

# Theoretische Informatik und Logik

## Übungsblatt 1 (SS 2009)

### Lösungen

**Aufgabe 1.1** Berechnen bzw. beschreiben Sie

- |  |  |
|--|--|
| a) $((\{\underline{a}\} \cup \{\varepsilon\})(\{\varepsilon\} \cup \{\underline{b}\})) \cup \{\underline{c}\}$ | b) $\{\underline{0}\}^*(\{\underline{0}\} \cup \{\varepsilon\})$ |
| c) $(\{\underline{1}\}^*\{\underline{1}\}^+)(\{\underline{1}\})^*$   | d) $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{ab}\}\{\}$        |
| e) $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{ab}\} \cap \{\}$  | f) $\{\}^*$  |

**Lösung**

- |   |  |
|---|--|
| a) $((\{\underline{a}\} \cup \{\varepsilon\})(\{\varepsilon\} \cup \{\underline{b}\})) \cup \{\underline{c}\} = \{\varepsilon, \underline{a}, \underline{b}, \underline{ab}, \underline{c}\}$ | b) $\{\underline{0}\}^*(\{\underline{0}\} \cup \{\varepsilon\}) = \{\underline{0}\}^*\{\underline{0}\} \cup \{\underline{0}\}^*\{\varepsilon\} = \{\underline{0}\}^+ \cup \{\underline{0}\}^* = \{\underline{0}\}^*$ |
| c) $(\{\underline{1}\}^*\{\underline{1}\}^+)(\{\underline{1}\})^* = \{\underline{1}\}^+\{\underline{1}\}^* = \{\underline{1}\}^+$   | d) $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{ab}\}\{\} = \{\}$   |
| e) $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{ab}\} \cap \{\} = \{\}$  | f) $\{\}^* = \{\varepsilon\}$  |

**Aufgabe 1.2** Welche der folgenden Gleichungen sind für alle Sprachen  $L_1, L_2, L_3$  gültig? Begründen Sie Ihre Antwort.

- |   |                                  |
|---|----------------------------------|
| a) $L_1(L_2 \cup L_3) = L_1L_2 \cup L_1L_3$ | b) $L_1(L_2L_3) = (L_1L_2)L_3$   |
| c) $L_1L_2 = L_2L_1$                        | d) $L_1 \cup L_2 = L_2 \cup L_1$ |

**Lösung**

- a)  $L_1(L_2 \cup L_3) = L_1L_2 \cup L_1L_3$  ist laut Distributivgesetz für alle Sprachen  $L_1, L_2, L_3$  gültig.
- b)  $L_1(L_2L_3) = (L_1L_2)L_3$  ist für alle Sprachen  $L_1, L_2, L_3$  gültig, da Konkatenation assoziativ ist.
- c)  $L_1L_2 = L_2L_1$  ist nicht für alle Sprachen  $L_1, L_2$  gültig, da Konkatenation nicht kommutativ ist, z.B. für  $L_1 = \{\underline{a}\}$ ,  $L_2 = \{\underline{b}\}$  gilt  $L_1L_2 = \{\underline{ab}\} \neq \{\underline{ba}\} = L_2L_1$ .
- d)  $L_1 \cup L_2 = L_2 \cup L_1$  ist für alle Sprachen  $L_1, L_2$  gültig, da Vereinigung kommutativ ist.

**Aufgabe 1.3** Sei  $T = \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ ,  $L_1 \subseteq T^*$  und  $L_2 = T^* - L_1$  (d.h.  $L_2$  ist das Komplement von  $L_1$ ). Geben Sie

- |                                     |                                      |
|-------------------------------------|--------------------------------------|
| a) die Vereinigung $L_1 \cup L_2$ , | b) den Durchschnitt $L_1 \cap L_2$ , |
| c) $((L_2 - L_1) - L_2)^*$          |                                      |

als reguläre Mengen an.

**Lösung** a)  $L_1 \cup L_2 = T^*$ , da eine Menge vereinigt mit ihrem Komplement die Grundmenge ergibt.

b)  $L_1 \cap L_2 = \{\}$ , da eine Menge geschnitten mit ihrem Komplement die leere Menge ergibt.

c)  $((L_2 - L_1) - L_2)^* = (L_2 - L_2)^* = \{\}^*$

**Aufgabe 1.4** Sei  $G = \langle \{S\}, \{\underline{a}, \underline{b}\}, \{S \rightarrow \underline{a}^m S \underline{b}^3, S \rightarrow \underline{b}^m\}, S \rangle$ , wobei  $m$  Ihre Matrikelnummer (ohne evtl. führende Nullen) ist. Bezeichne  $SF(G, n)$  die Menge aller Satzformen, die in  $G$  in genau  $n$  Schritten ableitbar sind, d.h.  $SF(G, n) = \{w \in \{S, \underline{a}, \underline{b}\}^* \mid S \xrightarrow{n} w\}$ .

