TIL - Uebungsblatt 1 (SS 2008)

Serkan Tektas - 0026902

March 25, 2008

Theoretische Informatik und Logik-Uebung 1 (SS 2008)

1 Uebungsblatt 1 - SS 2008

1.1 Berechnen bzw. beschreiben Sie

a) $\{1, 10, 11\} \cap \{\} = \{\}$
b) $\{\underline{1}, \underline{10}, \underline{11}\}\{\} = \{\}$
c) $\{\underline{a}\}^*(\{\underline{a}\} \cup \{\varepsilon\}) = \{\underline{a}\}^+$
d) $(\{\underline{a}\}^*\{\underline{a}\}^+)\{\underline{a}\}^* = \{\underline{a}\}^*$
e) $\{\}^* = \{\varepsilon\}$
f) $(\{\underline{0}\} \cup \{\varepsilon\})(\{\varepsilon\} \cup \{\underline{1}\}) = \{\underline{0}, \varepsilon\}\{\varepsilon, \underline{1}\} = \{\underline{0}, \underline{01}, \varepsilon, \underline{1}\}$

1.2 Welche der folgenden Gleichungen sind fuer alle Sprachen L_1, L_2, L_3 gueltig? Begruenden Sie Ihre Antwort.

a)$L_1L_2 = L_2L_1$
ist ungueltig
Begruendung:
z.B. sei $\Sigma = \{0, 1\}$ und $L_1 = \{0, 00\}$ und $L_2 = \{1, 11\}$
$L_1L_2 = \{01, 011, 001, 0011\} \neq L_2L_1 = \{10, 100, 110, 1100\}$

b)$L_1 \cup L_2 = L_2 \cup L_1$
ist gueltig
Begruendung:
z.B. sei $\Sigma = \{0, 1\}$ und $L_1 = \{0, 00\}$ und $L_2 = \{1, 11\}$
$L_1L_2 = \{0, 00, 1, 11\} = L_2L_1 = \{1, 11, 0, 00\}$

c)$L_1(L_2 \cup L_3) = L_1L_2 \cup L_1L_3)$
ist gueltig
Begruendung:
z.B. sei $\Sigma = \{0, 1\}$ und $L_1 = \{0, 00\}$ und $L_2 = \{1, 11\}$ und $L_2 = \{111, 1111\}$
$L_1(L_2 \cup L_3) = \{0, 00\}\{1, 11, 111, 1111\} = \{01, 011, 0111, 01111, 001, 0011, 00111, 001111\}$
$L_1(L_2 \cup L_3) = \{01, 011, 0111, 01111, 001, 0011, 00111, 001111\}$
$=$
$L_1L_2 \cup L_1L_3 = \{01, 011, 001, 0011\} \cup \{001, 0011, 00111, 001111\}$
$L_1L_2 \cup L_1L_3 = \{01, 011, 0111, 01111, 001, 0011, 00111, 001111\}$

d)$(L_1 \cup L_2)^+ = L_1^+ \cup L_2^+$
ist ungueltig
Begruendung:
z.B. sei $\Sigma = \{0, 1\}$ und $L_1 = \{0\}$ und $L_2 = \{1\}$
$(L_1 \cup L_2)^+ = \{0, 1\}^+ = \{0, 1, 00, 11, 01, 10, ...\}$
$\neq$
$L_1^+ \cup L_2^+ = \{0, 00, 000, 0000, ..., 1, 11, 111, 1111, ...\}$

1.3 Seien folgende Sprachen gegeben

$L_1 = \{\omega \in \{\underline{0}, \underline{1}\}^* \mid\mid \omega \mid_{\underline{1}} = 2n, n \geq 0\}$, $L_2 = \{\omega \in \{\underline{0}, \underline{1}\}^* \mid\mid \omega \mid_{\underline{1}} = 2n+1, n \geq 0\}$. das $|w|_{\underline{1}}$ is die anzahl von 1 im Wort. Also bei L_1 gerade Anzahl von 1 und beliebige Anzahl von 0, bei L_2 ungerade Anzahl von 1, beliebige Anzahl von 0, kann aber nicht nur aus 0s bestehn, L_1 schon. Gesucht ist
Vereinigung $\Rightarrow L_1 \cup L_2 = \{\underline{0}, \underline{1}\}^*$

Durchschnitt $\Rightarrow L_1 \cap L_2 = \{\}^*$

Komplement von $L_2 \Rightarrow \{\underline{0}, \underline{1}\}^* - L_1 =$
$L_2 = L_1$

1.4 Sind folgende Aussagen korrekt? Begruenden Sie Ihre Antwort.

a) Fuer jedes Paar regulaere Mengen R und S sind die durch $(RS)^*R$ und $R(SR)^*$ bezeichneten mengen gleich?

b) Wenn L eine regulaere und F eine endliche Menge ist, dann ist $F \cup L$ eine regulaere Menge.

c) Die Vereinigung unendlich vieler regulaerer Mengen ist wieder regulaer.

1.5 Fuer eine Sprache L definieren wir:

INIT(L) := $\{x \mid$ x ist Praefix von ω fuer ein $\omega \in L\}$
ANF(L) := $\{x \mid card(\{y \in L \mid$ x ist Praefix von y $\}) = \infty\}$
INIT(L) enthaelt also alle Praefixe von Woertern in L, wahrend ANF(L) nur jene Woerter aus INIT(L) enthaelt, die einen Praefix unendlich vieler Woerter in L darstellen.
a) Geben Sie INIT(L) und ANF(L) fuer $L_1 = \{\underline{a}^n \underline{b}^n \mid n \geq 0\}$ und $L_2 = \{\underline{a}^n \underline{b}^m \mid 0 \leq n \leq m\}$ an.

b) Was folgt aus card(INIT(L)) ¡ ∞ fuer card(L) und card(ANF(L))?

TIL - Übungsblatt 2 (SS 2008)

ausgearbeitet von azadi

1. August 2008

Theoretische Informatik und Logik-Übung (SS 2008)

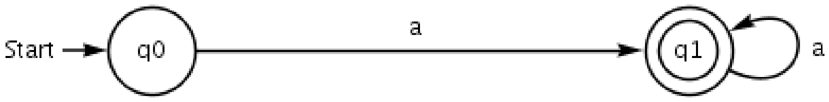
Übungsblatt 2 - SS 2008

2.1 Geben Sie alle Minimalautomaten ber dem Eingabealphabet $\{\underline{a}\}$ mit genau zwei Zuständen (inklusive Falle) sowie die dazugehörigen akzeptierten Sprachen an

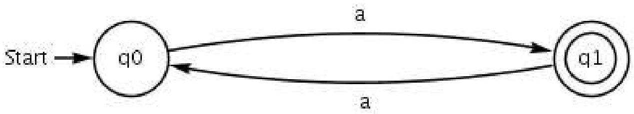
DEA: In jedem Zustand gibt es für ein bestimmtes Eingabezeichen höchstens einen Folgezustand. Alle Kanten, die von einem Knoten wegführen, haben verschiedene Bezeichnungen.
$A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$
Q....eine endliche Menge von Zuständen
$q_0 \in Q$ = Anfangszustand
$F \subseteq Q$ = Menge von Endzuständen
Σ = Eingabealphabet
$\delta : Q \times \Sigma \to Q$ = übergangsfunktion

NEA: In jedem Zustand gibt es es für ein bestimmtes Eingabezeichen mindestens einen Folgezustand. Verschiedene Kanten, die von einem Knoten zu weiteren Knoten wegführen, können die gleiche Bezeichnung haben.
$A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$
Q....eine endliche Menge von Zuständen
$q_0 \in Q$ = Anfangszustand
$F \subseteq Q$ = Menge von Endzuständen
Σ = Eingabealphabet
$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to P(Q)$ = übergangsfunktion

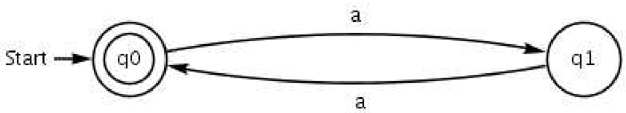
Minimalautomat: Ist die spezialisierte Form der DEA. Denn für jede reguläre Sprache gibt es einen bis auf Umbenennung der Zustände eindeutig bestimmten DEA, der minimal in der Zahl der Zustände ist.



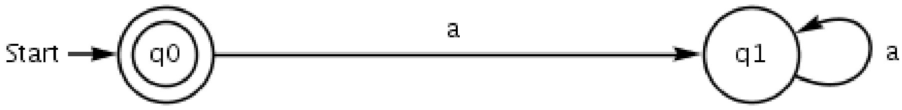
$\{\underline{a}\} \circ \{\underline{a}\}^* \rightarrow \{a\}^+$



$\{\underline{a}\} \circ \{\underline{aa}\}^*$

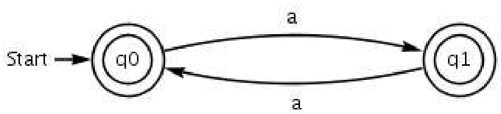


$\{\underline{aa}\}^*$

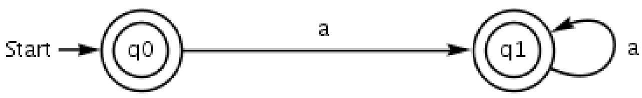


Falle $-- > \{\varepsilon\}$

Folgende Automaten könnte man auch konstruieren. Sind DEAs jedoch keine Minimalautomaten, weil man die Zustände noch reduzieren könnte.



