\{A, B\}, \{\underline{0}, \underline{1}\}, \{[A \rightarrow \underline{0}^3 A, B \rightarrow \underline{0}^3 B], [A \rightarrow \varepsilon, B \rightarrow \varepsilon]\}, A \underline{1}^{2009} B)$

b)  $G_2 = (\{A, B, C, D\}, \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{3}\}, \{[A \rightarrow \underline{0}^5 A, B \rightarrow \underline{1}^6 B, C \rightarrow \underline{2}^7 C, D \rightarrow \underline{3}^8 D], [A \rightarrow \varepsilon, B \rightarrow \varepsilon, C \rightarrow \varepsilon, D \rightarrow \varepsilon]\}, ABCD)$

**Aufgabe 5.3** Geben Sie für *beide* Sprachen aus Aufgabe 5.2 einen Homomorphismus oder eine gsm an, der die Sprache auf eine aus dem Skriptum oder der Vorlesung bekannte nicht reguläre ( $L_1$ ) oder nicht kontextfreie ( $L_2$ ) abbildet. Ist ein Homomorphismus möglich, so ist nur dieser eine zulässige Lösung!

**Lösung**

a) Hier kann kein Homomorphismus verwendet werden, da  $\underline{0}$  abhängig von der Position unterschiedlich behandelt werden muss.

Wir konstruieren daher eine gsm  $M = \langle \{q_0, q_1\}, \{\underline{0}, \underline{1}\}, \{\underline{a}, \underline{b}\}, \delta, q_0, \{q_1\} \rangle$  mit

$\delta(q_0, \underline{0}) = (q_0, \underline{a})$ ,  $\delta(q_0, \underline{1}) = \delta(q_1, \underline{1}) = (q_1, \varepsilon)$ ,  $\delta(q_1, \underline{0}) = (q_1, \underline{b})$ , die

$L_1$  auf  $\{\underline{a}^{3n} \underline{b}^{3n} \mid n \geq 0\}$  abbildet.

- b) Hier kann ein Homomorphismus  $h(\underline{0}) = \underline{a}$ ,  $h(\underline{1}) = \underline{b}$ ,  $h(\underline{2}) = \underline{c}$  und  $h(\underline{3}) = \varepsilon$  verwendet werden, der  $L_2$  auf  $\{\underline{a}^{5n}\underline{b}^{6n}\underline{c}^{7n} \mid n \geq 0\}$  abbildet.

**Aufgabe 5.4** Berechnen Sie schrittweise den Wert *einer der* folgenden Terme über der Modellstruktur  $\mathbb{N}$  in der Variablenbelegung  $I$ , wobei  $I(\underline{x}) = 1$ ,  $I(\underline{y}) = 2$ :

- a)  $\underline{\dot{+}}(\underline{+}(\underline{x}, \underline{1}), \underline{y})$   
b)  $\underline{+}(\underline{x}, \underline{-}(\underline{y}, \underline{1}))$

Geben Sie die jeweils relevanten Klauseln (MT1/MT2/MT3) der Definition von  $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}$  an. Achten Sie auf korrekte Unterstreichungen.

### Lösung

- a) Es gibt verschiedene Auswertungsketten, die jeweils zum selben Wert führen. Es folgt ein Beispiel.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, \underline{\dot{+}}(\underline{+}(\underline{x}, \underline{1}), \underline{y})) &\stackrel{MT3}{=} \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, \underline{+}(\underline{x}, \underline{1})) \dot{-} \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, \underline{y}) \\ &\stackrel{MT3}{=} (\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, \underline{x}) + \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, \underline{1})) \dot{-} \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, \underline{y}) \\ &\stackrel{MT1}{=} (\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, \underline{x}) + \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, \underline{1})) \dot{-} I(\underline{y}) \\ &= (\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, \underline{x}) + \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, \underline{1})) \dot{-} 2 \\ &\stackrel{MT2}{=} (\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, \underline{x}) + 1) \dot{-} 3 \\ &\stackrel{MT1}{=} (1 + 1) \dot{-} 2 \\ &= 2 \dot{-} 2 = 0 \end{aligned}$$