- a) Zeigen Sie mittels Induktion, dass  $SF(G, n) = \{\underline{a}^{mn} S \underline{b}^{3n}, \underline{a}^{m(n-1)} \underline{b}^{3(n-1)+m}\}$  für alle  $n \geq 1$ .  
b) Geben Sie  $\mathcal{L}(G)$  an.

### Lösung

- a) Aufgrund der Definition gilt für alle  $n \geq 1$ :  $SF(G, n)$  besteht aus allen Wörtern, die aus  $SF(G, (n-1))$  in genau einem Schritt ableitbar sind, wobei  $SF(G, 0) = S$ .

Induktionsbasis:  $SF(G, 0) = S$  gemäß Definition, nach einmaliger Ableitung folgt daraus trivialerweise  $SF(G, 1) = \{\underline{a}^m S \underline{b}^3, \underline{b}^m\}$ .

Induktionsannahme: Gelte nun  $SF(G, n) = \{\underline{a}^{mn} S \underline{b}^{3n}, \underline{a}^{m(n-1)} \underline{b}^{3(n-1)+m}\}$ .

Induktionsbehauptung: Dann gilt auch  $SF(G, n+1) = \{\underline{a}^{m(n+1)} S \underline{b}^{3(n+1)}, \underline{a}^{mn} \underline{b}^{3n+m}\}$ .

Beweis:  $\underline{a}^{m(n-1)} \underline{b}^{3(n-1)+m}$  besteht nur aus Terminalsymbolen und ist daher nicht ableitbar.  $\underline{a}^{mn} S \underline{b}^{3n}$  kann zu  $\underline{a}^{mn} \underline{a}^m S \underline{b}^3 \underline{b}^{3n} = \underline{a}^{m(n+1)} S \underline{b}^{3(n+1)}$  oder  $\underline{a}^{mn} \underline{b}^m \underline{b}^{3n} = \underline{a}^{mn} \underline{b}^{3n+m}$  abgeleitet werden.

- b)  $\mathcal{L}(G) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (SF(G, n) \cap \{\underline{a}, \underline{b}\}^*) = \{\underline{a}^{mn} \underline{b}^{3n+m} \mid n \geq 0\}$ .

**Aufgabe 1.5** Beweisen Sie *eine dieser* Gleichungen (etwa mittels Induktion):

- a)  $\sum_{i=0}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$  für alle  $n \geq 0$ .  
b)  $\sum_{i=0}^n q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$  für beliebiges  $q \neq 1$  und alle  $n \geq 0$ .

### Lösung

- a) Induktionsbasis: Für  $n = 0$  gilt:  $\sum_{i=0}^n i^3 = 0^3 = 0$  und  $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{0(0+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{0}{2}\right)^2 = 0^2 = 0$ .

Induktionsannahme: Gelte nun  $\sum_{i=0}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ .

Induktionsbehauptung: Dann gilt auch  $\sum_{i=0}^{n+1} i^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$ .

$\sum_{i=0}^{n+1} i^3 = (\sum_{i=0}^n i^3) + (n+1)^3 =$  (laut Induktionsannahme)

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2 \left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right) = (n+1)^2 \left(\frac{(n+2)^2}{4}\right) = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2.$$

- b) Sei  $n \geq 0$  beliebig gewählt. Durch Äquivalenzumformungen wird die Ausgangsgleichung auf eine offensichtlich immer gültige Gleichung reduziert.

$$\sum_{i=0}^n q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Multipliziere beide Seiten mit  $1-q$ .

$$\left(\sum_{i=0}^n q^i\right)(1-q) = 1 - q^{n+1}$$

Vereinfache linke Seite durch Ausmultiplizieren

$$\left(\sum_{i=0}^n q^i\right) - \left(\sum_{j=0}^n q^{j+1}\right) = 1 - q^{n+1}$$

und Umschreiben der Summen ( $k = j+1$ ).

$$q^0 + \left(\sum_{i=1}^n q^i\right) - \left(\left(\sum_{k=1}^n q^k\right) + q^{n+1}\right) = 1 - q^{n+1}$$

Auf der linken Seite fallen die beiden Summen weg:

$$1 - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}$$

q.e.d.