

Theoretische Informatik und Logik – Übungsblatt 7

(SS2009)

Lösungen

Aufgabe 7.1 Welche der folgenden Aussagen sind richtig und welche sind falsch? Finden Sie einfache Beispiele bzw. Gegenbeispiele.

- a) Eine aussagenlogische Formel kann gleichzeitig erfüllbar und widerlegbar sein.
- b) Zwei Formeln F und G können äquivalent sein, selbst wenn keine Aussagenvariable sowohl in F als auch in G vorkommt und außerdem weder F noch G aussagenlogische Konstanten enthalten.
- c) Eine Tautologie kann durch Anwendung einer Substitution auf eine widerlegbare Formel entstehen.

Lösung

- a) Richtig. Die Formel, die nur aus der aussagenlogischen Variablen A besteht, ist sowohl erfüllbar als auch widerlegbar, da ja $\mathcal{M}_{AF}(I, A) = I(A) = \mathbf{t}$ ebenso wie $\mathcal{M}_{AF}(I', A) = I'(A) = \mathbf{f}$ gelten kann.
- b) Richtig. $F = A \supset A$ und $G = B \supset B$ sind beides Tautologien und damit äquivalent.
- c) Richtig. Es sei $F = A$, also widerlegbar, sowie $\sigma = [{}^B \vee_A \neg B]$. $F\sigma = B \vee \neg B$ ist eine Tautologie.

Aufgabe 7.2 Beweisen Sie, dass die Menge $\{\wedge, \vee\}$ nicht funktional vollständig ist, selbst wenn auch die beiden Wahrheitskonstanten \mathbf{t} und \mathbf{f} verwendet werden dürfen.

Hinweis: Zeigen Sie folgende Behauptung durch Induktion nach der Anzahl der Junktoren in einer Formel F : Wenn in F höchstens die Aussagenvariable A , die beiden Wahrheitskonstanten \mathbf{t} und \mathbf{f} , sowie die Junktoren \wedge und \vee vorkommen, dann ist F äquivalent zu A oder äquivalent zu \mathbf{t} oder äquivalent zu \mathbf{f} .

Warum folgt aus dieser Behauptung dass $\{\wedge, \vee\}$ nicht funktional vollständig ist?

Hinweise für TutorInnen: Das ist definitiv eine Aufgabe für ‘*-KandidatInnen’. Auch weil wohl nur wenige das Beispiel ankreuzen werden, schlage ich vor es eher optional zu behandeln. D.h., es sollte – falls überhaupt – erst nach den anderen Beispielen besprochen werden.

Lösung Aus der angegebenen Behauptung folgt insbesondere, dass sich die Funktion der *Negation* nicht durch eine entsprechende Formel F darstellen lässt. Da man mit den Funktionen einer funktional vollständigen Menge auch die Negation ausdrücken kann, folgt daraus, dass $\{\wedge, \vee\}$ nicht funktional vollständig ist. Es bleibt also nur die Behauptung zu zeigen.

Im Folgenden meinen wir mit der *Größe* von F die Anzahl aller Vorkommen von Junktoren in F .

Induktionsanfang: Wenn F die Größe 0 hat, dann gilt $F = A$ oder $F = \mathbf{t}$ oder $F = \mathbf{f}$ und erfüllt damit die Behauptung, dass F äquivalent zu A oder zu \mathbf{t} oder zu \mathbf{f} ist.

Induktionshypothese: Für alle F der Größe $\leq n$ gilt: F ist äquivalent zu A oder zu \mathbf{t} oder zu \mathbf{f} .

Induktionsschritt: Wir müssen zeigen, dass F äquivalent zu A oder zu \mathbf{t} oder zu \mathbf{f} ist, wenn die Größe von F kleiner gleich $n + 1$ ist.

F ist entweder von der Form $G_1 \wedge G_2$ oder von der Form $G_1 \vee G_2$, wobei G_1 und G_2 von der Größe $\leq n$ sind. Aus der Induktionshypothese folgt, dass G_1 und G_2 jeweils entweder zu A oder zu \mathbf{t} oder zu \mathbf{f} äquivalent sind.

Man muss nun nur mehr alle Ergebnisse der Anwendung von \wedge , \vee und auf die Argumente A , \mathbf{t} oder \mathbf{f} betrachten um festzustellen, dass so keine neuen Wahrheitswertverläufe entstehen. Dass dies in allen $2 \times 3 \times 3$ möglichen Fällen so ist, wird aus folgenden Tabellen ersichtlich:

\wedge	A	\mathbf{t}	\mathbf{f}
A	A	A	\mathbf{f}
\mathbf{t}	A	\mathbf{t}	\mathbf{f}
\mathbf{f}	\mathbf{f}	\mathbf{f}	\mathbf{f}

\vee	A	\mathbf{t}	\mathbf{f}
A	A	\mathbf{t}	A
\mathbf{t}	\mathbf{t}	\mathbf{t}	\mathbf{t}
\mathbf{f}	A	\mathbf{t}	\mathbf{f}

Die Tabellen sind wie folgt zu lesen. Beispiel: Tabelle für \wedge , erste Zeile/zweite Spalte: „Wenn G_1 äquivalent zu A ist und G_2 äquivalent zu \mathbf{t} ist, dann ist $G_1 \wedge G_2$ äquivalent zu A .“

Aufgabe 7.3 Finden Sie konjunktive und disjunktive Normalformen zur Formel

$$F = ((\mathbf{t} \uparrow \neg C) \vee (A \not\rightarrow B)) \supset \neg(\neg B \downarrow \neg A)$$

indem Sie die *syntaktische* Methode zur Normalformenbildung anwenden. Geben Sie die KNF von F auch in Mengennotation an.

