

# Theoretische Informatik und Logik

## Übungsblatt 10 (SS2009)

### Lösungen

**Aufgabe 10.1** Wenden Sie das Regelsystem  $\mathcal{UR}$  an um für folgende Atommengen einen allgemeinsten Unifikator zu berechnen, bzw. um festzustellen, dass die Menge nicht unifizierbar ist.

- a)  $\{R(z, g(y, x), f(y)), R(u, z, f(x))\}$
- b)  $\{P(a, z), P(y, g(c)), P(x, x)\}$

#### Lösung

- a) Ein entsprechendes Term-Gleichungssystem lautet  $\mathcal{E} = \{z \doteq u, g(y, x) \doteq z, f(y) \doteq f(x)\}$ . Durch Anwendung von Regeln aus  $\mathcal{UR}$  erhalten wir:

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{E} & \xRightarrow{\text{orient}} & \{z \doteq u, z \doteq g(y, x), f(y) \doteq f(x)\} \\ & \xRightarrow{\text{elim.}} & \{z \doteq u, u \doteq g(y, x), f(y) \doteq f(x)\} \\ & \xRightarrow{\text{elim.}} & \{u \doteq g(y, x), z \doteq g(y, x), f(y) \doteq f(x)\} \\ & \xRightarrow{\text{decomp.}} & \{u \doteq g(y, x), z \doteq g(y, x), y \doteq x\} \\ & \xRightarrow{\text{elim.}} & \{y \doteq x, u \doteq g(x, x), z \doteq g(x, x)\} \end{array}$$

Aus der gelösten Form erhalten wir den MGU  $\sigma = \{y \leftarrow x, u \leftarrow g(x, x), z \leftarrow g(x, x)\}$ .  
Probe: Es gilt  $\sigma(R(z, g(y, x), f(y))) = R(g(x, x), g(x, x), f(x)) = \sigma(R(u, z, f(x)))$ .

- b) Ein entsprechendes Term-Gleichungssystem lautet  $\mathcal{E} = \{a \doteq y, z \doteq g(c), y \doteq x, g(c) \doteq x\}$ . Durch Anwendung von Regeln aus  $\mathcal{UR}$  erhalten wir:

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{E} & \xRightarrow{\text{elim.}} & \{y \doteq x, a \doteq x, z \doteq g(c), g(c) \doteq x\} \\ & \xRightarrow{\text{orient}} & \{y \doteq x, x \doteq a, z \doteq g(c), g(c) \doteq x\} \\ & \xRightarrow{\text{elim.}} & \{x \doteq a, y \doteq a, z \doteq g(c), g(c) \doteq a\} \\ & \xRightarrow{\text{clash}} & \perp \end{array}$$

Das Gleichungssystem ist also nicht lösbar. D.h., dass es keinen Unifikator der Menge  $\{P(a, z), P(y, g(c)), P(x, x)\}$  gibt.

**Aufgabe 10.2** Transformieren Sie folgende Formel  $F$  schrittweise in Klauselform:

$$F = \neg[(\forall x)(\exists y)P(a, f(x, y)) \wedge \neg(\forall x)(\exists y)(\exists z)((P(x, y) \vee P(y, z)) \supset P(z, x))]$$

#### Lösung

*Schritt A:*

$$\begin{array}{lcl} F & \xRightarrow{T1} & \neg[(\forall x)(\exists y)P(a, f(x, y)) \wedge \neg(\forall x)(\exists y)(\exists z)(\neg(P(x, y) \vee P(y, z)) \vee P(z, x))] \\ & \xRightarrow{T2} & \neg(\forall x)(\exists y)P(a, f(x, y)) \vee \neg\neg(\forall x)(\exists y)(\exists z)(\neg(P(x, y) \vee P(y, z)) \vee P(z, x)) \\ & \xRightarrow{T4} & \neg(\forall x)(\exists y)P(a, f(x, y)) \vee (\forall x)(\exists y)(\exists z)(\neg(P(x, y) \vee P(y, z)) \vee P(z, x)) \\ & \xRightarrow{T3} & \neg(\forall x)(\exists y)P(a, f(x, y)) \vee (\forall x)(\exists y)(\exists z)((\neg P(x, y) \wedge \neg P(y, z)) \vee P(z, x)) \\ & \xRightarrow{T5} & (\exists x)\neg(\exists y)P(a, f(x, y)) \vee (\forall x)(\exists y)(\exists z)((\neg P(x, y) \wedge \neg P(y, z)) \vee P(z, x)) \\ & \xRightarrow{T6} & (\exists x)(\forall y)\neg P(a, f(x, y)) \vee (\forall x)(\exists y)(\exists z)((\neg P(x, y) \wedge \neg P(y, z)) \vee P(z, x)) \end{array}$$

