

Theoretische Informatik und Logik

Übungsblatt 3 (SS 2009)

Lösungen

Aufgabe 3.1 Geben Sie die formale Definition eines Minimalautomaten sowie der entsprechenden regulären Grammatik für die Sprache $L = \{\underline{0}, \underline{1}\}^* - \{\underline{0}^{mn} \mid n \geq 0\}\{\underline{1}^3\}$ an, wobei m Ihre Matrikelnummer (ohne evtl. führende Nullen) bezeichnet.

Lösung Ein möglicher Lösungsweg besteht darin, zuerst einen deterministischen endlichen Automaten \mathcal{A}' für die Sprache $\{\underline{0}^{mn} \mid n \geq 0\}\{\underline{1}^3\}$ (d.h., das Komplement von L) zu konstruieren (wobei es wesentlich ist, hier nicht auf die Falle zu vergessen!).

$\mathcal{A}' = \langle \{q_i \mid 0 \leq i \leq (m+2)\} \cup \{q_{falle}\}, \{\underline{0}, \underline{1}\}, \delta, q_0, \{q_{(m+2)}\} \rangle$ mit

$$\delta(q_i, \underline{0}) = q_{(i+1)} \text{ für } 0 \leq i \leq (m-2),$$

$$\delta(q_{(m-1)}, \underline{0}) = q_0,$$

$$\delta(q_i, \underline{1}) = q_{falle} \text{ für } 1 \leq i \leq (m-1),$$

$$\delta(q_0, \underline{1}) = q_m,$$

$$\delta(q_m, \underline{1}) = q_{(m+1)},$$

$$\delta(q_{(m+1)}, \underline{1}) = q_{(m+2)},$$

$$\delta(q_m, \underline{0}) = q_{falle},$$

$$\delta(q_{(m+1)}, \underline{0}) = q_{falle},$$

$$\delta(q_{(m+2)}, \underline{0}) = \delta(q_{(m+2)}, \underline{1}) = q_{falle},$$

$$\delta(q_{falle}, \underline{0}) = \delta(q_{falle}, \underline{1}) = q_{falle}.$$

Den Automaten \mathcal{A} für $L = \{\underline{0}, \underline{1}\}^* - \{\underline{0}^{mn} \mid n \geq 0\}\{\underline{1}^3\}$ erhalten wir aus \mathcal{A}' nun dadurch, dass wir Endzustände und Nichtendzustände vertauschen:

$\mathcal{A} = \langle \{q_i \mid 0 \leq i \leq (m+2)\} \cup \{q_{falle}\}, \{\underline{0}, \underline{1}\}, \delta, q_0, \{q_i \mid 0 \leq i \leq (m+1)\} \cup \{q_{falle}\} \rangle$ mit δ wie zuvor.

Daraus können wir direkt folgende reguläre Grammatik ableiten:

$G = \langle \{q_i \mid 0 \leq i \leq (m+2)\} \cup \{q_{falle}\}, \{\underline{0}, \underline{1}\}, P, q_0 \rangle$ mit

$P =$

$$\{q_i \rightarrow \underline{0}q_{(i+1)} \mid 0 \leq i \leq (m-2)\} \cup$$

$$\{q_i \rightarrow \underline{1}q_{falle} \mid 1 \leq i \leq (m-1)\} \cup$$

$$\{q_i \rightarrow \varepsilon \mid 0 \leq i \leq m\} \cup$$

$$\{q_{(m-1)} \rightarrow \underline{0}q_0, q_0 \rightarrow \underline{1}q_m, q_m \rightarrow \underline{0}q_{falle} \mid \underline{1}q_{(m+1)} \mid \varepsilon, q_{(m+1)} \rightarrow \underline{0}q_{falle} \mid \underline{1}q_{(m+2)} \mid \varepsilon, q_{(m+2)} \rightarrow \underline{0}q_{falle} \mid \underline{1}q_{falle}, q_{falle} \rightarrow \underline{0}q_{falle} \mid \underline{1}q_{falle} \mid \varepsilon\}.$$

Aufgabe 3.2 Bestimmen Sie die von der kontextfreien Grammatik

$$G = \langle \{A, B\}, \{\underline{0}\}, \{A \rightarrow B\underline{0}B \mid B\underline{0}BA\underline{0}B, B \rightarrow \varepsilon\}, A \rangle$$

erzeugte Sprache und stellen Sie diese als reguläre Menge dar.

Lösung Ersetzen wir B in den A -Produktionen durch ε , so erhalten wir $A \rightarrow \underline{0}$ und $A \rightarrow \underline{0}A\underline{0}$. Betrachten wir nun $G' = \langle \{A\}, \{\underline{0}\}, \{A \rightarrow \underline{0} \mid \underline{0}A\underline{0}\}, A \rangle$, so gilt klarerweise $A \Rightarrow^n \underline{0}^n A \underline{0}^n \Rightarrow \underline{0}^n \underline{0} \underline{0}^n = \underline{0}^{2n+1}$ für alle $n \geq 0$ und somit $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G') = \{\underline{0}^{2n+1} \mid n \geq 0\}$, also $\mathcal{L}(G) = \{\underline{0}\}^* \{\underline{0}\}$.