Lösung

Schritt 1 — Alle Operatoren auf \wedge , \vee , \neg zurückführen:

$$\begin{aligned} F &= ((\mathbf{t} \uparrow \neg C) \vee (A \not\rightarrow B)) \supset \neg(\neg B \downarrow \neg A) \\ &= \neg((\mathbf{t} \uparrow \neg C) \vee (A \not\rightarrow B)) \vee \neg(\neg B \downarrow \neg A) \\ &= \neg((\neg \mathbf{t} \vee \neg \neg C) \vee (A \not\rightarrow B)) \vee \neg(\neg B \downarrow \neg A) \\ &= \neg((\neg \mathbf{t} \vee \neg \neg C) \vee (A \wedge \neg B)) \vee \neg(\neg B \downarrow \neg A) \\ &= \neg((\neg \mathbf{t} \vee \neg \neg C) \vee (A \wedge \neg B)) \vee \neg(\neg \neg B \wedge \neg \neg A) \end{aligned}$$

Schritt 2 — Negationen nach innen ziehen:

$$\begin{aligned} &= (\neg(\neg \mathbf{t} \vee \neg \neg C) \wedge \neg(A \wedge \neg B)) \vee \neg(\neg \neg B \wedge \neg \neg A) \\ &= ((\neg \neg \mathbf{t} \wedge \neg \neg \neg C) \wedge \neg(A \wedge \neg B)) \vee \neg(\neg \neg B \wedge \neg \neg A) \\ &= ((\mathbf{t} \wedge C) \wedge \neg(A \wedge \neg B)) \vee \neg(\neg \neg B \wedge \neg \neg A) \\ &= ((\mathbf{t} \wedge C) \wedge (\neg A \vee \neg \neg B)) \vee \neg(\neg \neg B \wedge \neg \neg A) \\ &= ((\mathbf{t} \wedge C) \wedge (\neg A \vee B)) \vee \neg(\neg \neg B \wedge \neg \neg A) \\ &= ((\mathbf{t} \wedge C) \wedge (\neg A \vee B)) \vee (\neg \neg \neg B \vee \neg \neg \neg A) \\ &= ((\mathbf{t} \wedge C) \wedge (\neg A \vee B)) \vee (B \vee \neg A) \end{aligned}$$

Schritt 3 — Konstanten eliminieren:

$$(C \wedge (\neg A \vee B)) \vee (B \vee \neg A)$$

Schritt 4 — Ausdistribuierten: Die DNF von F erhält man, in diesem Fall, durch einmaliges Anwenden des entsprechenden Distributivgesetzes:

$$\begin{aligned} &(C \wedge (\neg A \vee B)) \vee (B \vee \neg A) \\ &= ((C \wedge \neg A) \vee (C \wedge B)) \vee (B \vee \neg A) \end{aligned}$$

Berücksichtigt man die Assoziativität und Kommutativität der Disjunktion so erhalten wir

$$\text{DNF}(F) = \neg A \vee B \vee (B \wedge C) \vee (\neg A \wedge C)$$

(DNF(F) ist zur einfacheren Formel $\neg A \vee B$ äquivalent.)

Auch die KNF von F erhält man, in diesem Fall, durch einmaliges Anwenden des entsprechenden Distributivgesetzes:

$$\begin{aligned} &(C \wedge (\neg A \vee B)) \vee (B \vee \neg A) \\ &= ((C \vee (B \vee \neg A)) \wedge ((\neg A \vee B) \vee (B \vee \neg A))) \end{aligned}$$

Berücksichtigt man die Assoziativität, Idempotenz und Kommutativität der Disjunktion so erhalten wir

$$\text{KNF}(F) = (\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee B)$$

bzw. in Mengennotation

$$\text{KNF}(F) = \{\{\neg A, B, C\}, \{\neg A, B\}\}$$

Durch Anwendung von Subsumtion lässt sich dies vereinfachen zu

$$\text{KNF}(F) = \{\{\neg A, B\}\}$$

Aufgabe 7.4 Finden Sie konjunktive und disjunktive Normalformen zur Formel

$$F = ((\mathbf{t} \uparrow \neg\neg C) \vee (A \not\supset B)) \supset \neg(\neg\neg B \downarrow \neg A)$$

indem Sie die *semantische* Methode zur Normalformenbildung anwenden. Geben Sie die KNF von F auch in Mengennotation an.

