

Zusatzbeispiel AFS

Rudolf Freund, Marian Kogler

5.5.2009

Outline

1. Statistik
2. Beispiele
3. Beliebte Fehlschlüsse

Statistik

- 439 Studenten in 32 Gruppen haben teilgenommen
- Durchschnittspunktezahl: 1,59226
- 110 Studenten keinen Punkt (falsche Antwort)
- 143 Studenten einen Punkt (richtige Antwort, falsche oder keine Begründung)
- 50 Studenten zwei Punkte (richtige Antwort, richtige Begründungsansätze)
- 88 Studenten drei Punkte (richtige Antwort, richtige Begründung)
- 48 Studenten vier Punkte (richtige Antwort, sehr gute Begründung)

Statistik

- Beste Gruppe: Mi11L (Durchschnitt 3,30769)
- Schlechteste Gruppe: Mi10L (Durchschnitt 0,166667)

Weitere “Ausreißer” (Durchschnitt ≤ 1 oder ≥ 3):

- Do14L (Durchschnitt 0,588235)
- Do15L (Durchschnitt 0,944444)
- Mo09L (Durchschnitt 0,428571)
- Di11L (Durchschnitt 0,75)
- Di13L (Durchschnitt 3)

Aufgabenstellung Mi10L

Aussage

Es gibt reguläre Sprachen, die nicht von einer nichtregulären kontextfreien Grammatik erzeugt werden können.

Antwort

Falsch, d.h. jede reguläre Sprache kann von einer nichtregulären kontextfreien Grammatik erzeugt werden!

Aufgabenstellung Mi10L

Aussage

Es gibt reguläre Sprachen, die nicht von einer nichtregulären kontextfreien Grammatik erzeugt werden können.

Beweis

Sei L eine reguläre Sprache. So existiert gemäß Satz 1.54 (Skriptum Seite 41) eine reguläre Grammatik $G = \langle N, T, P, S \rangle$, die L erzeugt, d.h. $L(G) = L$.

Wir definieren nun die Grammatik $G' = \langle N', T', P', S' \rangle$ mit

- $N' = N \cup \{S', E\}$,
- $T' = T$ und
- $P' = P \cup \{S' \rightarrow SE, E \rightarrow \epsilon\}$

Aufgabenstellung Mi10L

Aussage

Es gibt reguläre Sprachen, die nicht von einer nichtregulären kontextfreien Grammatik erzeugt werden können.

Beweis (Fortsetzung)

Diese Grammatik ist sicher kontextfrei (da alle Produktionen aus P sogar regulär sind), aber nicht regulär, da bei der Regel $S' \rightarrow SE$ zwei Nonterminale auf der rechten Seite stehen. Sie erzeugt allerdings dieselbe Sprache wie G , d.h. $L(G') = L(G) = L$. \square

Aufgabenstellung Mo09L

Aussage

Eine monotone Grammatik, die eine kontextfreie Sprache erzeugt, ist auch kontextfrei.

Antwort

Falsch, d.h. es gibt monotone, nichtkontextfreie Grammatiken, die kontextfreie Sprachen erzeugen.

Aufgabenstellung Mo09L

Aussage

Eine monotone Grammatik, die eine kontextfreie Sprache erzeugt, ist auch kontextfrei.

Beweis (durch Gegenbeispiel)

Wir definieren die Grammatik $G = \langle N, T, P, S \rangle$ mit:

- $N = \{S, A, B\}$,
- $T = \{\underline{a}, \underline{b}\}$ und
- $P' = \{S \rightarrow AB \mid \epsilon, AB \rightarrow \underline{a}AB\underline{b} \mid \underline{ab}\}$

Diese monotone Grammatik erzeugt die kontextfreie Sprache $\{\underline{a}^n \underline{b}^n \mid n \geq 0\}$, ist aber nicht kontextfrei (da auf der linken Seite zweier Produktionen mehr als ein Nonterminalsymbol steht). \square

Aufgabenstellung Do15L

Aussage

Jede kontextfreie Sprache, die von einer monotonen Grammatik erzeugt werden kann, ist auch regulär.

Antwort

Falsch, d.h. es gibt kontextfreie Sprachen, die von einer monotonen Grammatik erzeugt werden können und nicht regulär sind.

Aufgabenstellung Do15L

Aussage

Jede kontextfreie Sprache, die von einer monotonen Grammatik erzeugt werden kann, ist auch regulär.

Beweis

Da die kontextfreien Sprachen gemäß Chomsky-Hierarchie eine echte Übermenge der regulären Sprachen sind, gibt es kontextfreie Sprachen, die nicht regulär sind (etwa die Sprache $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$). Ob sie von einer monotonen Grammatik erzeugt wird, spielt hierbei keine Rolle, da ebenfalls aufgrund der Chomsky-Hierarchie jede kontextfreie Sprache von einer monotonen Grammatik erzeugt werden kann. \square

Aufgabenstellung Di13L

Aussage

Es gibt keine kontextfreie Sprache, die von einer regulären Grammatik erzeugt werden kann.

Antwort

Falsch.

Aufgabenstellung Di13L

Aussage

Es gibt keine kontextfreie Sprache, die von einer regulären Grammatik erzeugt werden kann.

Beweis

Wir wählen eine Sprache L so, dass L regulär. Es existiert daher (laut Satz 1.54 im Skriptum) eine reguläre Grammatik, die L erzeugt. Gemäß der Chomsky-Hierarchie ist L auch kontextfrei. \square

Anmerkung

Die Menge der kontextfreien Sprachen, die von einer regulären Grammatik erzeugt werden können, entspricht genau der Menge der regulären Sprachen.

Aufgabenstellung Di09L

Aussage

Wenn L eine reguläre Sprache ist, so ist L^* eine kontextfreie Sprache.

Antwort

Richtig.

Aufgabenstellung Di09L

Aussage

Wenn L eine reguläre Sprache ist, so ist L^* eine kontextfreie Sprache.

Fehlschluss

$L^* = L \cup \{\epsilon\}$. Das Leerwort ändert an der Eigenschaft “reguläre Sprache” nichts, und gemäß der Chomsky-Hierarchie ist jede reguläre Sprache auch kontextfrei.

Bemerkung

Tatsächlich ist L^* ist die Menge aller Wörter, die durch beliebige Konkatenation aus Wörtern in L gebildet werden kann, vereinigt mit dem Leerwort. Jedoch sind gemäß den Abschlusseigenschaften reguläre Sprachen gegenüber Kleene-Stern abgeschlossen (d.h.: ist L eine reguläre Sprache, so ist auch L^* eine). Da jede reguläre Sprache auch kontextfrei ist, stimmt die Aussage.

Aufgabenstellung Mi16L

Aussage

Es gibt kontextfreie Grammatiken, die nicht regulär sind.

Antwort

Richtig.

Aufgabenstellung Mi16L

Aussage

Es gibt kontextfreie Grammatiken, die nicht regulär sind.

Fehlschluss

Die kontextfreien nichtregulären Grammatiken erzeugen nichtreguläre Sprachen.

Bemerkung

Es gibt sehr wohl Grammatiken, die nicht regulär sind, aber reguläre Sprachen erzeugen (die Grammatik $G = \langle \{A, B, C\}, \{\underline{a}, \underline{b}\}, \{A \rightarrow BC, B \rightarrow \underline{a}, C \rightarrow \underline{b}\} \rangle$ erzeugt etwa die reguläre Sprache $\{\underline{ab}\}$).

Dennoch gibt es natürlich kontextfreie Grammatiken, die nichtreguläre Sprachen erzeugen.