Schriftliche Prüfung

Statistik & Wahrscheinlichkeitstheorie

LV:107.285 | STUDIENRICHTUNG: INFORMATIK | VO: PROF. K. FELSENSTEIN

2 STÜNDIG MIT UNTERLAGEN | WS 2005/06

6. DEZEMBER 2005

1) (5 Punkte)

Die Stichprobe der Variable X:

12.5 10.1 19.6 17.4 18.2 9.9 13.7 21.8 16.3 19.6 11.8

wurde unabhängig erhoben von der Stichprobe der Variable Y:

15.2 14.9 15.2 15.2 15.1 12.9 17.4 15.4 15.8 15.0 14.1 16.3

i) Man berechne 2 verschiedene Streuungsparameter zu jeder der beiden Stichproben.

ii) Man zeichne einen *Q-Q-Plot* (Punkte und angepaßte Gerade) an den Werten bei 10%, 30%, 50%, 70%, 90% und berechne alle dafür notwendigen Werte.

2) (6 Punkte)

Eine Firma hat 3 Kundenbetreuer A, B, C, wobei A 55 % , B 30% und C 15% der Kunden kontaktiert. Mit 16 % Wahrscheinlichkeit kann A bei einem Kunden, den er anspricht, einen Vertragsabschluß erreichen, die Erfolgsquote liegt bei B bei 24% und bei C bei 9%.

i) Wieviel Kunden soll A kontaktieren, wenn er mit mehr als 99% Wahrscheinlichkeit mindestens einen Abschluß erreichen will? Man berechne dasselbe für B ud C. ✓

ii) Ein Kunde hat bei dieser Firma einen Vertrag abgeschlossen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Kunde bei A bzw. B oder C den Vertrag abgschlossen hat?

3) (7 Punkte)

Die stochastische Größe X ist auf dem Intervall $(0, 5)$ stetig verteilt (außerhalb dieses Intervalls verschwindet die Dichte). Die Verteilungsfuntion dieser stochastischen Größe ist

$$F(x) = \frac{x^3}{a} \qquad \text{für} \qquad 0 < x < 5$$

i) Man berechne die Konstante a und die Dichte dieser Verteilung.

ii) Es soll der Erwartungswert und die Varianz dieser Verteilung berechnet werden.

iii) Geben Sie die Dichte der stochastischen Größe $Y = \log(X)$ an.

4) (6 Punkte)

In Wien und in Graz wurde bei Umfragen die Bekanntheit eines Produkts bei insgesamt 950 Personen geprüft. Die Anzahl der Personen in den Gruppen gibt die folgende Tabelle an:

	Produkt bekannt	Produkt unbekannt	
WIEN:	195	422	617
GRAZ:	68	242	310
	263	664	

S. 102

Kontingenztafeln

Ist das Produkt in Wien und Graz unterschiedlich bekannt? ($\alpha = 0.05$).

Der Lösungsweg zu einem Resultat soll nachvollziehbar sein. Geben Sie die verwendete Methode an und fügen Sie auch Zwischenergebnisse bei der Berechnung des Resultats an. Bei Zeichnungen ist auf Maßstabstreue und exakte Beschriftung zu achten.

6.12.05

Bsp 1.)

X:	12,5	10,1	19,6	17,4	18,2	9,9	13,7	21,8	16,3	19,6	11,8	
Y:	15,2	14,9	15,2	15,2	15,1	12,9	17,4	15,4	15,8	15,0	14,1	16,3

Varianz | Standardabweichung

$$\bar{x} = 15{,}536 \quad \left(= \frac{1}{11}\left(12{,}5 + 10{,}1 + 19{,}6 + 17{,}4 + 18{,}2 + 9{,}9 + 13{,}7 + 21{,}8 + 16{,}3 + 19{,}6 + 11{,}8\right)\right)$$

$$\bar{y} = 15{,}2083 \quad \left(= \frac{1}{12} \cdot \left(15{,}2 + 14{,}9 + 15{,}2 + 15{,}2 + 15{,}1 + 12{,}9 + 17{,}4 + 15{,}4 + 15{,}8 + 15{,}0 + 14{,}1 + 16{,}3\right)\right)$$