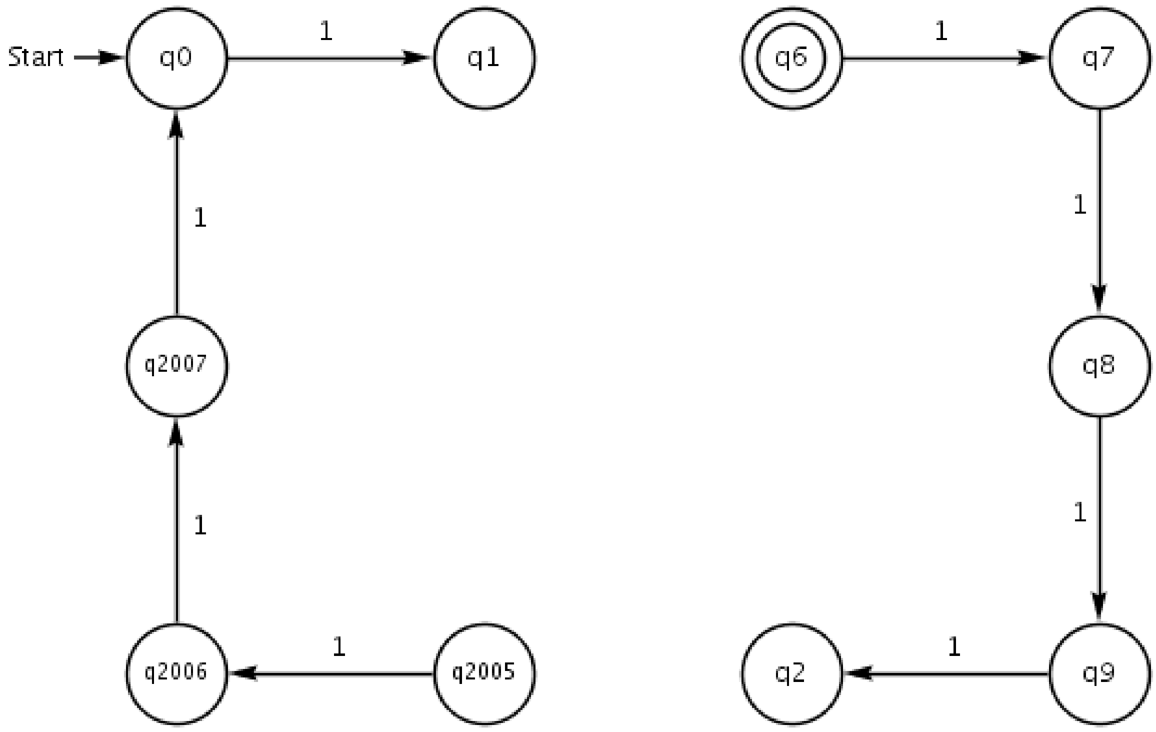
$\{\underline{a}\}^*$



$\{\underline{a}\}^*$

2.2) Geben Sie die formale Definition eines Minimalautomaten für die Sprache $\{\underline{1}^{2008}\}^*\{\underline{1}\}^6$ an

Man kann $\{\underline{1}^{2008}\}^*\{\underline{1}\}^6$ auch als $\{1^n \mid n \equiv 6 \bmod 2008\}$ darstellen.Es ist einfach nachvollziehbar. Durch den Ausdruck $\{\underline{1}^{2008}\}^*$ wissen wir, dass der Ausdruck 0 mal vorkommen kann, oder aber öfters, da die Definition von Klee-Stern ε aber auch vielfaches von dem Ausdruck (in unserem Fall $\{\underline{1}^{2008}\} \circ \{\underline{1}^{2008}\} \circ ... \{\underline{1}^{2008}\}$) sein kann. Wir wissen auch, dass der Ausdruck $\{\underline{1}^6\}$ einmal vorkommen muss und den Automaten in den Endzustand bringt. Also muss der Automat folgendermassen sein

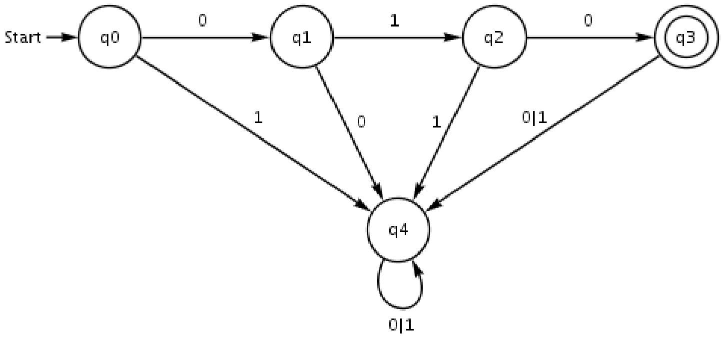


2.3) Sei $L = \{\underline{0}, \underline{1}\}^*\{\underline{010}\}$. Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten A an, der L akzeptiert. Beschreiben Sie A sowohl formal als auch durch einen Graphen.

$L = \{\underline{0}, \underline{1}\}^*\{\underline{010}\}$ kann man auch als $L = L_1 - L_2$ betrachten, wobei $L_1 = \{\underline{0}, \underline{1}\}^*$ und $L_2 = \{\underline{010}\} \rightarrow L_1 - L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$

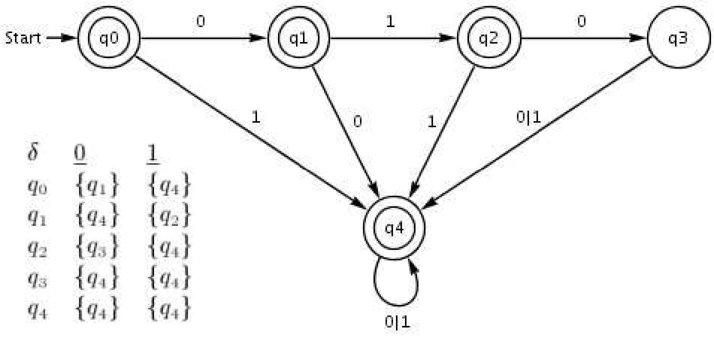
.

1) Erstellen von einem Automaten, der die Eingabe $\{\underline{010}\}$ akzeptiert



2a) Komplementbildung der oben erstellten Automaten

Das Komplement einer Sprache L über einem Alphabet Σ ist die Sprache $\overline{L}$, die alle Wörter in Σ^* enthält, die nicht in L sind: $\overline{L} = \Sigma^* - L = \{\omega \in \Sigma^* \mid \omega \notin L\}$. Alle Endzustände werden zur Nicht-Endzustände, und alle Nicht-Endzustände werden zu Endzuständen.



δ	$\underline{0}$	$\underline{1}$
q_0	$\{q_1\}$	$\{q_4\}$
q_1	$\{q_4\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_3\}$	$\{q_4\}$
q_3	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$
q_4	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$

Formal: $A = \langle\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{\underline{0}, \underline{1}\}, \delta, q_0, \{q_0, q_1, q_2, q_4\}\rangle$

$\delta(q_0, \underline{0}) = q_1$ — $\delta(q_0, \underline{1}) = q_4$

$\delta(q_1, \underline{0}) = q_4$ — $\delta(q_1, \underline{1}) = q_2$;

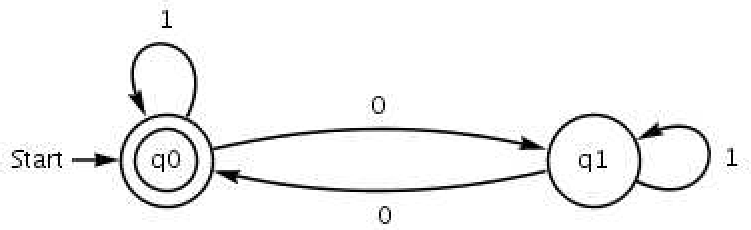
$\delta(q_2, \underline{0}) = q_3$ — $\delta(q_2, \underline{1}) = q_4$;

$\delta(q_3, \underline{0}) = q_4$ — $\delta(q_3, \underline{1}) = q_4$;

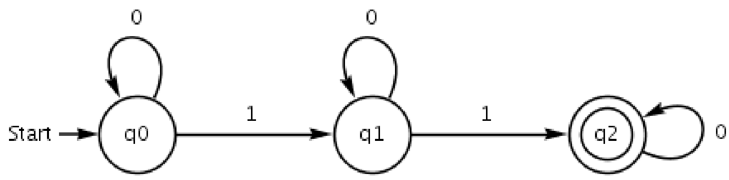
$\delta(q_4, \underline{0}) = q_4$ — $\delta(q_4, \underline{1}) = q_4$

2.4) Entwerfen Sie einen NEA mit genau 6 Zuständen, der die Sprache $\{\omega \in \{\underline{0}, \underline{1}\}^* \mid$ w enthält eine gerade Anzahl von Nullen oder genau 2 Einsen$\}$ akzeptiert.
Zu der Lösung kommt man, in dem man Teillösungen vereint.

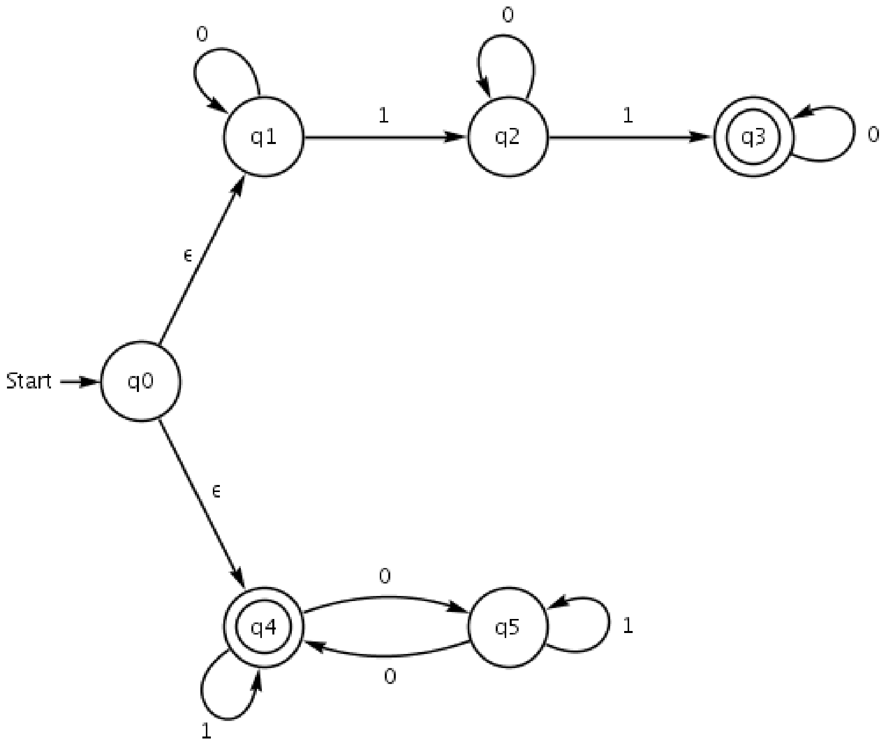
1) Erstellen von einem Automaten, der genau gerade Anzahl von Nullen erlaubt



2) Erstellen von einem Automaten, der genau 2 Einser erlaubt



3) Beide Automaten zusammenführen. Man fügt ein neues Startzustand, der dann jeweils mit einem ε zu den jeweiligen "Teilautomaten" hüpft.

