

Theoretische Informatik und Logik

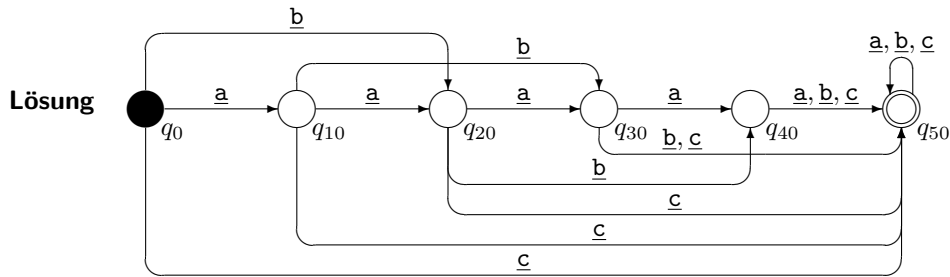
Übungsblatt 2 (SS 2009)

Lösungen

Aufgabe 2.1 Konstruieren Sie einen endlichen Automaten, der die Funktion eines Kaffeeautomaten simuliert.

Bezahlt wird mit 10-Cent-Münzen (a), 20-Cent-Münzen (b) und 50-Cent-Münzen (c), der Münzeinwurf wird als ein Wort aus $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}^*$ dargestellt. Der Automat soll einen Kaffee ausgeben (das Wort akzeptieren), wenn die Gesamtsumme 50 Cent erreicht oder überschreitet (es gibt keine Rückgabe).

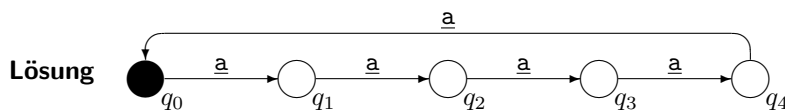
Dabei darf der Automat nicht mehr als sechs Zustände aufweisen.



In formaler Schreibweise: $\mathcal{A} = \langle \{q_0, q_{10}, q_{20}, q_{30}, q_{40}, q_{50}\}, \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}, \delta, q_0, \{q_{50}\} \rangle$ mit

$\delta(q_0, \underline{a}) = q_{10}, \delta(q_0, \underline{b}) = q_{20}, \delta(q_0, \underline{c}) = q_{50},$
 $\delta(q_{10}, \underline{a}) = q_{20}, \delta(q_{10}, \underline{b}) = q_{30}, \delta(q_{10}, \underline{c}) = q_{50},$
 $\delta(q_{20}, \underline{a}) = q_{30}, \delta(q_{20}, \underline{b}) = q_{40}, \delta(q_{20}, \underline{c}) = q_{50},$
 $\delta(q_{30}, \underline{a}) = q_{40}, \delta(q_{30}, \underline{b}) = \delta(q_{30}, \underline{c}) = q_{50},$
 $\delta(q_{40}, \underline{a}) = \delta(q_{40}, \underline{b}) = \delta(q_{40}, \underline{c}) = q_{50},$
 $\delta(q_{50}, \underline{a}) = \delta(q_{50}, \underline{b}) = \delta(q_{50}, \underline{c}) = q_{50}.$

Aufgabe 2.2 Konstruieren Sie einen endlichen Automaten, der die Menge $\{\underline{a}^n \mid n \equiv m \bmod 5\}$, wobei m Ihre Matrikelnummer (ohne evtl. führende Nullen) bezeichnet, akzeptiert (wobei die Falle weggelassen werden kann) und geben Sie die entsprechende reguläre Grammatik an.



Der Endzustand ist von der Matrikelnummer abhängig und daher nicht eingezeichnet; er ist $q_{(m \bmod 5)}$.

In formaler Schreibweise: $\mathcal{A} = \langle \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{\underline{a}\}, \delta, q_0, \{q_{(m \bmod 5)}\} \rangle$ mit

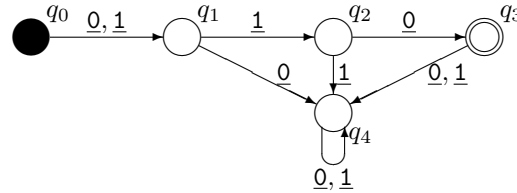
$\delta(q_0, \underline{a}) = q_1, \delta(q_1, \underline{a}) = q_2, \delta(q_2, \underline{a}) = q_3, \delta(q_3, \underline{a}) = q_4, \delta(q_4, \underline{a}) = q_0.$

Hier kann man sofort die entsprechende reguläre Grammatik ablesen: $G = \langle \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{\underline{a}\}, P, q_0 \rangle$ mit

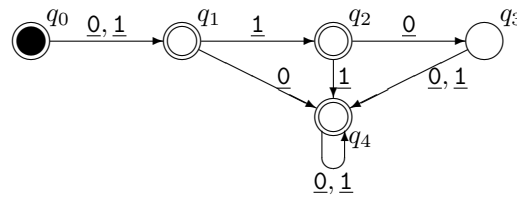
$P = \{q_0 \rightarrow \underline{a}q_1, q_1 \rightarrow \underline{a}q_2, q_2 \rightarrow \underline{a}q_3, q_3 \rightarrow \underline{a}q_4, q_4 \rightarrow \underline{a}q_0, q_{(m \bmod 5)} \rightarrow \varepsilon\}.$

Aufgabe 2.3 Sei $L = \{0, 1\}^* - \{010, 110\}$. Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten \mathcal{A} an, der L akzeptiert. Beschreiben Sie \mathcal{A} sowohl durch einen Graphen als auch durch ein 5-Tupel.