		$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$
$(x_1 - \bar{x})$	12,5 − 15,536	−3,036	9,2173
$(x_2 - \bar{x})$	10,1 − 15,536	−5,436	29,55
$(x_3 - \bar{x})$	19,6 − 15,536	4,064	16,516
$(x_4 - \bar{x})$	17,4 − 15,536	1,864	3,4745
$(x_5 - \bar{x})$	18,2 − 15,536	2,664	7,097
$(x_6 - \bar{x})$	9,9 − 15,536	−5,636	31,764
$(x_7 - \bar{x})$	13,7 − 15,536	−1,836	3,371
$(x_8 - \bar{x})$	21,8 − 15,536	6,264	39,238
$(x_9 - \bar{x})$	16,3 − 15,536	0,764	0,584
$(x_{10} - \bar{x})$	19,6 − 15,536	4,064	16,516
$(x_{11} - \bar{x})$	11,8 − 15,536	−3,736	13,958

		$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$
$y_1 - \bar{y}$	15,2 − 15,2083	−0,0083	0,00006889
$y_2 - \bar{y}$	14,9 − 15,2083	−0,3083	0,0950
$y_3 - \bar{y}$	15,2 − 15,2083	−0,0083	0,00006889
$y_4 - \bar{y}$	15,2 − 15,2083	−0,0083	0,00006889
$y_5 - \bar{y}$	15,1 − 15,2083	−0,1083	0,0117
$y_6 - \bar{y}$	12,9 − 15,2083	−2,3083	5,328
$y_7 - \bar{y}$	17,4 − 15,2083	2,1917	4,8035
$y_8 - \bar{y}$	15,4 − 15,2083	0,1917	0,0367
$y_9 - \bar{y}$	15,8 − 15,2083	0,5917	0,3501
$y_{10} - \bar{y}$	15,0 − 15,2083	−0,2083	0,0434
$y_{11} - \bar{y}$	14,1 − 15,2083	−1,1083	1,2283
$y_{12} - \bar{y}$	16,3 − 15,2083	1,0917	1,1918

Varianz:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

$$s_x^2 = \frac{1}{10} \left(9{,}2173 + 29{,}55 + 16{,}516 + 3{,}4745 + 7{,}097 + 31{,}764 + 3{,}371 + 39{,}238 + 0{,}584 + 16{,}516 + 13{,}958\right)$$

$$s_x^2 = \frac{1}{10} \cdot 171{,}2858 = 17{,}12858 \approx 17{,}129$$

$$s_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

$$s_y^2 = \frac{1}{11} \cdot \left(3 \cdot 0{,}00006889 + 0{,}0950 + 0{,}0117 + 5{,}328 + 4{,}8035 + 0{,}0367 + 0{,}3501 + 0{,}0434 + 1{,}2283 + 1{,}1918\right)$$

$$s_y^2 = \frac{1}{11} \cdot 13{,}0887 \approx 1{,}1899$$

Standardabweichung:

$$s_x = \sqrt{s_x^2} = \sqrt{17{,}129} \approx 4{,}1387$$

$$s_y = \sqrt{s_y^2} = \sqrt{1{,}1899} = 1{,}0908$$

Q - Q - Plot

	Q(x)	Q(y)
10%		
30%		
50%		
70%		
90%		

x:

$n = 11$

$\alpha = 0{,}1 \quad n \cdot \alpha = 1{,}1$

$\alpha = 0{,}3 \quad n \cdot \alpha = 3{,}3$

$\alpha = 0{,}5 \quad n \cdot \alpha = 5{,}5$

$\alpha = 0{,}7 \quad n \cdot \alpha = 7{,}7$

$\alpha = 0{,}9 \quad n \cdot \alpha = 9{,}9$

$x_{(1)} = 9{,}9$

$x_{(2)} = 10{,}1$

$x_{(3)} = 11{,}8$

$x_{(4)} = 12{,}5$

$x_{(5)} = 13{,}7$

$x_{(6)} = 16{,}3$

$x_{(7)} = 17{,}4$

$x_{(8)} = 18{,}2$

$x_{(9)} = 19{,}6$

$x_{(10)} = 19{,}6$

$x_{(11)} = 21{,}8$

$q(0{,}1) = x_{(k+1)} = x_{(2)} = 10{,}1$

$q(0{,}3) = x_{(k+1)} = x_{(4)} = 12{,}5$

$q(0{,}5) = x_{(k+1)} = x_{(6)} = 16{,}3$

$q(0{,}7) = x_{(k+1)} = x_{(8)} = 18{,}2$

$q(0{,}9) = x_{(k+1)} = x_{(10)} = 19{,}6$

$q(0{,}4) = x_{(5)} = 13{,}7$

$q(0{,}6) = x_{(7)} = 17{,}4$

y:

$n = 12$

$\alpha = 0{,}1 \quad n \cdot \alpha = 1{,}2$

$\alpha = 0{,}3 \quad n \cdot \alpha = 3{,}6$

$\alpha = 0{,}5 \quad n \cdot \alpha = 6{,}0$

$\alpha = 0{,}7 \quad n \cdot \alpha = 8{,}4$

$\alpha = 0{,}9 \quad n \cdot \alpha = 10{,}8$

$y_{(1)} = 12{,}9$

$y_{(2)} = 14{,}1$

$y_{(3)} = 14{,}9$

$y_{(4)} = 15{,}0$

$y_{(5)} = 15{,}1$

$y_{(6)} = 15{,}2$

$y_{(7)} = 15{,}2$

$y_{(8)} = 15{,}2$

$y_{(9)} = 15{,}4$

$y_{(10)} = 15{,}8$

$y_{(11)} = 16{,}3$

$y_{(12)} = 17{,}4$

$q(0{,}1) = y_{(2)} = 14{,}1$

$q(0{,}3) = y_{(4)} = 15{,}0$

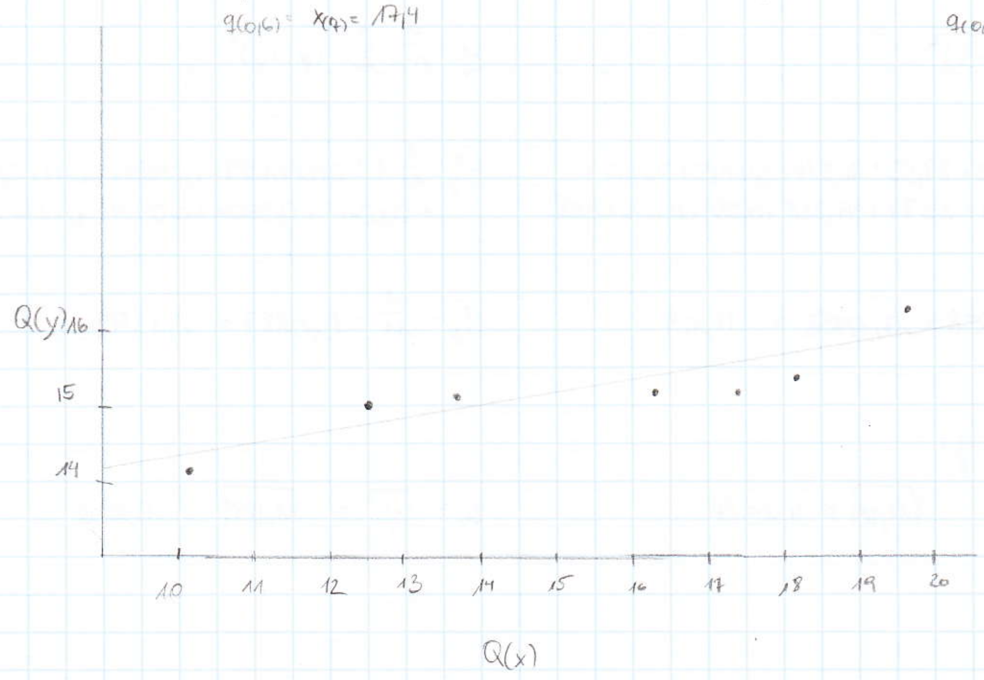
$q(0{,}5) = \frac{1}{2} \cdot (y_{(6)} + y_{(7)}) = \frac{15{,}2 + 15{,}2}{2} = 15{,}2$

