

COMPUTERNUMERIK (106.001)

Prüfung (26. März 2009)

↑ FAMILIENNAME	↑ Vorname	↑ Studium / MatrNr

*Bitte tragen Sie gut leserlich Ihre persönlichen Daten ein. Die Arbeitszeit beträgt 1 3/4 Stunden.
Die Verwendung schriftlicher Unterlagen ist nicht zulässig.*

Bewertung (max. 4×10 Punkte):

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	GESAMT

• **Aufgabe 1.**

- a) Das Gleitpunktzahlensystem $\mathbb{F}(10, 10, -99, 99)$ ist eine typische ‘Taschenrechnerarithmetik’. Geben Sie eine genaue Charakterisierung des dadurch definierten Bereiches von Gleitpunktzahlen an.
- b) Wie lautet die größte natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$, die in diesem Zahlensystem exakt darstellbar ist?
- c) Wie lautet die größte natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass alle $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ exakt darstellbar sind?
- d) Ein Ingenieur weiß nicht so recht, ob er sinnvollerweise (d.h. im Hinblick auf Rechengenauigkeit) mm, cm oder m als Maßeinheit wählen soll, um eine statische Berechnung am Taschenrechner durchzuführen. Was raten Sie ihm und warum?

• **Aufgabe 2.**

a) Die numerische Berechnung von Differenzenquotienten

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

für sehr kleines h ist ein notorisch rechenfehleranfälliges Problem. Z.B. für $f(x) = e^x$ und exakt gegebene $x = 1.000000001$, $h = 0.000000001$ in $\mathbb{F}(10, 10, \dots)$ ergibt sich der sehr ungenaue Wert

$$\frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = 3.000000000 \quad (\text{Rechnung in } \mathbb{F}(10, 10, \dots));$$

der exakte Wert wäre $2.7182818325\dots$

Erklären Sie möglichst ausführlich die Ursache für dieses ungenaue Resultat.

b) Für rein algebraische Funktionen (z.B. Polynome) $f(x)$ ist das relativ einfach zu handhaben.¹ Geben Sie konkret an, wie Sie den obigen Differenzenquotienten für $f(x) = x^3$ und sehr kleines h in Gleitpunktarithmetik auswerten würden (Berechnungsformel!). Argumentieren Sie (qualitativ, in Worten) die numerische Stabilität ihrer Formel.

Falls Zeit: Für eine sauber durchgeführte Rundungsfehleranalyse Ihres Algorithmus gibt es maximal 5 Extra-Bonuspunkte.

¹Transzendente Funktionen wie $f(x) = e^x$ sind hier besonders unangenehm, weil man die Ungenauigkeit mittels Approximationsverfahren umgehen muss.

• **Aufgabe 3.**

- a) Was versteht man unter der LU -Zerlegung einer invertierbaren quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$?
- b) Wie geht man vor, um - bei bereits berechneter LU -Zerlegung - die Lösung $x = A^{-1}b$ eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ zu lösen?
(Beschreiben Sie die Vorgangsweise; ggf. auch ein Stück Pseudocode.)
- c) Bei zeitlich veränderlichen Problemstellungen (z.B. Simulationsprozessen) kommt es vor, dass viele verschiedene Gleichungssysteme $A_i x_i = b_i$ nacheinander zu lösen sind ($i = 0, 1, \dots$). Im Prinzip müsste man also für alle A_i jeweils die LU -Zerlegung berechnen.

Eine spezielle Situation liegt vor, wenn die Matrizen einander 'ähnlich' sind. Wir betrachten konkret zwei Matrizen A, B mit der Eigenschaft

$$B = A + uv^T$$

wobei $u, v \in \mathbb{R}^n$ Spaltenvektoren, und uv^T eine 'datendünne' Matrix (uv^T ist eine $n \times n$ Matrix vom Rang ≤ 1). Dann gilt die Darstellung

$$B^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + v^T A^{-1} u} A^{-1} uv^T A^{-1}$$

Formulieren Sie davon ausgehend einen Algorithmus, der die Lösung $x = B^{-1}b$ eines linearen Gleichungssystems $Bx = b$ mit Hilfe der LU -Zerlegung von A , $A = LU$, berechnet, ohne dass die LU -Zerlegung von B bestimmt werden muss.

(A und B sind als invertierbar vorausgesetzt; insbesondere $1 + v^T A^{-1} u \neq 0$.)

Für eine perfekte Ausarbeitung von c) gibt es maximal 5 Extra-Bonuspunkte.

• **Aufgabe 4.**

Problemstellung: Interpolation einer Funktion $f(x)$ an $d+1$ verschiedenen Knoten x_0, \dots, x_d mit einem Polynom $p(x)$ vom Grad d .

- a) Geben Sie irgendeine explizite formelmäßige Darstellung für das Interpolationspolynom $p(x)$ an.
- b) Warum lässt sich – mit den aus der Vorlesung verfügbaren Kenntnissen – für die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ und $x_i = ih$ ($h =$ Abstand der Stützstellen) keine Fehlerabschätzung angeben? Begründen Sie dies explizit anhand der Abschätzungsformel für den Interpolationsfehler.
- c) Eine Anwendung der Interpolation ist besteht in der Konstruktion von Näherungsformeln für die Berechnung bestimmter Integrale $\int_a^b f(x) dx$. Für eine einfache Funktion wie $f(x) = \sqrt{x}$ benötigt man aber im Prinzip keine numerische Quadratur, wegen der bekannten Integrationsformel (Stammfunktion von \sqrt{x})

$$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C$$

Für welche Lage von a, b ist zu erwarten, dass man aus Genauigkeitsgründen dennoch numerische Quadratur einsetzen muss (Begründung!)?

Das könnte z.B. im einfachsten Fall die summierte Trapezregel sein. Wie lautet diese?

Falls Sie die restlichen leeren Seiten für Ihre Ausarbeitung verwenden, bitte um Verweis auf die jeweilige Aufgabe.