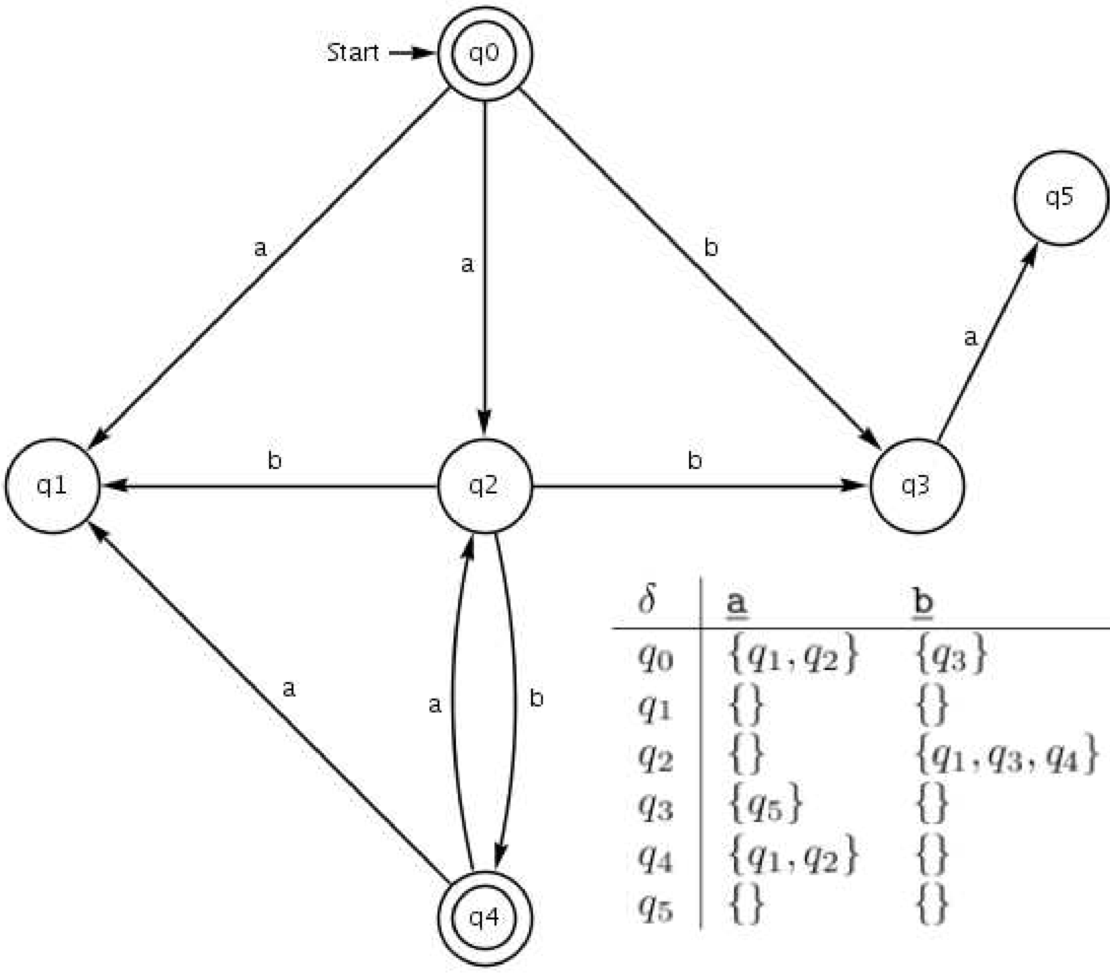


<u>Formal:</u> $A = \langle \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{\underline{0}, \underline{1}\}, \delta, q_0, \{q_3, q_4\} \rangle$

δ	$\underline{0}$	$\underline{1}$	e
q_0	$\{\}$	$\{\}$	$\{q_2, q_4\}$
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{\}$
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\{\}$
q_3	$\{q_3\}$	$\{\}$	$\{\}$
q_4	$\{q_5\}$	$\{q_4\}$	$\{\}$
q_5	$\{q_4\}$	$\{q_5\}$	$\{\}$

2.5) Konvertieren Sie folgende NEA A in einen äquivalenten DEA und geben Sie die vom DEA akzeptierte Sprache an: $A = (\{q_i | 0 \leq i \leq 5\}, \{\underline{a}, \underline{b}\}, \delta, q_0, \{q_0, q_4\})$

<u>NEA</u>



δ	$\underline{a}$	$\underline{b}$
q_0	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_3\}$
q_1	$\{\}$	$\{\}$
q_2	$\{\}$	$\{q_1, q_3, q_4\}$
q_3	$\{q_5\}$	$\{\}$
q_4	$\{q_1, q_2\}$	$\{\}$
q_5	$\{\}$	$\{\}$

Determinisierungsalgorithmus

Zu jedem NEA gibt es einen DEA, der dieselbe Sprache akzeptiert.

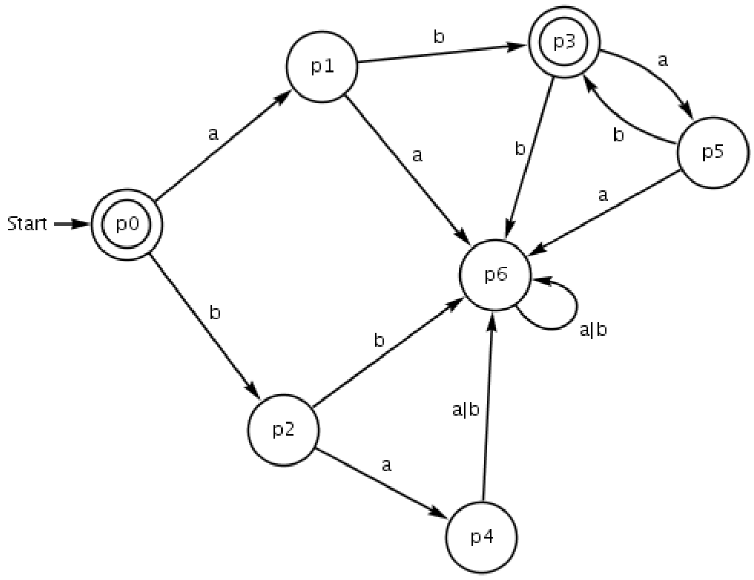
Übergangstabelle Menge der möglichen Nachfolgerzustände

δ^*	$\delta'(.,a)$	$\delta'(.,b)$	$\in F?$
$\{q_0\}$	$\{q_1,q_2\}$	$\{q_3\}$	$\notin F$
$\{q_1,q_2\}$	$\{\}$	$\{q_1,q_3,q_4\}$	$\notin F$
$\{q_3\}$	$\{q_5\}$	$\{\}$	$\in F$
$\{q_1,q_3,q_4\}$	$\{q_1,q_2,q_5\}$	$\{\}$	$\notin F$
$\{q_5\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\notin F$
$\{q_1,q_2,q_5\}$	$\{\}$	$\{q_1,q_3,q_4\}$	$\in F$

Tabelle für die DEA

δ	$\underline{a}$	$\underline{b}$	$\in F?$
$\{p_0\}$	$\{p_1\}$	$\{p_2\}$	$\notin F$
$\{p_1\}$	$\{\}$	$\{p_3\}$	$\in F$
$\{p_2\}$	$\{p_4\}$	$\{\}$	$\notin F$
$\{p_3\}$	$\{p_5\}$	$\{\}$	$\notin F$
$\{p_4\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\notin F$
$\{p_5\}$	$\{\}$	$\{p_3\}$	$\in F$

DEA mit p_6 als Falle



Minimalisierungsalgorithmus

Für jede reguläre Sprache gibt es einen bis auf Umbenennung der Zustïde eindeutig bestimmten DEA, der minimal in der Zahl der Zustände ist.

.

.

1) Entferne alle Zustände, die nicht vom Anfangszustand aus erreichbar sind.

.

.

2) Markiere alle Zustandspaare (p,q) als unterscheidbar, für die $p \in F$ und $q \in F$ gilt oder umgekehrt, da jeder Endzustand von jedem Nicht-Endzustand durch das Leerwort unterscheidbar ist.

.

.

3) Wiederhole den folgenden Schritt, bis keine weiteren Zustandpaare mehr als unterscheidbar markiert werden können:

.

.

Berechne für alle Zustandpaare (p,Q) und alle $a \in \Sigma$ das Nachfolgepaar $(\delta(p, a), \delta(q, a))$; ist letzteres bereits als unterscheidbar markiert, markiere auch (p,q) als unterscheidbar.

.

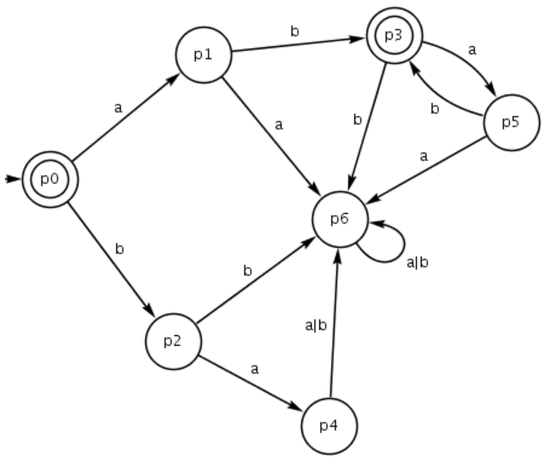
.

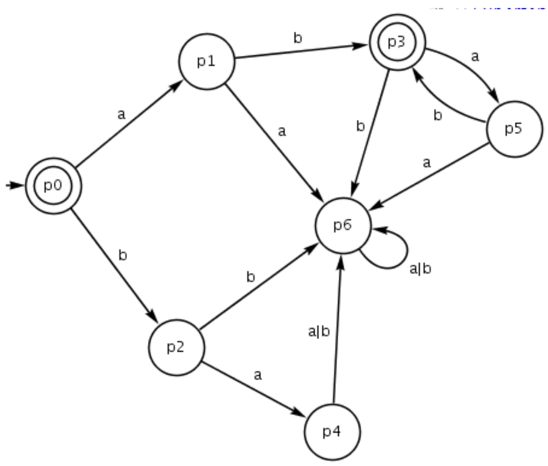
4. Fasse alle voneinander ununterscheidbaren Zustände zu einem einzigen zusammen. D.h. sind p und q ununterscheidbar, dann ersetze jeden Übergang nach q im ursprünglichen Automaten durch einen nach p im minimierten Automaten und entferne q.