- b) Es gibt wieder verschiedene Auswertungsketten. Es folgt ein Beispiel.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, \underline{+}(\underline{x}, \underline{-}(\underline{y}, \underline{1}))) &\stackrel{MT3}{=} \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, \underline{x}) + \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, \underline{-}(\underline{y}, \underline{1})) \\ &\stackrel{MT1}{=} I(\underline{x}) + \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, \underline{-}(\underline{y}, \underline{1})) \\ &= 1 + \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, \underline{-}(\underline{y}, \underline{1})) \\ &\stackrel{MT3}{=} 1 + (\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, \underline{y}) - \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, \underline{1})) \\ &\stackrel{MT2}{=} 1 + (\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, \underline{y}) - 1) \\ &\stackrel{MT1}{=} 1 + (I(\underline{y}) - 1) \\ &= 1 + (2 - 1) = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

**Aufgabe 5.5** Erklären Sie alle Fehler im folgenden Auswertungsversuch des Booleschen Ausdrucks  $B = (\underline{2} \geq \underline{x} \dot{-} \underline{2}) \wedge \underline{x} \neq \underline{y}$  über  $\mathbb{N}$  in der Variablenbelegung  $I$  mit  $I(\underline{x}) = 1$  und  $I(\underline{y}) = 2$ :

„ $B$  lautet in offizieller Syntax  $(\underline{\leq}(\underline{\dot{-}}(\underline{x}, \underline{2}), \underline{2}) \wedge \underline{\equiv}(\underline{x}, \underline{y}))$ .

$$\mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I, B) \stackrel{MBA3}{=} \mathbf{t} \quad \text{falls } \mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I, (\underline{2} \leq (\underline{x} \dot{-} \underline{2}))) = \mathbf{t} \text{ oder } \mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I, \underline{\sqsupset}(\underline{x} \equiv \underline{y})) = \mathbf{t}$$

Wir werten zunächst  $\mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I, \underline{\sqsupset}(\underline{x} \equiv \underline{y}))$  aus:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I, \underline{\sqsupset}(\underline{x} \equiv \underline{y})) &\stackrel{MBA3}{=} \begin{cases} \mathbf{t} & \text{falls } \mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I, (\underline{x} \equiv \underline{y})) = \mathbf{f} \\ \mathbf{f} & \text{sonst} \end{cases} \\ &\stackrel{MBA1}{=} (\mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I, \underline{x}) \neq \mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I, \underline{y})) \\ &\stackrel{MBA2}{=} (I(\underline{x}) \neq I(\underline{y})) \\ &\stackrel{MT1}{=} \mathbf{f} \text{ da } \underline{1} \neq \underline{2} \end{aligned}$$

Da  $\mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I, \underline{\sqsupset}(\underline{x} \equiv \underline{y})) = \mathbf{f}$  müssen wir  $\mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I, (\underline{2} \geq \underline{x} \dot{-} \underline{2}))$  nicht mehr auswerten. Wegen MBA3 erhalten wir  $\mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I, B) = \mathbf{f}$ .

**Lösung** Tatsächlich lautet  $B$  in offizieller Syntax  $(\leq(\underline{\dot{2}}(\underline{x}, \underline{2}), \underline{2}) \wedge \neg \equiv(\underline{x}, \underline{y}))$ , wie angegeben. Allerdings hat die Modellstruktur  $\mathbb{N}$  nur die Konstanten  $\bar{0}$  und  $\bar{1}$ . Es gibt daher auch kein Konstantensymbol  $\underline{2}$ . Wir gehen aber im folgenden von der zusätzlichen, naheliegenden Vereinbarung  $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, \underline{2}) = \bar{2}$  aus.

