

COMPUTERNUMERIK (106.001)

Prüfung (30. Januar 2009)

↑ FAMILIENNAME	↑ Vorname	↑ Studium / MatrNr

Bitte tragen Sie gut leserlich Ihre persönlichen Daten ein. Die Arbeitszeit beträgt 1 3/4 Stunden.
Die Verwendung schriftlicher Unterlagen ist nicht zulässig.

Bewertung (max. 4 × 10 Punkte):

a)	a)	a)	a)	
b)	b)	b)	b)	
c)	c)	c)	c)	
d)			d)	
Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	GESAMT

• **Aufgabe 1.**

- a) Beschreiben Sie die wesentlichen Eigenschaften eines binären Gleitpunktzahlensystems.
- b) Was ist eine normalisierte Gleitpunktzahl? Machen denormalisierte Gleitpunktzahlen Sinn, bzw. in welchem Zahlenbereich?
- c) Welche *exceptions* können bei Rechnung in Gleitpunktarithmetik auftreten?
- d) Die Größe $q := x^2$ sei für $0 \neq x \in \mathbb{R}$ in Gleitpunktarithmetik zu berechnen. (x ist keine Gleitpunktzahl.)
 - Welche Typen von Fehlern treten auf?
 - Geben Sie eine Abschätzung für den relativen Fehler des numerischen Ergebnisses $\tilde{q} \in \mathbb{F}$ an, in Abhängigkeit von der relativen Maschinengenauigkeit eps .(Exceptions sind hier nicht zu berücksichtigen.)

• **Aufgabe 2.**

- a) Jemand will die Werte der Ableitung $f'(x)$ von Funktionen f möglichst genau mit Hilfe eines einseitigen Differenzenquotienten in einer gegebenen Gleitpunktarithmetik berechnen. (Vorausgesetzt ist, dass für die Funktion f selbst eine korrekte Implementierung in voller Genauigkeit zur Verfügung steht und dass die Auswertungstelle x exakt als Gleitpunktzahl gegeben ist.) Bei einem Test (Beispiel mit bekannter Ableitung) stellt sich bei Verwendung immer kleinerer Schrittweiten h die erwünschte Genauigkeit jedoch nicht ein, sondern es wird eine Stagnation beobachtet.
- Erklären Sie möglichst genau die Ursache für dieses Phänomen.
- b) Angenommen, es steht eine genauere Arithmetik zur Verfügung, aber f kann nur in der ursprünglichen (ungenaueren) Arithmetik ausgewertet werden. Lässt sich damit die Genauigkeit der Berechnung steigern? (Begründung!)
- c) Abgesehen von b) – wie lautet eine verbesserte Methode, um bei gleicher Schrittweite h eine höhere Genauigkeit zu erzielen?
- Ist diese höhere Genauigkeit für beliebiges h mathematisch sicher garantiert? Falls nein: Ist sie wenigstens für hinreichend kleines h garantiert? (Es wird angenommen, dass f eine beliebig oft differenzierbare Funktion ist, aber sonst steht keine Information über f zur Verfügung.)

• **Aufgabe 3.**

- a) Was versteht man unter der Norm eines Vektors und der zugehörigen Norm einer linearen Abbildung bzw. der zugehörigen Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$? Was sind die wichtigsten Eigenschaften? Geben Sie ein konkretes Beispiel für eine ‘gängige’ Norm an.
- b) Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre Matrix, $b \neq 0$, Daten exakt gegeben), und eine Näherungslösung $\tilde{x} \neq 0$ für die exakte Lösung x . Jemand berechnet das (exakte) Residuum $A\tilde{x} - b$ und will daraus auf den Fehler $\tilde{x} - x$ schließen.
- Geben Sie eine Abschätzung der Gestalt

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|\tilde{x}\|} \leq C \frac{\|A\tilde{x} - b\|}{\|b\|}$$

an, mit $C = C(A, b, \tilde{x})$. (Im Nenner links steht \tilde{x} , nicht x !)

- Ist diese Abschätzung für praktische Zwecke geeignet? Insbesondere: Wie geht A in diese Abschätzung ein?

- c) Manchmal gibt es Zusatzinformationen, die weiterhelfen. Angenommen, man weiß von vornherein dass gilt $\|Ay\| \geq \alpha\|y\|$, mit bekanntem α , für beliebige $y \neq 0$. Geben Sie eine Abschätzung wie unter b) an, mit $C = C(\alpha, b, \tilde{x})$.

($\|\cdot\|$ sei irgendeine der gängigen Vektor- bzw. Matrixnormen.)

• **Aufgabe 4.**

Problemstellung: Interpolation einer beliebig oft differenzierbaren Funktion f an $d+1$ verschiedenen Knoten x_0, \dots, x_d mit einem Polynom $p(x)$ vom Grad d .

- a) Argumentieren Sie: Wenn f selbst ein Polynom vom (Maximal)grad d ist, dann ‘rekonstruiert’ man damit dieses Polynom (abgesehen von Rechenfehlereffekten).
- b) Sei $f(x)$ von der Gestalt

$$f(x) = \sqrt{x} g(x), \quad g \text{ glatt (beliebig oft differenzierbar),}$$

und $x_i = ih$, $i = 0 \dots d$. Geben Sie – mit Hilfe der aus der Vorlesung bekannten Fehlerformel – eine Schranke für den Interpolationsfehler auf dem Intervall $[0, dh]$ an. Falls dies nicht möglich sein sollte: Begründung?

(Hinweis: Was passiert im den einfachsten Fällen $d = 0$ bzw. $d = 1$?)

- c) Für spezielle Klassen von Funktionen wählt man oft speziell angepasste Ansätze zur Interpolation. Z.B. in dem unter b) betrachteten Fall: Interpoliere g (nicht f) mit einem Polynom p , und dann ist

$$q(x) := \sqrt{x} p(x)$$

eine Interpolierende von f (aber natürlich selbst kein Polynom).

– Wie lautet die zugehörige Fehlerabschätzung?

- d) Man könnte auch daran denken, direkt das Gleichungssystem

$$q(x_i) := \sqrt{x_i} p(x_i), \quad i = 0 \dots d, \quad x_i = ih$$

aufzustellen und nach den Koeffizienten a_i des gesuchten Polynoms $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_dx^d$ aufzulösen.

- Zeigen Sie: Dieses Gleichungssystem ist linear.
- Ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar? (Begründung!)