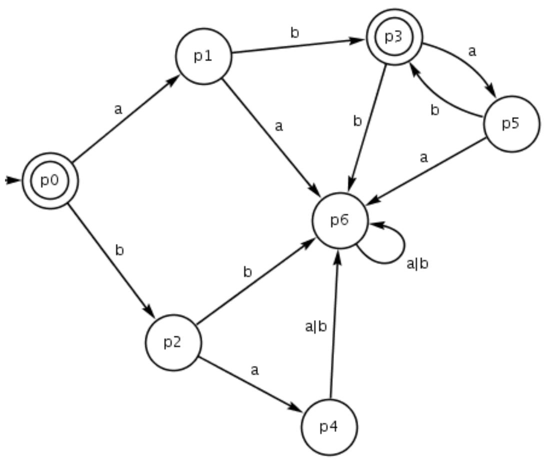
Zusatzaufgabe: Geben Sie den Minimalautomaten fuer diese Sprache an

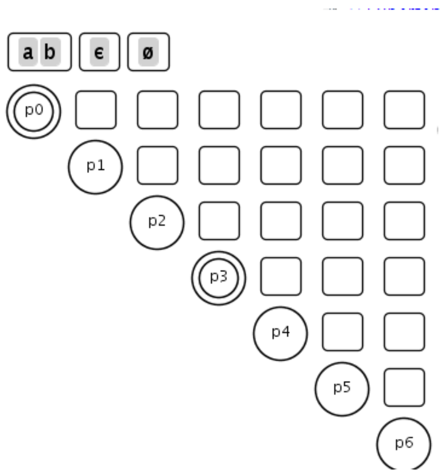
Die Zustandspaartabelle wird mit Wörtern ausgefüllt, welche die Nichtäquivalenz von Zustandpaaren bezeugen.

Zuerst für p_0





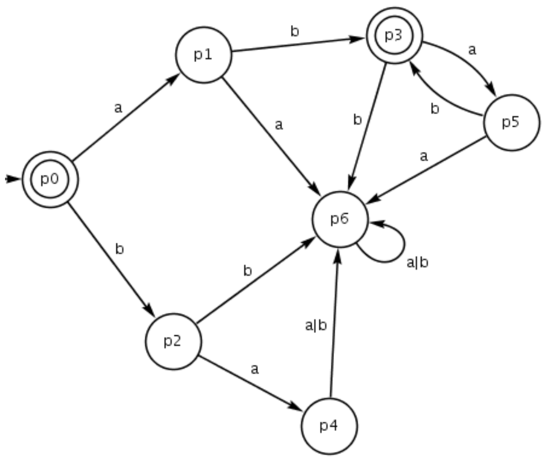


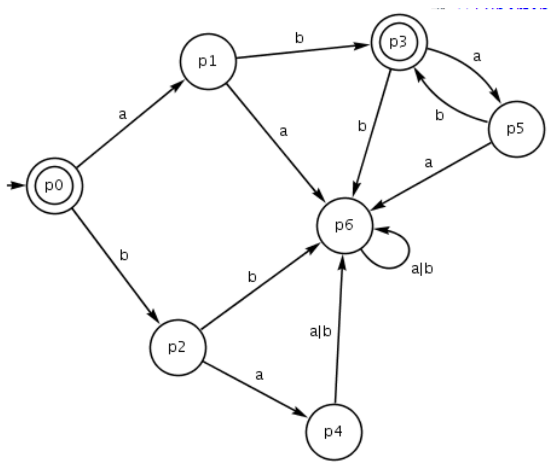


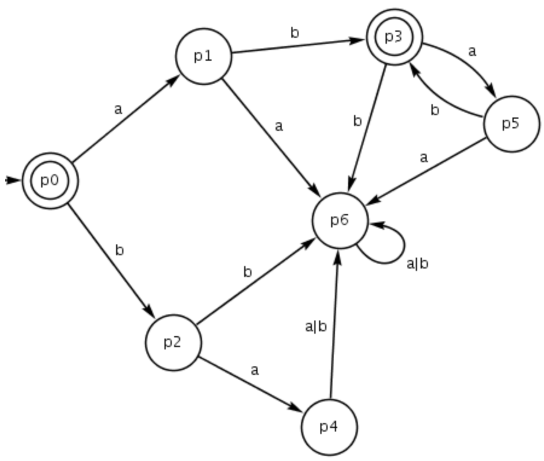
Zusatzaufgabe: Geben Sie den Minimalautomaten fuer diese Sprache an

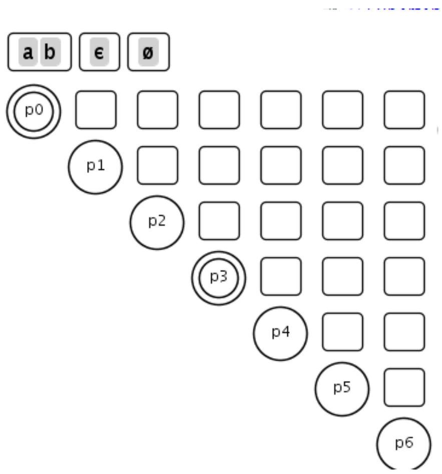
Die Zustandspaartabelle wird mit Wörtern ausgefüllt, welche die Nichtäquivalenz von Zustandpaaren bezeugen.

für p_3





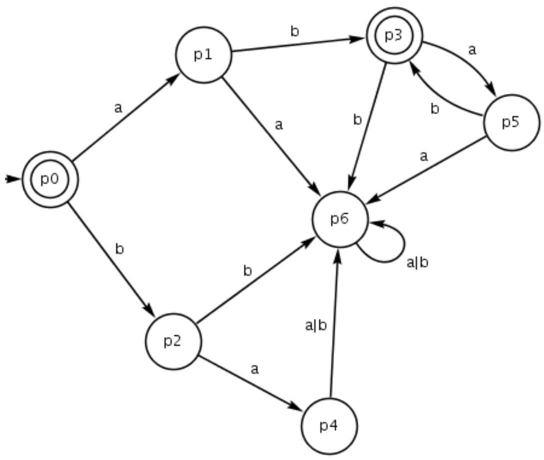


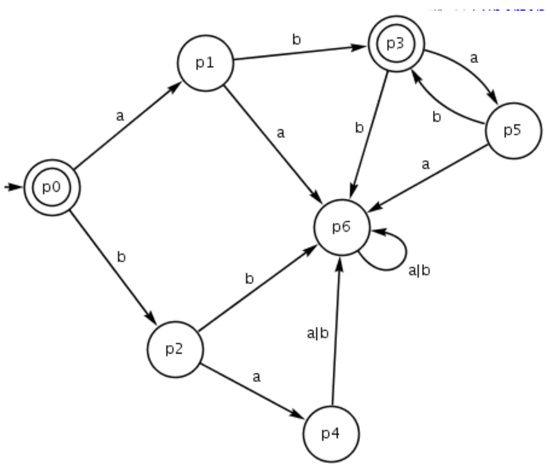


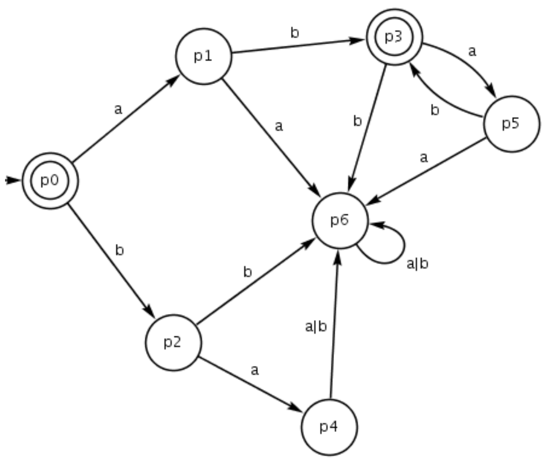
Zusatzaufgabe: Geben Sie den Minimalautomaten fuer diese Sprache an

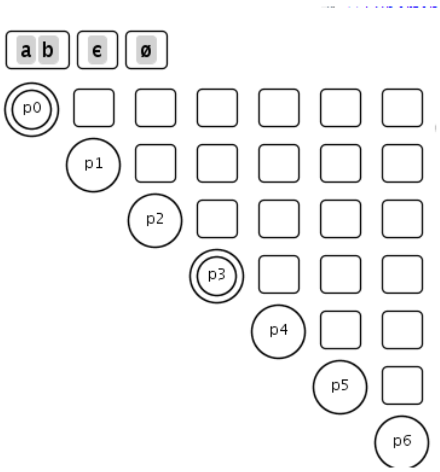
Die Zustandspaartabelle wird mit Wörtern ausgefüllt, welche die Nichtäquivalenz von Zustandpaaren bezeugen.