Lösung

Wir verwenden die Abkürzungen $G = (\mathbf{t} \uparrow \neg\neg C)$, $H = (A \not\supset B)$, $I = (G \vee H)$, $J = (\neg\neg B \downarrow \neg A)$ und $F = (I \supset \neg J)$.

A	B	C	$\neg\neg C$	G	H	I	$\neg\neg B$	$\neg A$	J	F	K_I	D_I
f	f	f	f	t	f	t	f	t	f	t	$\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$	$\neg A \vee B \vee C$ $\neg A \vee B \vee \neg C$
f	f	t	t	f	f	f	f	t	f	t	$\neg A \wedge \neg B \wedge C$	
f	t	f	f	t	f	t	t	t	f	t	$\neg A \wedge B \wedge \neg C$	
f	t	t	t	f	f	f	t	t	f	t	$\neg A \wedge B \wedge C$	
t	f	f	f	t	t	t	f	f	t	f		
t	f	t	t	f	t	t	f	f	t	f		
t	t	f	f	t	f	t	t	f	f	t	$A \wedge B \wedge \neg C$	
t	t	t	t	f	f	f	t	f	f	t	$A \wedge B \wedge C$	

Es gilt also:

$$\text{DNF}(F) = \bigvee_{I \in \text{ENV}, \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, F) = \mathbf{t}} K_I = (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)$$

(Die DNF ist natürlich wiederum zu $\neg A \vee B$ äquivalent.)

$$\text{KNF}(F) = \bigwedge_{I \in \text{ENV}, \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, F) = \mathbf{f}} D_I = (\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C)$$

bzw. in Mengenform: $\text{KNF}(F) = \{\{\neg A, B, C\}, \{\neg A, B, \neg C\}\}$.

(Die KNF ist wiederum äquivalent zu $\{\{\neg A, B\}\}$.)

Aufgabe 7.5 Finden Sie durch Konstruktion geeigneter Ableitungsversuche im Sequentialkalkül jeweils entweder ein Gegenmodell oder den Nachweis, dass die Formel gültig ist.

a) $(A \supset (B \wedge C)) \supset ((B \supset D) \supset (A \supset C))$

b) $\neg(A \supset (D \vee C)) \vee ((A \supset \neg B) \supset (A \supset C))$

Lösung a) Der Sequent $\vdash (A \supset (B \wedge C)) \supset ((B \supset D) \supset (A \supset C))$ ist ableitbar und daher ist die entsprechende Formel — wegen der Korrektheit des Sequentialkalküls — gültig:

$$\frac{\frac{\frac{\text{Axiom}}{B \supset D, A \vdash A, C} \quad \frac{\frac{\text{Axiom}}{B, C, B \supset D, A \vdash C}}{B \wedge C, B \supset D, A \vdash C} \wedge\text{-r}}{A \supset (B \wedge C), B \supset D, A \vdash C} \supset\text{-l}}{A \supset (B \wedge C), B \supset D \vdash A \supset C} \supset\text{-r}}{A \supset (B \wedge C) \vdash (B \supset D) \supset (A \supset C)} \supset\text{-r}}{\vdash (A \supset (B \wedge C)) \supset ((B \supset D) \supset (A \supset C))} \supset\text{-r}$$

b) Wir bilden folgenden Ableitungsversuch:

$$\begin{array}{c}
\text{Axiom} \quad \frac{D, A \vdash C, A}{D, A \supset \neg B, A \vdash C} \quad \frac{\text{Anti-Axiom} \quad \frac{A, D \vdash C, B}{\neg B, D, A \vdash C} \neg\text{-I}}{\supset\text{-I}} \quad \text{Axiom} \quad \frac{C, A \supset \neg B, A \vdash C}{C, A \supset \neg B, A \vdash C} \\
\frac{A \supset \neg B, A \vdash C, A}{D \vee C, A \supset \neg B, A \vdash C} \vee\text{-I} \\
\frac{A \supset (D \vee C), A \supset \neg B, A \vdash C}{A \supset (D \vee C), A \supset \neg B \vdash A \supset C} \supset\text{-r} \\
\frac{A \supset (D \vee C), A \supset \neg B \vdash A \supset C}{A \supset (D \vee C) \vdash (A \supset \neg B) \supset (A \supset C)} \supset\text{-r} \\
\frac{A \supset (D \vee C) \vdash (A \supset \neg B) \supset (A \supset C)}{\vdash \neg(A \supset (D \vee C)), (A \supset \neg B) \supset (A \supset C)} \neg\text{-r} \\
\frac{\vdash \neg(A \supset (D \vee C)), (A \supset \neg B) \supset (A \supset C)}{\vdash \neg(A \supset (D \vee C)) \vee ((A \supset \neg B) \supset (A \supset C))} \vee\text{-I}
\end{array}$$

Das Anti-Axiom in der Mitte gibt an, dass jede Interpretation I mit $I(A) = \mathbf{t}$, $I(B) = \mathbf{f}$, $I(C) = \mathbf{f}$ und $I(D) = \mathbf{t}$ ein Gegenmodell zu $\neg(A \supset (D \vee C)) \vee ((A \supset \neg B) \supset (A \supset C))$ ist.