$q(0{,}7) = y_{(9)} = 15{,}4$

$q(0{,}9) = y_{(11)} = 16{,}3$

$q(0{,}4) = y_{(5)} = 15{,}1$

$q(0{,}6) = y_{(8)} = 15{,}2$



6.12.2005

2)

Kundenbetreuer	kontaktiert	Vertragsabschlusswahrsch. je Kunde
A	55%	16%
B	30%	24%
C	15%	9%
	der Kunden	

i) Wieviele Kunden soll A kontaktieren, wenn er mit 99% Wahrsch. min. 1 Abschluss erreichen will?

$\Rightarrow$ Gegenwahrscheinlichkeit

$0{,}01 < (1-0{,}16)^n$ $\rightarrow$ n berechnen

$\log(0{,}01) < n \cdot \log(0{,}84)$

$n < \dfrac{\log(0{,}01)}{\log(0{,}84)}$

$n < 26{,}413$

$\Rightarrow$ min. 27 Kunden

für B und C:

$0{,}01 < (1-0{,}24)^n$

$\log(0{,}01) < n \log(0{,}76)$

$n < 16{,}78$ $\rightarrow$ min. 17 Kunden

$0{,}01 < (1-0{,}09)^n$

$\log(0{,}01) < \log(0{,}91)^4 \cdot n$

$n < 48{,}8$ $\rightarrow$ min 49 Kunden

ii) Kunde hat abgeschlossen $\Rightarrow$ P, dass er bei A, B bzw. C abgeschlossen hat

$$P(A|B,C) = \frac{h_a \cdot p_a}{h_a \cdot p_a + h_b \cdot p_b + h_c \cdot p_c} = \frac{0{,}55 \cdot 0{,}16}{0{,}55 \cdot 0{,}16 + 0{,}3 \cdot 0{,}24 + 0{,}15 \cdot 0{,}09} = \frac{0{,}088}{0{,}1735} = 50{,}72\%$$

$$P(B|A,C) = \frac{h_b \cdot p_b}{h_a \cdot p_a + h_b \cdot p_b + h_c \cdot p_c} = \frac{0{,}072}{0{,}1735} = 0{,}415 = 41{,}5\%$$

$$P C(A,B) = \frac{h_c \cdot p_c}{h_a \cdot p_a + h_b \cdot p_b + h_c \cdot p_c} = \frac{0{,}0135}{0{,}1735} = 0{,}0778 = 7{,}78\%$$

$\Sigma \Rightarrow \approx 100\%$

6.12.05

3) X stetig verteilt für $0 < x < 5$ sonst 0

$F(x) = \frac{x^3}{a}$ für $0 < x < 5$

i) a, Dichte der Verteilung

$f(x) = F'(x) = \left(\frac{x^3}{a}\right)'$

$f(x) = \frac{1}{a} \cdot 3x^2$

$1 = \int_0^5 \frac{1}{a} \cdot 3x^2 \, dx$

$1 = \frac{1}{a} \cdot 3 \cdot \int_0^5 x^2 \, dx$

$1 = \frac{3}{a} \cdot \left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^5$

$1 = \frac{3}{a} \cdot \left(\frac{5^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{3}{a} \cdot \left(\frac{125}{3} - 0\right) = \frac{\cancel{3}}{a} \cdot \frac{125}{\cancel{3}} = \frac{125}{a}$

$a = 125$

$F(x) = \frac{x^3}{125}$ $\quad f(x) = \frac{1}{125} \cdot 3x^2$

ii) Erwartungswert Varianz

$\mathbb{E}X = \int x \, f(x) \, dx = \int_0^5 x \cdot \frac{3x^2}{125} \, dx = \int_0^5 \frac{3x^3}{125} \, dx = \frac{3}{125} \cdot \int_0^5 x^3 \, dx =$