für p_1





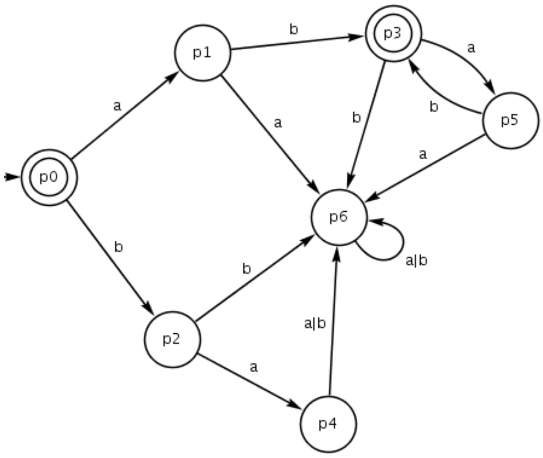


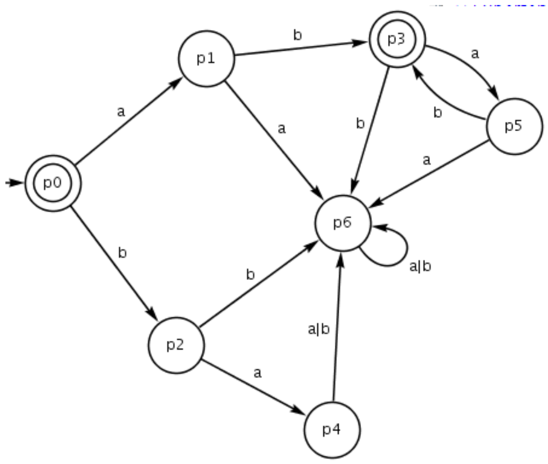


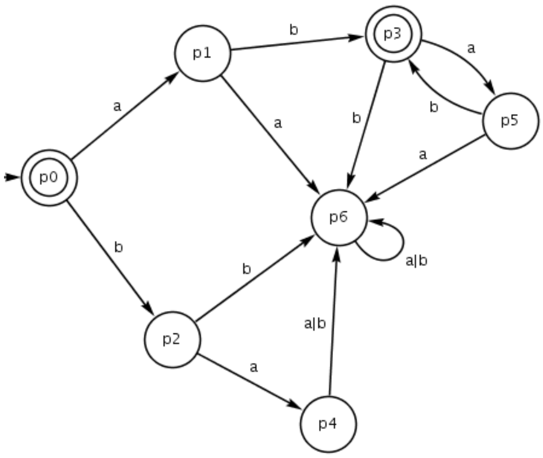
Zusatzaufgabe: Geben Sie den Minimalautomaten fuer diese Sprache an

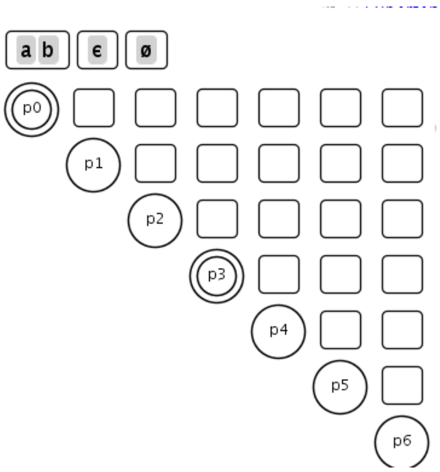
Die Zustandspaartabelle wird mit Wörtern ausgefüllt, welche die Nichtäquivalenz von Zustandpaaren bezeugen.

für p_2





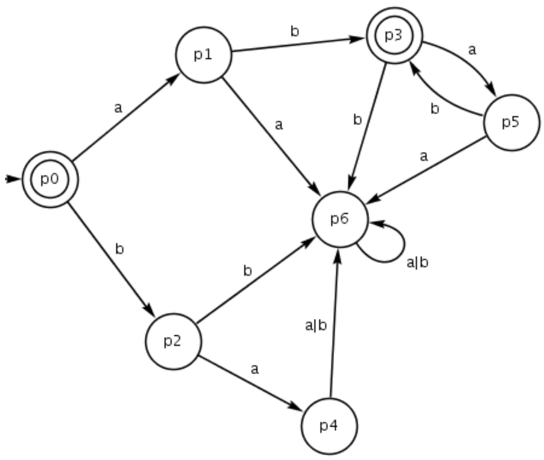


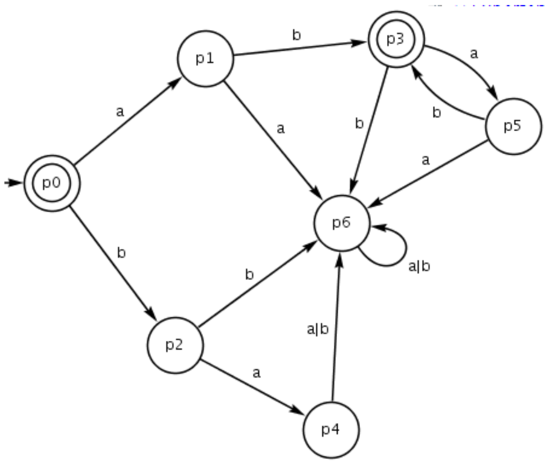


Zusatzaufgabe: Geben Sie den Minimalautomaten fuer diese Sprache an

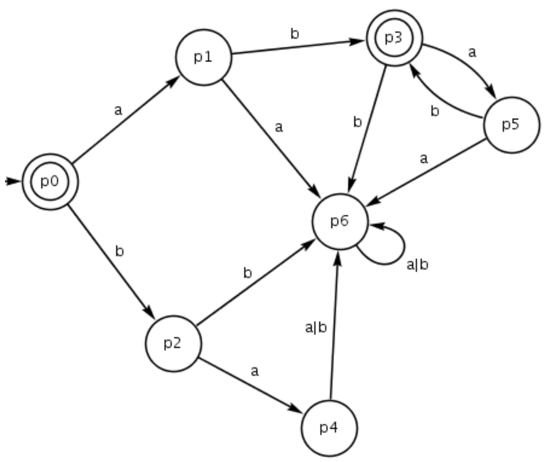
Die Zustandspaartabelle wird mit Wörtern ausgefüllt, welche die Nichtäquivalenz von Zustandpaaren bezeugen.

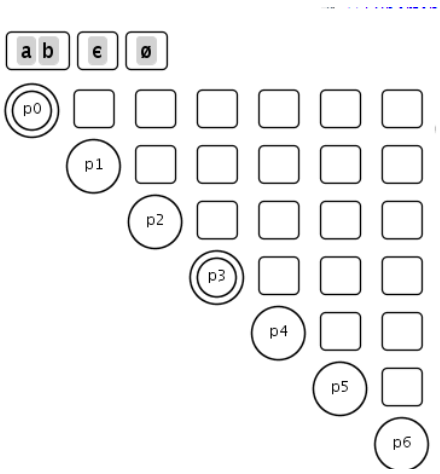
für p_4





für p_5

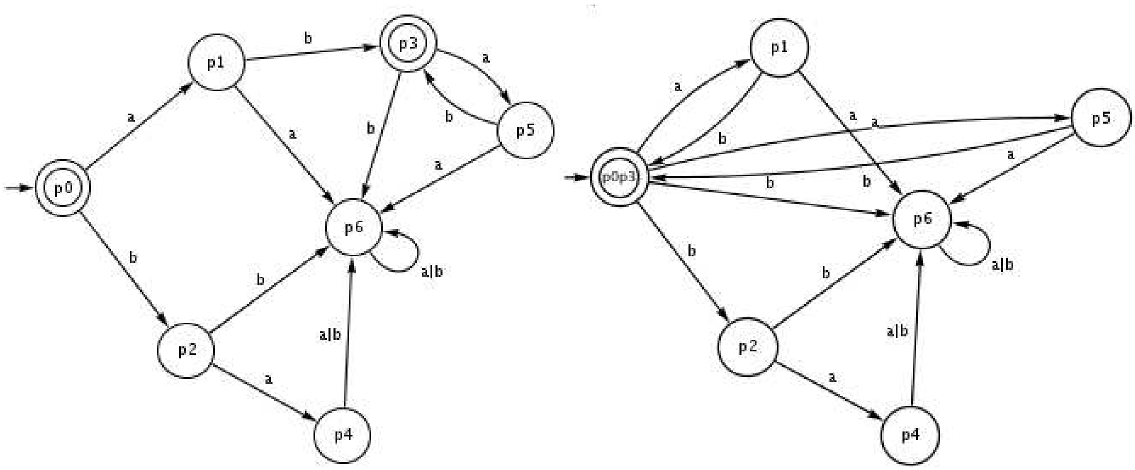




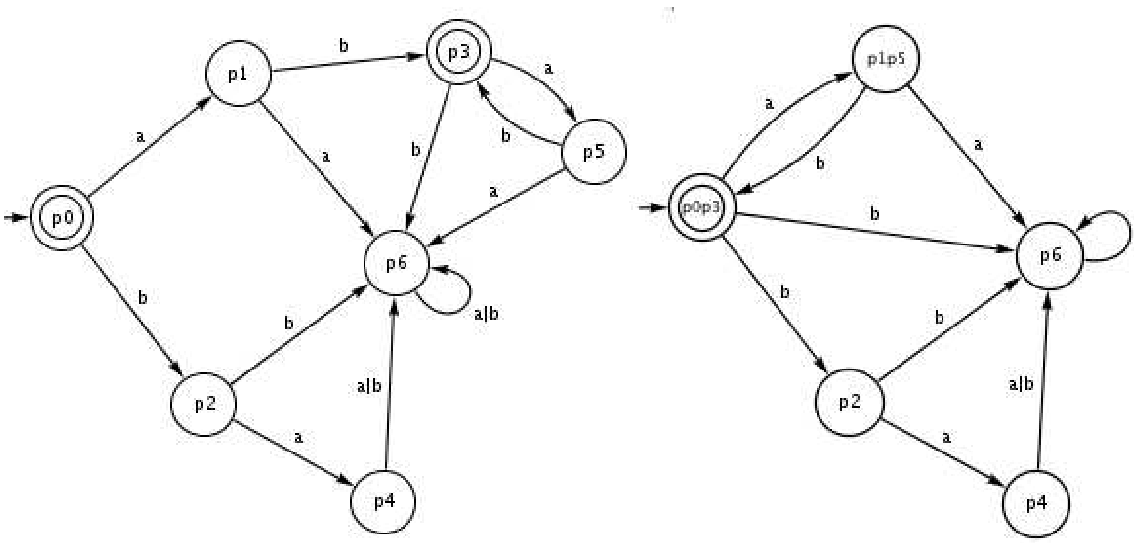
Zusatzaufgabe: Geben Sie den Minimalautomaten fuer diese Sprache an

Die Zustandspaartabelle wird mit Wörtern ausgefüllt, welche die Nichtäquivalenz von Zustandpaaren bezeugen.