*Schritt B:* Zunächst muss die erhaltene NNF syntaxbereinigt werden:

$$\xRightarrow{QR} (\exists x)(\forall y)\neg P(a, f(x, y)) \vee (\forall u)(\exists v)(\exists z)((\neg P(u, v) \wedge \neg P(v, z)) \vee P(z, u))$$

Skolemisierung:

$$\begin{aligned}
&\xrightarrow{\text{Sko}} (\forall y) \neg P(a, f(b, y)) \vee (\forall u)(\exists v)(\exists z)((\neg P(u, v) \wedge \neg P(v, z)) \vee P(z, u)) \\
&\xrightarrow{\text{Sko}} (\forall y) \neg P(a, f(b, y)) \vee (\forall u)(\exists z)((\neg P(u, g(u)) \wedge \neg P(g(u), z)) \vee P(z, u)) \\
&\xrightarrow{\text{Sko}} (\forall y) \neg P(a, f(b, y)) \vee (\forall u)((\neg P(u, g(u)) \wedge \neg P(g(u), h(u))) \vee P(h(u), u))
\end{aligned}$$

Schritt C: (All-Quantoren weglassen)

$$\Rightarrow \neg P(a, f(b, y)) \vee ((\neg P(u, g(u)) \wedge \neg P(g(u), h(u))) \vee P(h(u), u))$$

Schritt D: Es muss zwei mal distribuiert werden:

$$\begin{aligned}
&\xrightarrow{D_2} \neg P(a, f(b, y)) \vee ((\neg P(u, g(u)) \vee P(h(u), u)) \wedge (\neg P(g(u), h(u)) \vee P(h(u), u))) \\
&\xrightarrow{D_1} (\neg P(a, f(b, y)) \vee (\neg P(u, g(u)) \vee \neg P(h(u), u))) \wedge (\neg P(a, f(b, y)) \vee (\neg P(g(u), h(u)) \vee P(h(u), u)))
\end{aligned}$$

Wir erhalten also folgende Klauselmengende:

$$cl(F) = \{\{\neg P(a, f(b, y)), \neg P(u, g(u)), P(h(u), u)\}, \{\neg P(a, f(b, y)), \neg P(g(u), h(u)), P(h(u), u)\}\}$$

**Aufgabe 10.3** Finden Sie eine Resolutionswiderlegung von

$$\Pi = \{\{\neg P(x, c), \neg P(g(y), y)\}, \{P(x, y), P(x, z), Q(f(x, y))\}, \{\neg Q(x)\}\}.$$

Geben Sie dabei die verwendeten MGUs, die resolvierten Atome und die Elternklauseln der Resolventen an. *Hinweis:* Beachten Sie, dass binäre Resolventen allein hier nicht zum Ziel führen.

**Lösung** Resolutionswiderlegung von  $\Pi$ :

1.  $\{\neg P(x, c), \neg P(g(y), y)\} \in' \Pi$
2.  $\{P(u, v), P(u, z), Q(f(u, v))\} \in' \Pi$
3.  $\{Q(f(g(c), c))\}$  Robinson-Resolvent von 1, 2;  
MGU =  $\{x \leftarrow g(c), y \leftarrow c, u \leftarrow g(c), v \leftarrow c, z \leftarrow c\}$   
resolviertes Atom:  $P(g(c), c)$
4.  $\{\neg Q(x)\} \in' \Pi$
5.  $\{\}$  Robinson-Resolvent von 3, 4;  
MGU =  $\{x \leftarrow f(g(c), c)\}$   
resolviertes Atom:  $Q(f(g(c), c))$

**Aufgabe 10.4** Sei  $L = \{ww \mid w \in \{0, 1\}^*\}$ .

Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas für reguläre Sprachen, dass  $L$  nicht regulär ist.

