

COMPUTERNUMERIK (106.001)

Prüfung (26. März 2009)

| | | |
|----------------|-----------|--------------------|
| | | |
| ↑ FAMILIENNAME | ↑ Vorname | ↑ Studium / MatrNr |

Bitte tragen Sie gut leserlich Ihre persönlichen Daten ein. Die Arbeitszeit beträgt 1 3/4 Stunden.
Die Verwendung schriftlicher Unterlagen ist nicht zulässig.

Bewertung (max. 4 × 10 Punkte):

| | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|--------|
| | | | | |
| Aufgabe 1 | Aufgabe 2 | Aufgabe 3 | Aufgabe 4 | GESAMT |

• **Aufgabe 1.**

- a) Das Gleitpunktzahlensystem $\mathbb{F}(10, 10, -99, 99)$ ist eine typische ‘Taschenrechnerarithmetik’. Geben Sie eine genaue Charakterisierung des dadurch definierten Bereiches von Gleitpunktzahlen an.
- b) Wie lautet die größte natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$, die in diesem Zahlensystem exakt darstellbar ist?
- c) Wie lautet die größte natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass alle $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ exakt darstellbar sind?
- d) Ein Ingenieur weiß nicht so recht, ob er sinnvollerweise (d.h. im Hinblick auf Rechengenauigkeit) mm, cm oder m als Maßeinheit wählen soll, um eine statische Berechnung am Taschenrechner durchzuführen. Was raten Sie ihm und warum?

• **Aufgabe 2.**

- a) Die numerische Berechnung von Differenzenquotienten

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

für sehr kleines h ist ein notorisch rechenfehleranfälliges Problem. Z.B. für $f(x) = e^x$ und exakt gegebene $x = 1.000000001$, $h = 0.000000001$ in $\mathbb{F}(10, 10, \dots)$ ergibt sich der sehr ungenaue Wert

$$\frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = 3.000000000 \quad (\text{Rechnung in } \mathbb{F}(10, 10, \dots));$$

der exakte Wert wäre $2.7182818325\dots$

Erklären Sie möglichst ausführlich die Ursache für dieses ungenaue Resultat.

- b) Für rein algebraische Funktionen (z.B. Polynome) $f(x)$ ist das relativ einfach zu handhaben.¹ Geben Sie konkret an, wie Sie den obigen Differenzenquotienten für $f(x) = x^3$ und sehr kleines h in Gleitpunktarithmetik auswerten würden (Berechnungsformel!). Argumentieren Sie (qualitativ, in Worten) die numerische Stabilität ihrer Formel.

Falls Zeit: Für eine sauber durchgeführte Rundungsfehleranalyse Ihres Algorithmus gibt es maximal 5 Extra-Bonuspunkte.

¹Transzendente Funktionen wie $f(x) = e^x$ sind hier besonders unangenehm, weil man die Ungenauigkeit mittels Approximationsverfahren umgehen muss.

• **Aufgabe 3.**

- a) Was versteht man unter der LU -Zerlegung einer invertierbaren quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$?
- b) Wie geht man vor, um - bei bereits berechneter LU -Zerlegung - die Lösung $x = A^{-1}b$ eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ zu lösen?

(Beschreiben Sie die Vorgangsweise; ggf. auch ein Stück Pseudocode.)

- c) Bei zeitlich veränderlichen Problemstellungen (z.B. Simulationsprozessen) kommt es vor, dass viele verschiedene Gleichungssysteme $A_i x_i = b_i$ nacheinander zu lösen sind ($i = 0, 1, \dots$). Im Prinzip müsste man also für alle A_i jeweils die LU -Zerlegung berechnen.

Eine spezielle Situation liegt vor, wenn die Matrizen einander ‘ähnlich’ sind. Wir betrachten konkret zwei Matrizen A, B mit der Eigenschaft

$$B = A + uv^T$$

wobei $u, v \in \mathbb{R}^n$ Spaltenvektoren, und uv^T eine ‘datendünne’ Matrix (uv^T ist eine $n \times n$ Matrix vom Rang ≤ 1). Dann gilt die Darstellung

$$B^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + v^T A^{-1} u} A^{-1} uv^T A^{-1}$$

Formulieren Sie davon ausgehend einen Algorithmus, der die Lösung $x = B^{-1}b$ eines linearen Gleichungssystems $Bx = b$ mit Hilfe der LU -Zerlegung von A , $A = LU$, berechnet, ohne dass die LU -Zerlegung von B bestimmt werden muss.

(A und B sind als invertierbar vorausgesetzt; insbesondere $1 + v^T A^{-1} u \neq 0$.)

Für eine perfekte Ausarbeitung von c) gibt es maximal 5 Extra-Bonuspunkte.

• **Aufgabe 4.**

Problemstellung: Interpolation einer Funktion $f(x)$ an $d+1$ verschiedenen Knoten x_0, \dots, x_d mit einem Polynom $p(x)$ vom Grad d .

- a) Geben Sie irgendeine explizite formelmäßige Darstellung für das Interpolationspolynom $p(x)$ an.
- b) Warum lässt sich – mit den aus der Vorlesung verfügbaren Kenntnissen – für die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ und $x_i = ih$ (h = Abstand der Stützstellen) keine Fehlerabschätzung angeben? Begründen Sie dies explizit anhand der Abschätzungsformel für den Interpolationsfehler.
- c) Eine Anwendung der Interpolation ist besteht in der Konstruktion von Näherungsformeln für die Berechnung bestimmter Integrale $\int_a^b f(x) dx$. Für eine einfache Funktion wie $f(x) = \sqrt{x}$ benötigt man aber im Prinzip keine numerische Quadratur, wegen der bekannten Integrationsformel (Stammfunktion von \sqrt{x})

$$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C$$

Für welche Lage von a, b ist zu erwarten, dass man aus Genauigkeitsgründen dennoch numerische Quadratur einsetzen muss (Begründung!)?

Das könnte z.B. im einfachsten Fall die summierte Trapezregel sein. Wie lautet diese?