für p_0p_3



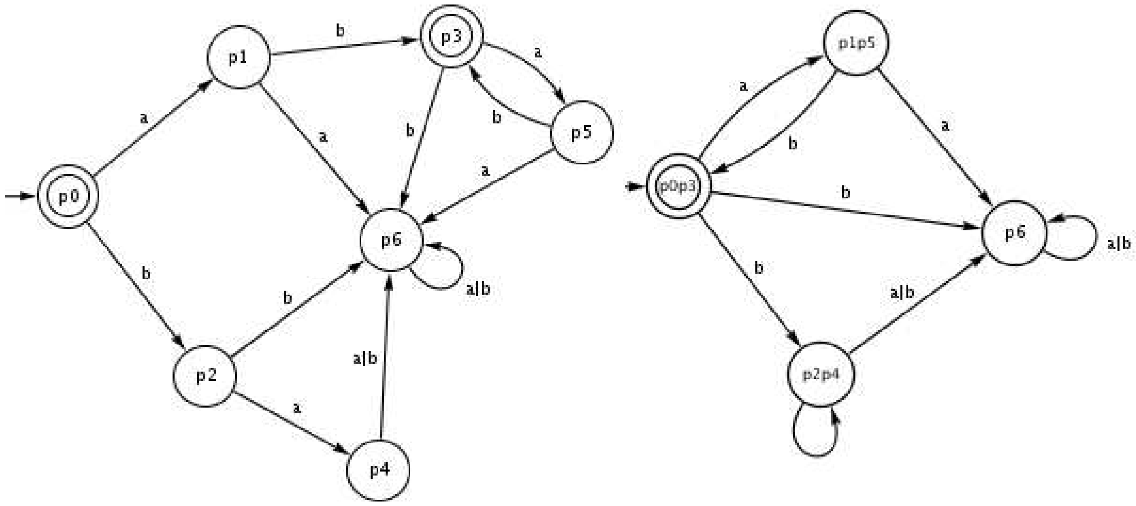
für p_1p_5



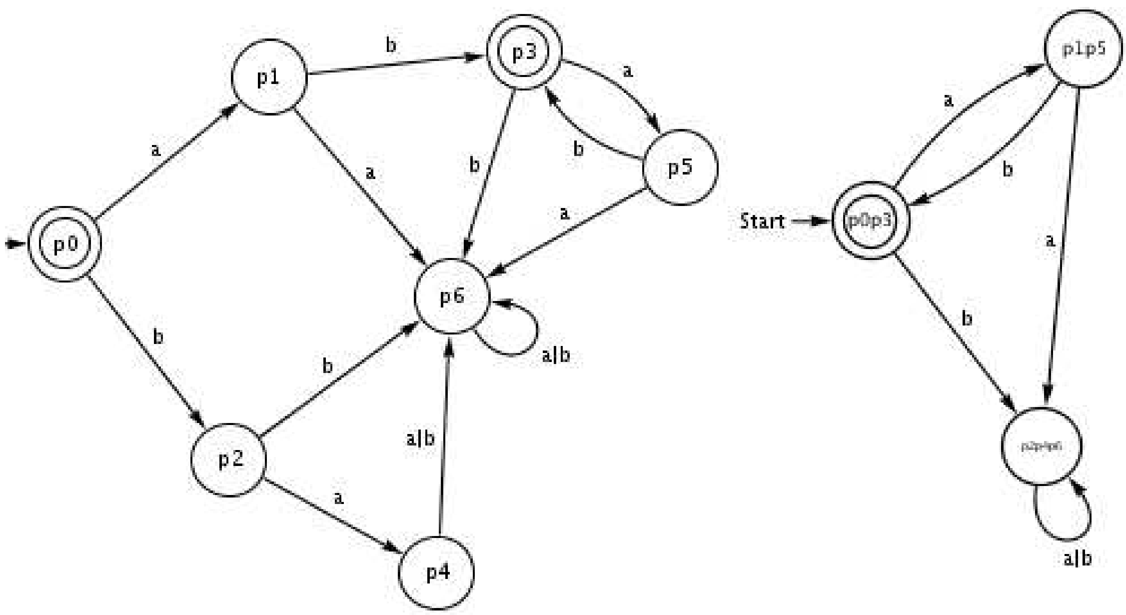
Zusatzaufgabe: Geben Sie den Minimalautomaten fuer diese Sprache an

Die Zustandspaartabelle wird mit Wörtern ausgefüllt, welche die Nichtäquivalenz von Zustandpaaren bezeugen.

für p_2p_4

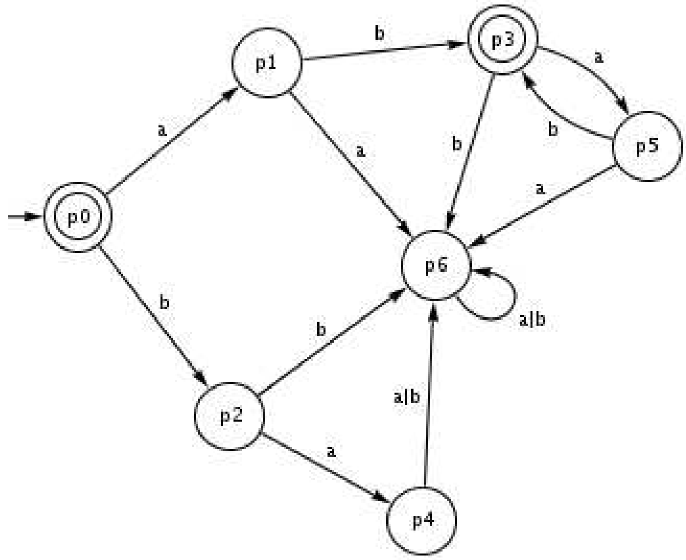


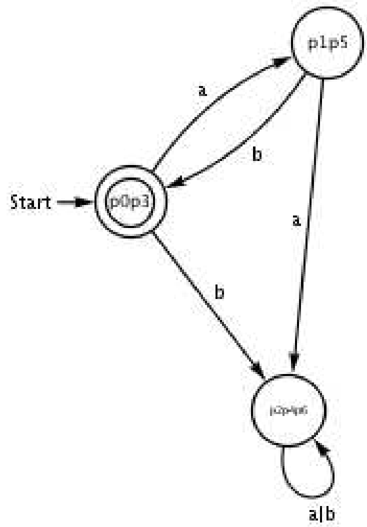
für p_2p_6



Zusatzaufgabe: Geben Sie den Minimalautomaten fuer diese Sprache an

Die Zustandspaartabelle wird mit Wörtern ausgefüllt, welche die Nichtäquivalenz von Zustandpaaren bezeugen.
für p_5p_6





Reduzierter Automat

Resulat ist Minimal

TIL - Übungsblatt 3 (SS 2008)

ausgearbeitet von feurio

1. August 2008

Theoretische Informatik und Logik-Übung (SS 2008)

Übungsblatt 3 - SS 2008

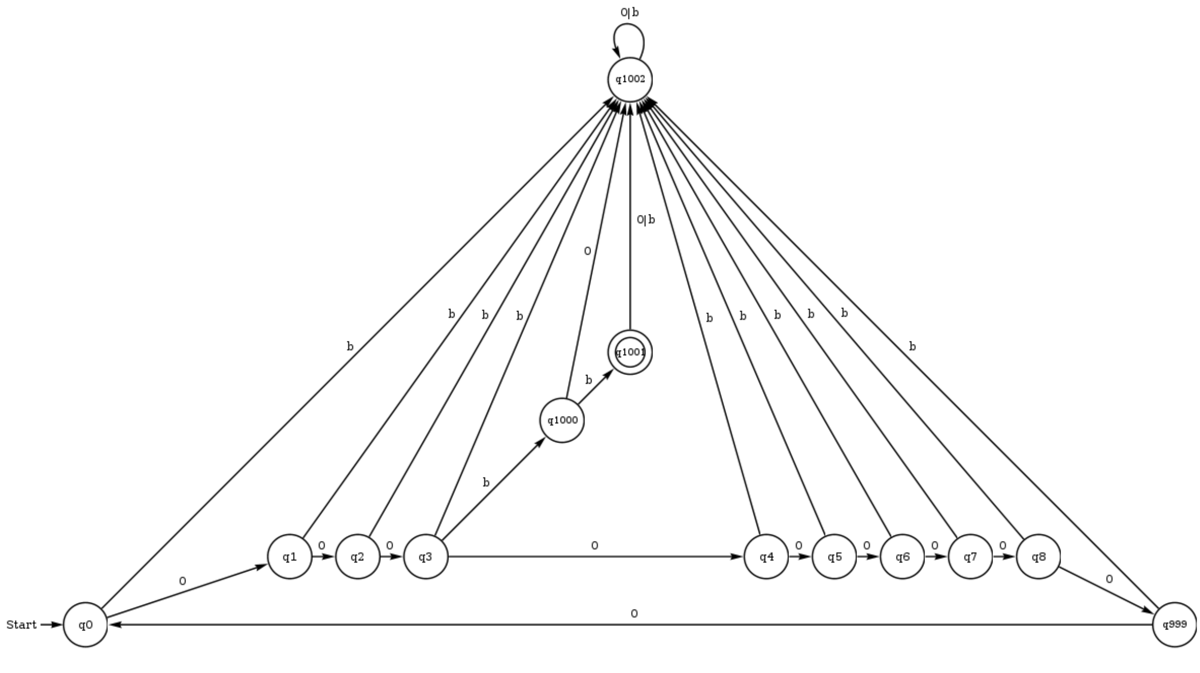
3.1) Geben Sie die formale Definition eines Minimalautomaten sowie der entsprechenden regulären Grammatik für die folgende Sprache L an

$L = \{\underline{0}, \underline{b}\}^*\text{-}\{\underline{0}^{1000n+3} \mid n \geq 0\}\{\underline{b}^2\}$.