$= \frac{3}{125} \cdot \left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^5 = \frac{3}{125} \cdot \frac{625}{4} = 3{,}75$

$var(X) = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 \Rightarrow$

$\mathbb{E}X^2 = \int_0^5 x^2 \cdot \frac{3x^2}{125} \, dx = \frac{3}{125} \int_0^5 x^4 \, dx = \frac{3}{125} \cdot \frac{x^5}{5}\Big|_0^5 = \frac{3}{125} \cdot \frac{5^5}{5} = 15$

$var(X) = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = 15 - 3{,}75^2 = 0{,}9375$

iii) Dichte von $Y = \log(X)$

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\log(x) \leq y) = P(x \leq 10^y)$ bei ln: e^y

$F(y) = \frac{(10^y)^3}{125}$

$f(y) = \left(\frac{(10^y)^3}{125}\right)' = \frac{3 \cdot 10^{3x}}{125}$

$F_Y(y) = P(Y \leq y) \overset{\text{für } Y = \log(x) \text{ einsetzen}}{=} P(\log(x) \leq y) \underset{x \text{ freistellen}}{=} P(x \leq 10^y)$ oder $P(x \leq e^y)$

Dann statt x die rechte Seite der Ungleichung einsetzen

6.12.2005

4)

	bekannt	nicht bekannt	
WIEN	195	422	617
GRAZ	68	242	310
	263	664	927

$$\hat{\chi}^2 = 927 \cdot \frac{(195 \cdot 242 - 422 \cdot 68)^2}{263 \cdot 664 \cdot 617 \cdot 310}$$

$$\hat{\chi}^2 = 9{,}4923$$

Die Hypothese wird verworfen, da $\hat{\chi}^2 > \chi^2_{1;0,95}$

→ Unterschiedlicher Bekanntheitsgrad

$$\chi^2_{1;0,95} = 3{,}841$$

$\nu \quad p = 1-\alpha$

$(k-1)(l-1) = 1$

6.12.2005

(1) S.11/12

X: 12.5, 10.1, 19.6; 17,4, 18.2, 9.9, 13.7, 21.8, 16.3, 19.6, 11,8 $n=11$

Y: 15.2, 14.9, 15.2, 15.2, 15.1, 12.9, 17.4, 15.4, 15.8, 15.9, 14.1, 16.3 $n=12$

i	$x_i-\bar{x}$	$y_i-\bar{y}$
1	-3,036	-0,008
2	-5,436	-0,308
3	4,064	-0,008
4	1,864	-0,008
5	2,664	-0,108
6	-5,636	-2,308
7	-1,836	2,192
8	6,264	0,192
9	0,764	0,592
10	4,064	-0,208
11	-3,736	-1,108
12	/	1,092

$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum x_i = \frac{12,5+10,1+19,6+\dots}{11} = 15,536$

$\bar{y} = \frac{182,5}{12} = 15.208$

X: Varianz $\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{171,285}{10} = 17,129$

X: Standardabw. $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 4,139$

Y: $\sigma^2 = \frac{13,089}{11} = \cancel{1,190}\ 1,190$

Y: $\sigma = 1,091$

S.17

für X_{sort} QQ Plot X: 9,9; 10,1; 11,8; 12,5; 13,7; 16,3; 17,4; 18,2; 19,6; 19,6; 21,8;