Lösung Ein möglicher Lösungsweg besteht darin, zuerst einen deterministischen endlichen Automaten \mathcal{A}' für die Sprache $\{010, 110\}$ (d.h., das Komplement von L) zu konstruieren (wobei es wesentlich ist, hier nicht auf die Falle zu vergessen!):



Den Automaten \mathcal{A} für $L = \{0, 1\}^* - \{010, 110\}$ erhalten wir aus \mathcal{A}' nun dadurch, dass wir Endzustände und Nichtendzustände vertauschen:

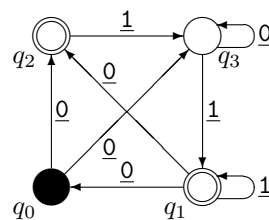


In formaler Schreibweise also

$\mathcal{A} = \langle \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{\underline{0}, \underline{1}\}, \delta, q_0, \{q_1, q_2, q_3\} \rangle$ mit

$\delta(q_0, \underline{0}) = \delta(q_0, \underline{1}) = q_1$,
 $\delta(q_1, \underline{0}) = q_4, \delta(q_1, \underline{1}) = q_2$,
 $\delta(q_2, \underline{0}) = q_3, \delta(q_2, \underline{1}) = q_4$,
 $\delta(q_3, \underline{0}) = \delta(q_3, \underline{1}) = q_4$,
 $\delta(q_4, \underline{0}) = \delta(q_4, \underline{1}) = q_4$.

Aufgabe 2.4 Konstruieren Sie, ohne unnötige Zustände zu betrachten, einen deterministischen Automaten, der zum folgenden nicht-deterministischen äquivalent ist:



Lösung Für den angegebenen NEA ist die Transitionsfunktion gegeben durch

δ	$\underline{0}$	$\underline{1}$
q_0	$\{q_2, q_3\}$	$\{\}$
q_1	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_1\}$
q_2	$\{\}$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_3\}$	$\{q_1\}$

Wir erhalten folgenden deterministischen endlichen Automaten:

$\hat{\delta}$	<u>a</u>	<u>b</u>
$\{q_0\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{\}$
$\{q_2, q_3\}$	$\{q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$
$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$
$\{q_3\}$	$\{q_3\}$	$\{q_1\}$
$\{q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_2, q_3\}$	$\{q_1\}$
$\{q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_1\}$
$\{q_0, q_2, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$
$\{q_0, q_2\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_3\}$

wobei $\{q_0\}$ der Startzustand und $F = \{\{q_2, q_3\}, \{q_1, q_3\}, \{q_1\}, \{q_0, q_2, q_3\}, \{q_0, q_2\}\}$ die Menge der Endzustände des DEA ist. (Endzustände sind alle Zustände, die einen ursprünglichen Endzustand enthalten.)

Aufgabe 2.5 Konstruieren Sie, ohne unnötige Zustände zu betrachten, zu folgendem NEA \mathcal{A} einen äquivalenten DEA und geben Sie die vom DEA akzeptierte Sprache sowie einen äquivalenten Minimalautomaten an:

$\mathcal{A} = (\{q_i \mid 0 \leq i \leq 6\}, \{\underline{a}, \underline{b}\}, \delta, q_0, \{q_2\})$, wobei

δ	<u>a</u>	<u>b</u>
q_0	$\{q_2\}$	$\{q_4, q_5\}$
q_1	$\{q_4, q_5\}$	$\{q_1, q_4, q_5\}$
q_2	$\{q_4, q_5, q_6\}$	$\{q_0\}$
q_3	$\{q_4, q_5\}$	$\{q_1, q_4, q_5\}$
q_4	$\{q_4, q_5, q_6\}$	$\{q_4, q_5\}$
q_5	$\{q_3\}$	$\{q_1, q_4, q_5\}$
q_6	$\{q_4, q_5\}$	$\{q_4, q_5, q_6\}$

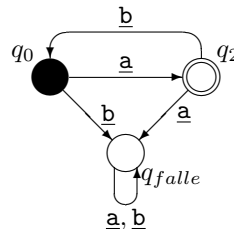
Lösung Wir erhalten folgende Übergangsfunktion des DEA \mathcal{A} :

$\hat{\delta}$	<u>a</u>	<u>b</u>
$\{q_0\}$	$\{q_2\}$	$\{q_4, q_5\}$
$\{q_2\}$	$\{q_4, q_5, q_6\}$	$\{q_0\}$
$\{q_4, q_5\}$	$\{q_3, q_4, q_5, q_6\}$	$\{q_1, q_4, q_5\}$
$\{q_4, q_5, q_6\}$	$\{q_3, q_4, q_5, q_6\}$	$\{q_1, q_4, q_5, q_6\}$
$\{q_1, q_4, q_5\}$	$\{q_3, q_4, q_5, q_6\}$	$\{q_1, q_4, q_5\}$
$\{q_3, q_4, q_5, q_6\}$	$\{q_3, q_4, q_5, q_6\}$	$\{q_1, q_4, q_5, q_6\}$
$\{q_1, q_4, q_5, q_6\}$	$\{q_3, q_4, q_5, q_6\}$	$\{q_1, q_4, q_5, q_6\}$

Startzustand des DEA: $\{q_0\}$

Endzustand des DEA: $\{q_2\}$

Wie leicht zu sehen ist, sind die Zustände $\{q_4, q_5\}$, $\{q_4, q_5, q_6\}$, $\{q_1, q_4, q_5\}$, $\{q_3, q_4, q_5, q_6\}$ und $\{q_1, q_4, q_5, q_6\}$ ununterscheidbar, sie können also zu einem Nichtendzustand (Falle) q_{falle} zusammengefasst werden:



Wir können nun die akzeptierte Sprache einfach ablesen: $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{\underline{ab}\}^* \{\underline{a}\}$.