$L = \{\underline{0}, \underline{b}\}^*\text{-}\{\underline{0}^{1000n+3} \mid n \geq 0\}\{\underline{b}^2\}$ kann man auch als $L = L_1 - L_2$ betrachten, wobei

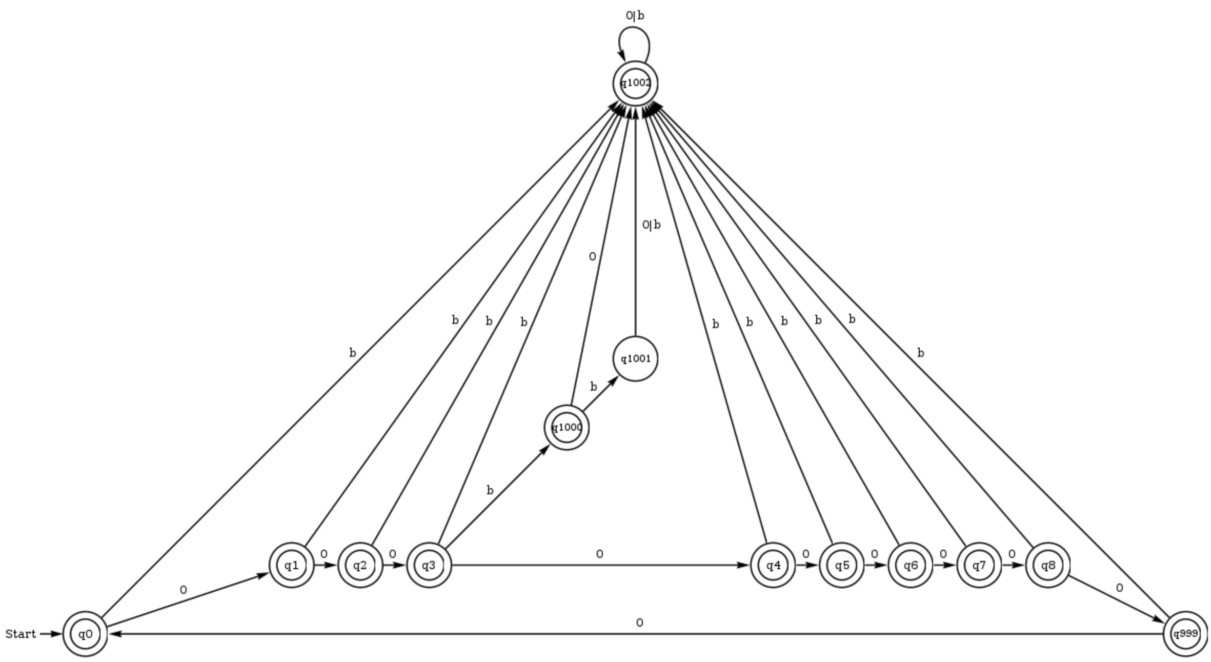
$L_1 = \{\underline{0}, \underline{b}\}^*$ und $L_2 = \{\underline{0}^{1000n+3}\}\{\underline{b}\}^2\} \rightarrow L_1 - L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$

a) Erstellen von einem Automaten, der die Eingabe $\{\underline{0}^{1000n+3} \mid n \geq 0\}\{\underline{b}^2\}$ akzeptiert



b) Komplementbildung der oben erstellten Automaten

Das Komplement einer Sprache L über einem Alphabet Σ ist die Sprache $\overline{L}$, die alle Wörter in Σ^* enthält, die nicht in L sind: $\overline{L} = \Sigma^* - L = \{\omega \in \Sigma^* \mid \omega \notin L\}$. Alle Endzustände werden zur Nicht-Endzustände, und alle Nicht-Endzustände werden zu Endzuständen.



Formal:

$Q = \{q_i \mid 0 \leq i \leq 1002\}$

$A =< Q,\ \{\underline{0},\ \underline{b}\},\ \sigma,\ q_0,\ Q \setminus \{q_{1001}\} >$

$\sigma(q_i,\ \underline{0}) = q_{i+1} \forall 0 \leq i \leq 998$

$\sigma(q_{999},\ \underline{0}) = q_0$

$\sigma(q_j,\ \underline{0}) = q_{1002} \forall 1000 \leq j \leq 1002$

$\sigma(q_k,\ \underline{b}) = q_{1002} \forall 0 \leq k \leq 1002,\ k \neq 3,\ k \neq 1000$

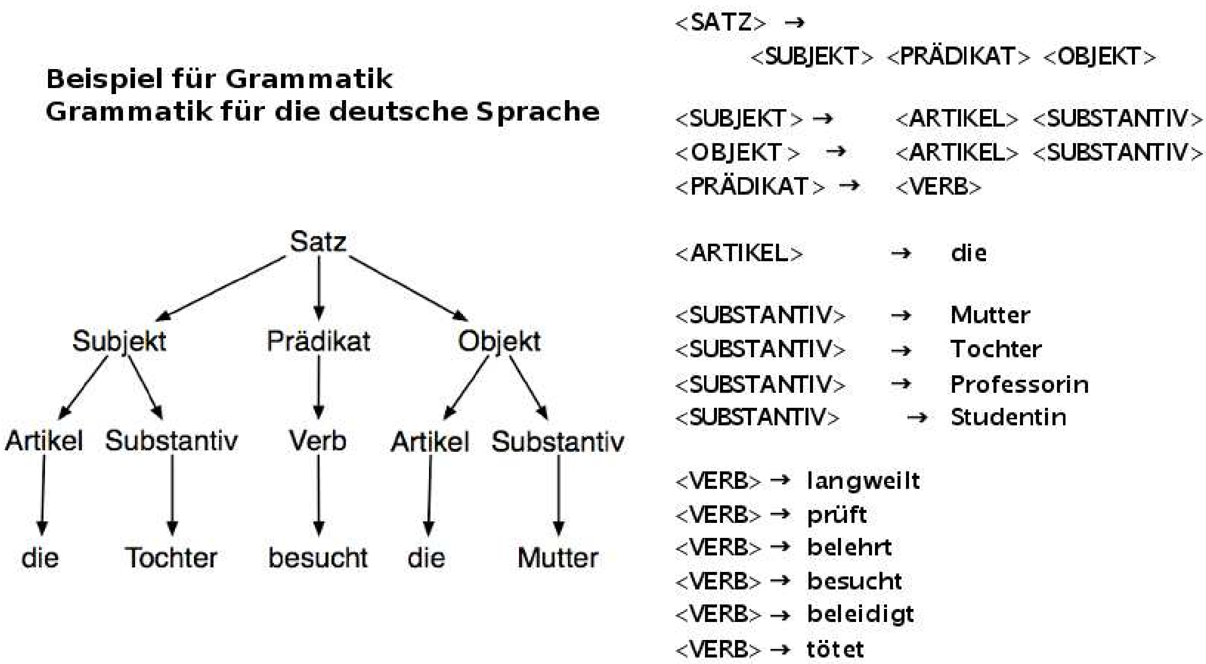
$\sigma(q_3,\ \underline{b}) = q_{1000}$

$\sigma(q_{1000},\ \underline{b}) = q_{1001}$

3.2) Welche Sprache wird von folgender Grammatik, erzeugt?
$G = \langle \{S, U\}, \{\underline{0}, \underline{1}\}, \{S \Rightarrow \underline{0}S \mid \underline{1}U, U \Rightarrow \underline{0}U \mid \underline{1}S \mid \underline{1}\}, S\rangle$
.

Grammatiken - Theorie

Eine Grammatik wird durch ein Qaudrupel beschrieben, in der Form
$G = \langle V, T, P, S\rangle$
V.....Nonterminale (Alphabet der Variablen)
T.....Terminalsymbole
P.....Produktionen
S.....Startsymbol



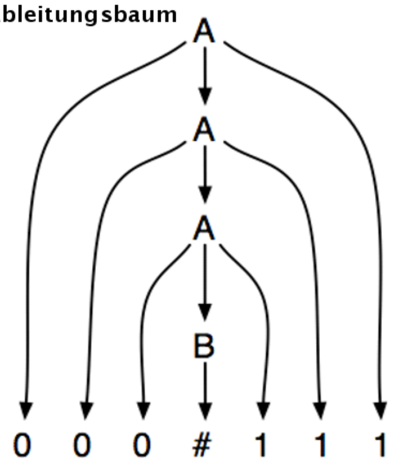
Reguläre Grammatiken

All die Produktionen einer regulären Grammatik besitzen den Form
$A \Rightarrow aB$ oder $A \Rightarrow \varepsilon$
$A \Rightarrow aB$ entspricht $B \in \delta(A, a)$ (ein Übergang vom A nach B mit dem Symbol a)
Eine vom regulärem Grammatik generierte Sprache ist regulär $\Longleftrightarrow$ zu jeder regulären Sprache lässt sich eine reguläre Grammatik finden, die sie generiert.

Kontextfreie Grammatiken

- **Kontextfreie Grammatiken sind "Wortersetzer"**
  - A → 0A1
  - A → B
  - B → #
- **Ersetzungsregeln bestehen aus Produktionen**
- **Variablen, Terminalsymbole (Terminale)**
- **Startvariable: A**
  - A
  - 0A1
  - 00A11
  - 000A111
  - 000B111
  - 000#111 .... und Schluss
- **Das Wort 000#111 ist ein Wort der Grammatik**

Ableitungsbaum



- **Definition**
  - Eine kontextfreie Grammatik ist ein Vierer-Tupel $G=(V, \Sigma, R, S)$
    - V: Variablen
    - Σ: Terminale
      - V und Σ sind disjunkt
    - R : Ersetzungsregeln
      - $A \rightarrow w$ mit $A \in V$, $w \in (V \cup \Sigma)^*$
    - $S \in V$: Startvariable
- **Ableitung**
  - Falls $A \rightarrow w$ in R, dann ist $uAv \Rightarrow uwv$
  - $u \Rightarrow^* v$, wenn es ein $k \geq 0$ gibt mit
    - $u \Rightarrow u_1 \Rightarrow u_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow u_k \Rightarrow v$
- **Sprache der Grammatik G**
  - $L(G) = \{ w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow^* v \}$

- **G = ({A,B}, {0,1,#}, R, A)**
- **R = {A → 0A1, A → B, B → #}**
- **Alternative Schreibweise:**
- **R = {A → 0A1 | B, B → #}**

- $A \Rightarrow 0A1$
  $\Rightarrow 00A11$
  $\Rightarrow 000A111$
  $\Rightarrow 000B111$
  $\Rightarrow 000\#111$

$A \Rightarrow^* \#$

$A \Rightarrow B$
$\Rightarrow \#$

Also:

A $\Rightarrow^*$ 000#111

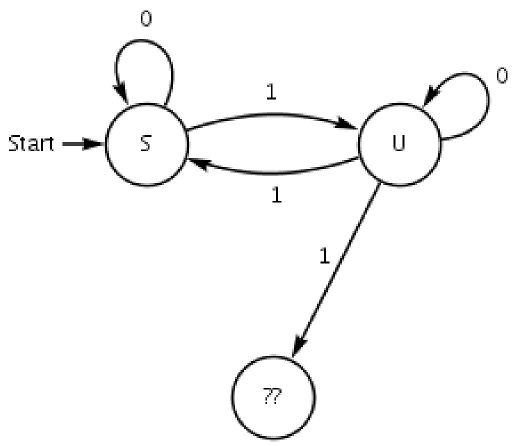
Damit ist das Wort 000#111 in der Sprache L(G)