$q_{0,1}$: $\alpha=0,1$ $n=11$ $K = 11 \cdot 0,1 = 1,1 \Rightarrow K=1$

$q_{0,1} = x_{(K+1)} = x_2 = 10,01$

$q_{0,3}$: $\alpha=0,3$ $n=11$ $K = 11 \cdot 0,3 = 3,3 \Rightarrow K=3$

$q_{0,3} = x_{(K+1)} = x_4 = 12,5$

$q_{0,5}$ $\alpha=0,5$ $n=11$ $K = 11 \cdot 0,5 = 5,5 \Rightarrow K=5$

$q_{0,5} = \tilde{x} = x_{(K+1)} = x_6 = 16,3$

$q_{0,7}$ $\alpha=0,7$ $n=11$ $K = 11 \cdot 0,7 = 7,7 \Rightarrow K=7$

$q_{0,7} = x_{(K+1)} = x_8 = 18,2$

$q_{0,9}$: $\alpha=0,9$ $= 9,9$ $K=9$

$q_{0,9} = x_{10} = 19,6$

ü Y QQ - Plot

Y: 12,8 ; 14,1 ; 14,8 ; 15,0 ; 15,1 ; 15,2 ; 15,2 ; 15,2 ; 15,4 ; 15,8 ; 16,3 ; 17,4

$q_{0,1} =$ $\alpha = 0,1$ $n = 12$ $K = 0,1 \cdot 12 = 1,2 \Rightarrow K = 1$

$q_{0,1} = x_{(k+1)} = x_2 \Rightarrow K: 14,1$

$q_{0,3} =$ $K = 3,6 \Rightarrow K = 3$

$q_{0,3} = x_{(k+1)} = x_4 = K: 15,0$

$q_{0,5}$ $K = 6 \Rightarrow K = 6$

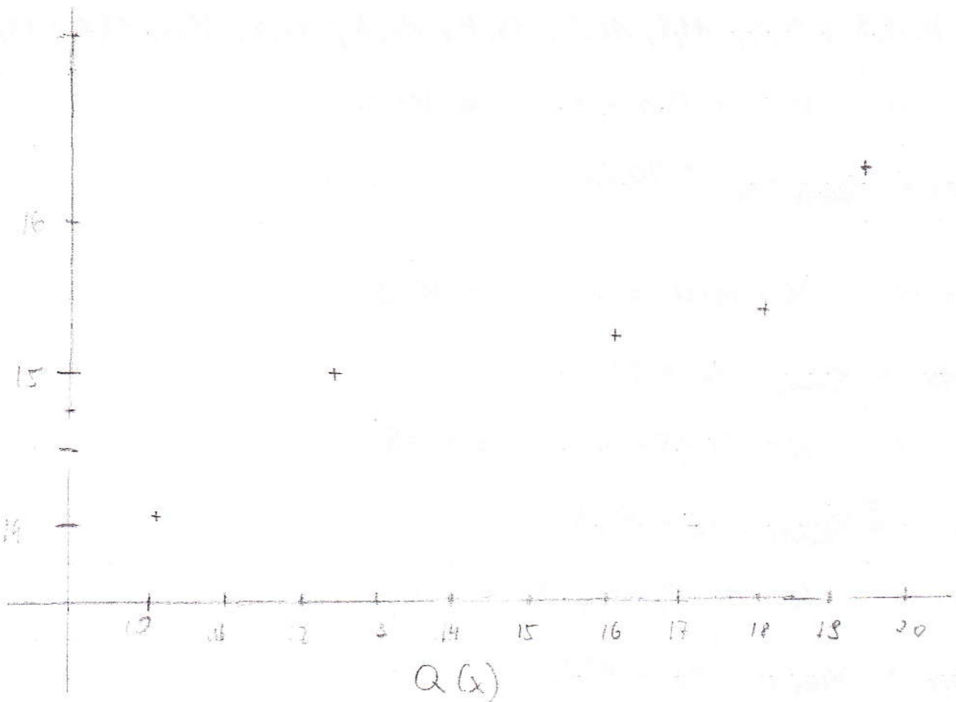
$q_{0,5} = \cancel{x_{(k+1)}} \; \frac{x_6 + x_7}{2} = 15,2$

$q_{0,7}$ $K = 8,4 \Rightarrow K = 8$

$x_9 = 15,4$

$q_{0,9}$ $K = 10,8 \Rightarrow K = 10$

$x_{11} = 16,3$



6.12.05

(2)

	Kontaktlint	Vertragsabschluss
A:	55 %	16 %
B	30 %	24 %
C	15 %	9 %

(i)

für A:

$0{,}01 < (1-0{,}16)^n$

$0{,}01 < 0{,}84^n$

$\frac{\log(0{,}01)}{\log(0{,}84)} = n$

$26{,}413 = n$

mind bei 27ten Kunden

für B

$0{,}01 < (1-0{,}24)^n$

$0{,}01 < 0{,}76^n$

$\frac{\log 0{,}01}{\log 0{,}76} = n$

$16{,}78 = n$

mind 17 Kunden

für C

$0{,}01 < (1-0{,}09)^n$

$0{,}01 < 0{,}91^n$

$48{,}83 = n$

mind 49 Kunden

(ii)

A: $P(A) = \frac{0{,}55 \cdot 0{,}16}{0{,}55 \cdot 0{,}16 + 0{,}3 \cdot 0{,}24 + 0{,}15 \cdot 0{,}09} = \frac{0{,}088}{0{,}1735} = 0{,}507 = 50{,}7\ \%$

$P(B) = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}24}{0{,}1735} = 0{,}415 = 41{,}5\ \%$

$P(C) = \frac{0{,}15 \cdot 0{,}09}{0{,}1735} = 0{,}078 = 7{,}8\ \%$

(3)

(i) Dichte: $F(x) = \frac{x^3}{Q} \qquad 0 < x < 5$

$f(x) = \left(\frac{x^3}{Q}\right)'$

$f(x) = \frac{3x^2}{Q}$

$1 = \int_0^5 \frac{3x^2}{Q}\, dx$

$1 = \frac{3}{Q} \cdot \left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^5 \Rightarrow 1 = \frac{3}{Q} \cdot \left(\frac{\cancel{0^3}}{3} + \cancel{\frac{4}{Q}} \cdot \frac{125}{3}\right) = \frac{3}{Q} \cdot \frac{125}{3} = \frac{125}{Q}$

$\Rightarrow \underline{\underline{Q = 125}}$

$\underline{\underline{F(x) = \frac{x^3}{125}}} \Rightarrow \underline{f(x) = \frac{3x^2}{125}}$

(ii) Varianz:

$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx \Rightarrow EX = \int_0^5 \frac{3x^3}{125}\, dx = \frac{3}{125} \cdot \int_0^5 x^3\, dx = \frac{3}{125} \cdot \frac{5^4}{4} = \underline{\underline{3\tfrac{3}{4}}}$

$x^2 \cdot \frac{3x^2}{125}$

$EX^2 = \int_0^5 \frac{3x^4}{125}\, dx = \frac{3}{125} \int_0^5 x^4 = \frac{3}{125} \cdot \frac{5^5}{5} = \underline{\underline{15}}$

$\operatorname{var}(x) = EX^2 - (EX)^2 = 15 - \left(3\tfrac{3}{4}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{15}{16}}}$

$\Rightarrow$

(3)
(iii)

$Y = \log(X)$

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\log(x) \leq y) = P(x \leq e^y)$! wenn $\log(x)$ ein ln ist!

$F(y) = \frac{(e^y)^3}{125}$

$f(y) = \left(\frac{e^{3y}}{125}\right)' = \frac{3 \cdot e^{3y}}{125}$

(4)

	b	v	
W	155	422	617
G	68	242	310
	263	664	

$\alpha = 0{,}05$

$n = 155 + 422 + 68 + 242 = 927$

$\chi^2 = n \cdot \frac{(H_{11} \cdot H_{22} - H_{12} \cdot H_{21})^2}{H_{1\cdot} \cdot H_{2\cdot} \cdot H_{\cdot 1} \cdot H_{\cdot 2}} = 927 \cdot \frac{(155 \cdot 242 - 68 \cdot 422)^2}{617 \cdot 310 \cdot 263 \cdot 664} = 9{,}492$

$\chi^2_{1;1-\alpha} = \chi^2_{1;0{,}95} = 3{,}841$

$\uparrow \; \uparrow$

$v \;\; p$ ← Tabelle 4

$(\chi^2)^2 > \chi^2_{1;0{,}95}$

$9{,}4923 > 3{,}841$ ← nicht gleich bekannt