Aufgabe 3.3 Geben Sie für *eine der* folgenden Sprachen eine eindeutige minimale (bezüglich der Anzahl der Produktionen) kontextfreie Grammatik in erweiterter GREIBACH-Normalform sowie für jedes Wort der Sprache die Linksableitung in Ihrer Grammatik an:

a) $L_1 = \{\underline{a}^{3n}\underline{b}^m\underline{c}^{2n} \mid n \geq 1, m \geq 1\}$

b) $L_2 = \{\underline{0}^{6n}\underline{1}^m\underline{0}^{8n} \mid n \geq 1, m \geq 1\}$

Lösung

a) $G = \langle \{A, B\}, \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}, \{A \rightarrow \underline{a}^3 A \underline{c}^2 \mid \underline{a}^3 B \underline{c}^2, B \rightarrow \underline{b} B \mid \underline{b}\}, A \rangle$

Wir erhalten folgende Linksableitung für jedes Wort der Sprache:

$$A \Rightarrow_L^{n-1} \underline{a}^{3(n-1)} A \underline{c}^{2(n-1)} \Rightarrow_L \underline{a}^{3n} B \underline{c}^{2n} \Rightarrow_L^{m-1} \underline{a}^{3n} \underline{b}^{m-1} B \underline{c}^{2n} \Rightarrow_L \underline{a}^{3n} \underline{b}^m \underline{c}^{2n} \text{ für alle } n, m \geq 1.$$

b) $G = \langle \{A, B\}, \{\underline{0}, \underline{1}\}, \{A \rightarrow \underline{0}^6 A \underline{0}^8 \mid \underline{0}^6 B \underline{0}^8, B \rightarrow \underline{1} B \mid \underline{1}\}, A \rangle$

Wir erhalten folgende Linksableitung für jedes Wort der Sprache:

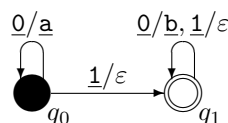
$$A \Rightarrow_L^{n-1} \underline{0}^{6(n-1)} A \underline{0}^{8(n-1)} \Rightarrow_L \underline{0}^{6n} B \underline{0}^{8n} \Rightarrow_L^{m-1} \underline{0}^{6n} \underline{1}^{m-1} B \underline{0}^{8n} \Rightarrow_L \underline{0}^{6n} \underline{1}^m \underline{0}^{8n} \text{ für alle } n, m \geq 1.$$

Aufgabe 3.4 Geben Sie für *beide* Sprachen aus Aufgabe 3.3 einen Homomorphismus oder eine gsm an, welche(r) als Ergebnis die Sprache $\{\underline{a}^{6n}\underline{b}^{8n} \mid n \geq 1\}$ liefert. Ist ein Homomorphismus möglich, so ist nur dieser eine zulässige Lösung!

Lösung

a) $h(\underline{a}) = \underline{a}^2, h(\underline{b}) = \varepsilon, h(\underline{c}) = \underline{b}^4.$

b) Hier ist kein Homomorphismus möglich, da $\underline{0}$ einmal auf \underline{a} und einmal auf \underline{b} abgebildet werden muss. Wir konstruieren daher eine gsm:



Formal: $M = \langle \{q_0, q_1\}, \{\underline{0}, \underline{1}\}, \{\underline{a}, \underline{b}\}, \delta, q_0, \{q_1\} \rangle$ mit $\delta(q_0, \underline{0}) = (q_0, \underline{a}), \delta(q_0, \underline{1}) = \delta(q_1, \underline{1}) = (q_1, \varepsilon)$ und $\delta(q_1, \underline{0}) = (q_1, \underline{b})$.

Aufgabe 3.5 Zeigen Sie, dass die Sprache $\{\underline{a}^{f(n)} \mid n \geq 1\}$ nicht kontextfrei ist, wobei $f(0) = f(1) = 2$ und $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ für alle $n \geq 2$. (Hinweis: Es reicht zu zeigen, dass die Funktion $f(n)$ nicht linear ist, siehe Korollar zum Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen, Folgerung 1.88, Skriptum S. 58.)

Lösung Es genügt zu zeigen, dass $f(n+1) - f(n) \geq n$ ist.

$$f(n+1) - f(n) \geq n \Leftrightarrow$$

$$f(n) + f(n-1) - f(n) \geq n \Leftrightarrow$$

$$f(n-1) \geq n, \text{ was etwa mittels Induktion bewiesen werden kann:}$$

Induktionsbasis: Für $n = 1$ gilt: $f(n-1) = f(0) = 2 \geq 1$.

Induktionsannahme: Gelte nun $f(m-1) \geq m$ für alle $m \leq n$.

Induktionsbehauptung: Dann gilt auch $f(n) \geq n+1$.

$$f(n) \geq n+1 \Leftrightarrow f(n-1) + f(n-2) \geq n+1.$$

Laut Induktionsannahme gilt $f(n-1) \geq n$ und $f(n-2) \geq n-1$, daher gilt auch

$$f(n-1) + f(n-2) \geq n + (n-1) = 2n-1.$$

Da $2n-1 \geq n+1$ für alle $n \geq 2$, gilt auch $f(n) \geq n+1$.

q.e.d.