**Lösung** Beweis indirekt. Angenommen,  $L$  ist regulär. Sei dann  $m$  die Konstante aus dem Pumping Lemma und das gewählte Wort z.B.

$$w = 0^m 1 0^m 1.$$

Dann gilt  $w \in L$  und  $|w| = 2m + 2 > m$ .

Wir teilen nun  $w$  in  $xyz$  so auf, dass  $|xy| \leq m$  und  $|y| > 0$ . Nachdem  $|xy| \leq m$  und  $w = 0^m 1 0^m 1$ , kann  $xy$  nur aus Symbolen  $0$  bestehen.

Nach dem Pumping Lemma muss aber  $xy^iz \in L$  für alle  $i \geq 0$  gelten.

Wenn wir nun z.B.  $i = 2$  wählen, müsste auch  $xy^2z = 0^{m+|y|} 1 0^m 1$  aus  $L$  sein, was aber nicht der Fall ist! Wir haben also einen Widerspruch gefunden,  $L$  kann somit keine reguläre Sprache sein.

**Aufgabe 10.5** Sei  $L = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$ .

Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas für kontextfreie Sprachen, dass  $L$  nicht kontextfrei ist.

**Lösung** Beweis indirekt. Nehmen wir an,  $L$  ist kontextfrei. Sei dann  $m$  die Konstante aus dem Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen. Wir wählen nun z.B. das Wort

$$w = \underline{a}^m \underline{b}^m \underline{a}^m \underline{b}^m$$

Für diese Wort  $w$  gilt  $w \in L$  und  $|w| \geq m$ , da  $|w| = 4m$ . Nun zerlegen wir  $w$  in  $uxvyz$  so, dass  $|xvy| \leq m$  und  $|xy| \geq 1$ . Wir wählen  $i = 0$ , d.h.,  $w_0 = ux^0vy^0z = uvz$  Dabei ergeben sich folgende Möglichkeiten:

1.  $xvy$  liegt in der ersten Hälfte des Wortes.

$xvy = \underline{a}^k \underline{b}^j$  wobei  $0 \leq k, j \leq m$ . Nachdem aber  $|xy| \geq 1$ , muss nun zumindest entweder  $k > 0$  oder  $j > 0$  sein. Für  $w_0$  ergibt sich damit  $w_0 = \underline{a}^{m-k} \underline{b}^{m-j} \underline{a}^m \underline{b}^m$ . Nun ist zumindest ein Symbol  $\underline{a}$  oder ein Symbol  $\underline{b}$  in der ersten Worthälfte weggefallen. Damit hat das Wort aber nicht mehr die Form  $ww$  und kann somit nicht in  $L$  sein. WIDERSPRUCH!

2.  $xvy$  liegt in der zweiten Hälfte des Wortes. Hier gilt natürlich analog:

$xvy = \underline{a}^k \underline{b}^j$  wobei  $0 \leq k, j \leq m$ . Nachdem aber  $|xy| \geq 1$ , muss nun zumindest entweder  $k > 0$  oder  $j > 0$  sein. Für  $w_0$  ergibt sich damit  $w_0 = \underline{a}^m \underline{b}^m \underline{a}^{m-k} \underline{b}^{m-j}$ . Nun ist zumindest ein Symbol  $\underline{a}$  oder ein Symbol  $\underline{b}$  in der zweiten Worthälfte weggefallen. Damit hat das Wort aber nicht mehr die Form  $ww$  und kann somit nicht in  $L$  sein. WIDERSPRUCH!

3.  $xvy$  befindet sich in einer „Mittellage“:

$xvy = \underline{b}^k \underline{a}^j$  wobei  $0 \leq k, j \leq m$ . Nachdem aber  $|xy| \geq 1$ , muss nun zumindest entweder  $k > 0$  oder  $j > 0$  sein. Für  $w_0$  ergibt sich damit  $w_0 = \underline{a}^m \underline{b}^{m-k} \underline{a}^{m-j} \underline{b}^m$ . Nun ist zumindest ein Symbol  $\underline{b}$  in der ersten Worthälfte oder ein Symbol  $\underline{a}$  in der zweiten Worthälfte weggefallen. Damit hat das Wort aber nicht mehr die Form  $ww$  und kann somit nicht in  $L$  sein. WIDERSPRUCH!

Wir haben alle möglichen Zerlegungen von  $w$  untersucht, sind aber in jedem Fall auf einen Widerspruch gestoßen, d.h.,  $L$  kann nicht kontextfrei sein.