Die folgende Zeile enthält vier weitere Fehler:

$$“\mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I, B) \stackrel{MBA3}{=} \mathbf{t} \quad \text{falls } \mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I, (2 \leq (\underline{x} \dot{\leq} \underline{2}))) = \mathbf{t} \text{ oder } \mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I, \neg(\underline{x} \equiv \underline{y})) = \mathbf{t}”$$

- Gemäß MBA3 muss es “und” statt “oder” heißen.
- Die beiden Vorkommen von “2” sind auf der syntaktischen, objektsprachlichen Ebene und gehören daher unterstrichen.
- Die Argumente in “ $(2 \leq (\underline{x} \dot{\leq} \underline{2}))$ ” sind vertauscht. Es müsste “ $((\underline{x} \dot{\leq} \underline{2}) \leq \underline{2})$ ” oder, alternativ, “ $\leq(\underline{\dot{2}}(\underline{x}, \underline{2}), \underline{2})$ ” heißen.
- Die letzte Klammer der Zeile ist auf der metasprachlichen und nicht auf der objektsprachlichen Ebene und gehört folglich nicht unterstrichen.

Die weitere Auswertung kann tatsächlich mit “ $\mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I, \neg(\underline{x} \equiv \underline{y}))$ ” beginnen. In der Zeile

$$“\mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I, \neg(\underline{x} \equiv \underline{y})) \stackrel{MBA3}{=} \begin{cases} \mathbf{t} & \text{falls } \mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I, (\underline{x} \equiv \underline{y})) = \mathbf{f} \\ \mathbf{f} & \text{sonst} \end{cases}”$$

gehören alle Vorkommen von “x” und “y” unterstrichen, da diese Individuenvariablensymbole sein sollen. Außerdem wurde nicht MBA3 sondern MBA2 für diesen Auswertungsschritt verwendet.

In “ $\stackrel{MBA1}{=} (\mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I, \underline{x}) \neq \mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I, \underline{y}))$ ” ist “ $\mathcal{M}_{\mathcal{BA}}$ ” (zwei mal) durch “ $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}$ ” zu ersetzen, da  $\underline{x}$  und  $\underline{y}$  Terme, aber keine Booleschen Ausdrücke sind. Außerdem gehört ‘ $\neq$ ’ nicht unterstrichen, da nicht das Zeichen ‘ $\neq$ ’, sondern dessen Bedeutung – also Ungleichheit – gemeint ist.

In “ $\stackrel{MBA2}{=} (I(\underline{x}) \neq I(\underline{y}))$ ” gehören auch die inneren Klammern nicht unterstrichen, da sie ja jeweils nicht Bestandteil des betroffenen Terms sind. Außerdem wurde nicht MBA2 sondern MT1 verwendet.

In “ $\stackrel{MT1}{=} \mathbf{f} \text{ da } \underline{1} \neq \underline{2}$ ” gehören “1” und “2” nicht unterstrichen, da sie jeweils für die entsprechenden Zahlen selbst stehen und keine Konstantensymbole sind. Außerdem ist das Ergebniss “t” und nicht “f”. Weiters gehört “MT1” (ersatzlos) gestrichen, da hier keine Anwendung der ‘Meaning’-Funktion  $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}$  vorliegt.

Der verbleibende Rest des Textes wäre korrekt, wenn das Ergebnis des vorhergehenden Schrittes wirklich  $\mathbf{f}$  lauten würde. Tatsächlich müsste man allerdings wegen  $\mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I, \neg(\underline{x} \equiv \underline{y})) = \mathbf{t}$  auch noch  $\mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I, (2 \geq \underline{x} \dot{\leq} \underline{2}))$  berechnen. Wegen  $\mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I, (2 \geq \underline{x} \dot{\leq} \underline{2})) = \mathbf{t}$  folgt aus MBA3, dass  $\mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I, B) = \mathbf{t}$ .