L(G) = {#, 0#1, 00#11, 000#111, 0000#1111, ...}

Nun zum eigentlichen Beispiel
$G = \langle \{S, U\}, \{\underline{0}, \underline{1}\}, \{S \Rightarrow \underline{0}S \mid \underline{1}U, U \Rightarrow \underline{0}U \mid \underline{1}S \mid \underline{1}\}, S \rangle$
$V = \{S, U\}$,
$T = \{\underline{0}, \underline{1}\}$,
$P = \{S \Rightarrow \underline{0}S \mid \underline{1}U$,

$$P = \{ \begin{array}{lllll} S \Rightarrow & \underline{0}S & \mid & \underline{1}U, & \\ U \Rightarrow & \underline{0}U & \mid & \underline{1}S \mid \underline{1}\} & . \end{array}$$

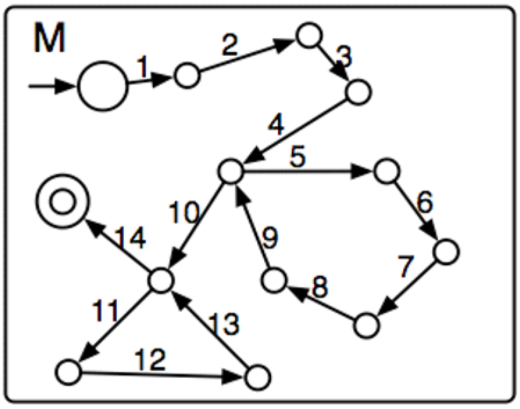
$A \Rightarrow aB$ entspricht $B \in \delta(A, a)$ (ein Übergang vom A nach B mit dem Symbol a)
.
$S \Rightarrow \underline{0}S \Longrightarrow S \in \delta(S, \underline{0}) \Longrightarrow \underline{0}^*$
$S \Rightarrow \underline{1}U \Longrightarrow U \in \delta(S, \underline{1}) \Longrightarrow \underline{1}$
$U \Rightarrow \underline{0}U \Longrightarrow U \in \delta(U, \underline{0}) \Longrightarrow \underline{0}^*$
$U \Rightarrow \underline{1}U \Longrightarrow ?? \in \delta(U, \underline{1}) \Longrightarrow \underline{1}$
$U \Rightarrow \underline{1}S \Longrightarrow S \in \delta(U, \underline{1}) \Longrightarrow \underline{1}$ bzw alles erneut $(....)^+$
.
die erzeugte Sprache lautet: $(\underline{0}^*\underline{1}\underline{0}^*\underline{1})^+$
ist eine reguläre Sprache.



3.3) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas für reguläre Sprachen, dass die Sprache nicht regulär ist. $L = \{\underline{0}^n\underline{1}^m \mid n \geq 2m \geq 1\}$
Theorie: Mittels *Pumping Lemma* kann man beweisen, ob eine Sprache regulär ist oder nicht.

➢ **Pumping-Lemma**

– Sei A eine reguläre Sprache.
- Dann gibt es eine Zahl p>0
- so dass für jedes Wort s mit |s| ≥p
- s in drei Teile geteilt werden kann: s = xyz, wobei gilt
  - für alle i ≥0: $xy^iz \in A$
  - |y| > 0
  - |xy| ≤ p.

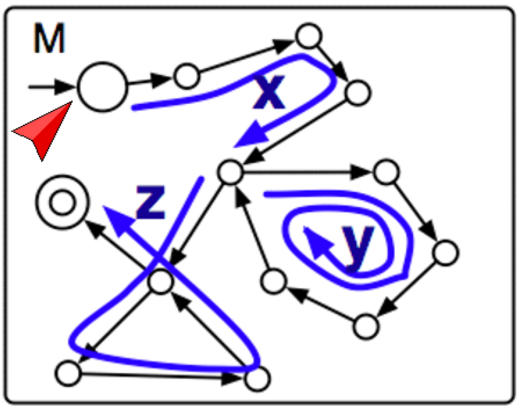


➢ **Beweisidee**

– Es gibt nur endlich viele Zustände im DFA von A

– Auf langen Worten wiederholen sich manche Zustände

– Das Wort dazwischen (nämlich y) kann also beliebig oft eingesetzt werden!



Bsp.: Sei die Sprache $L = \{\underline{0^n 1^n} \mid n \geq 0\}$

ε

0 1

0 0 1 1

0 0 0 1 1 1

$0^{1000} 1^{1000}$

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ..

M

$0^{15} 1^{15} \in L(M)$

$0^{12} 1^{15} \in L(M)$ ↯

$0^{18} 1^{15} \in L(M)$ ↯

Formale Lösung:

<u>Annahme Pumping Lemma:</u>

- Dann gibt es eine Zahl $p > 0$
- so dass für jedes Wort s mit $\mid s \mid \geq p$
- s in drei Teile geteilt werden kann $s = xyz$, wobei folgendes gilt: für alle $i \geq 0 : xy^i z \in B$ und $\mid y \mid > 0$ und $\mid xy \mid \leq p$

$\Longrightarrow$ für $s = 0^p 1^p \in B$. dann ist $xy \in L(0^*)$ und $\mid y \mid > 0$ Sei $m = \mid y \mid$
Dann müssen laut Pumping Lemma folgende Worte in B sein:
$i = 0 \rightarrow$ Das Wort $xz = 0^{p-m} 1^p \Longrightarrow \notin B$
$i = 1 \rightarrow$ Das Wort $xyz = 0^p 1^p \Longrightarrow \in B$
$i = 2 \rightarrow$ Das Wort $xyyz = xy^2 z = 0^{p+m} 1^p \Longrightarrow \notin B$
$i = 3 \rightarrow$ Das Wort $xy^3 z = 0^{p+2m} 1^p \Longrightarrow \notin B$
Bis auf $i = 1$ gilt $xy^i z \notin B$. PL liefert Werte, die nicht in B sind. $\Longrightarrow$ B ist nicht regulär

Jetzt zum eigentlichen Beispiel
$L = \{\underline{0}^n \underline{1}^m \mid n \geq 2m \geq 1\}$

.

<u>Pumping Lemma</u>

Wähle N aus Pumping Lemma
Wähle x aus L mit $\mid x \mid > N$ und $m = N$, $n = 2N$
$x = \underline{0}^{2N}\underline{1}^N = uvw$
1) $\mid v \mid \geq 1 \Longrightarrow l \geq 1$
2) $\mid v \mid \leq N \Longrightarrow$ uv besteht nur aus $\underline{0}$ern $\Longrightarrow u = \underline{0}^k$ und $v = \underline{0}^l$
3) $\forall i \geq 0 : uv^iw \in L$, auch für $i_0 = 0$
$\Longrightarrow L \ni \underbrace{\underline{0}^k}_{u} \circ \underbrace{\underline{0}^{l.i_0}}_{v^{i_0}} \circ \underbrace{\underline{0}^{2N-(k+l)} \circ \underline{1}^N}_{w} = \underline{0}^{2N-l} \circ \underline{1}^N \notin L$
weil $2n - L < 2n$

.

Widerspruch zur Annahme, dass L regulär sei, weil dann uw in L sein müsste.

3.4 Geben Sie für eine der folgenden Sprachen - a) oder b) - eine eindeutige minimale (bezüglich der Anzahl der Produktionen) kontextfreie Grammatik in erweiteter GREIBACH-Normalform sowie für jedes Wort der Sprache die Linksableitung in Ihrer Grammatik an:

a)$L_1 = \{\underline{0}^n \underline{1}^m \mid n \geq 2m > 1\}$
$n \geq 2m > 1 \Longrightarrow 2m > 1 \Longrightarrow m \geq 1$
Wie entwickelt sich die Sprache?

$$\underline{001}$$
$$\underline{000011}$$
$$\underline{000000111}$$
$$\underline{000000001111}$$

Für jeden Stück $\underline{1}$, der in die Produktion aufgenommen wird, muss mindestens 2 Stück $\underline{0}$ aufgenommen werden $\Longrightarrow$ ist abgedeckt mit der Produktion $\underline{00}S\underline{1}$. Da laut Definition $n \geq 2m$ ist, darf natürlich mehr als 2 Stück $\underline{0}$ in die Produktion aufgenommen werden $\Longrightarrow$ ist abgedeckt mit der Produktion $\underline{0}U$. Die Produktion $\underline{0}U\underline{1}$ ist wiederum der Übergang vom S nach U. Die Produktion ε beendet die Sprache.
Aus diesen Kenntnissen heraus folgt folgende kontextfreie Grammatik:
$G(L_1) = \langle\{S, U\}, \{\underline{0}, \underline{1}\}, \{S \Rightarrow \underline{00}S\underline{1} \mid \underline{0}U\underline{1}, U \Rightarrow \underline{0}U \mid \underline{0}\}, S\rangle$
$V = \{S, U\}$,
$T = \{\underline{0}, \underline{1}\}$,

$$\begin{array}{lllll} P = \{ & S \Rightarrow & \underline{00}S\underline{1} & \mid & \underline{0}U\underline{1}, \\ & U \Rightarrow & \underline{0}U & \mid & \underline{0}\} \end{array}$$

.
Ein Wort $\underline{0}^{2n+m}\underline{1}^n \mid n \geq 1, m \geq 0$ hat dann folgende Linksableitung:
$S \vdash \underline{0}^2 S \underline{1} \vdash ... \vdash \underline{0}^{2n-1} T \underline{1}^n \vdash ... \vdash \underline{0}^{2n+m}\underline{1}^n$
b)$L_2 = \{\underline{a}^{5n}\underline{c}^m\underline{a}^{3n} \mid n \geq 1, m \geq 1\}$
Wie entwickelt sich die Sprache?
Fall 1: n vergrössert sich um 1, während m immer konstant bleibt

$$\underline{aaaaacaaa}$$
$$\underline{aaaaaaaaaacaaaaaa}$$
$$\underline{aaaaaaaaaaaaaaacaaaaaaaaa}$$

$\underline{aaaaaaaaaaaaaaaaaaaacaaaaaaaaaaaa}$

Fall 2: m vergrössert sich um 1, während n immer konstant bleibt

$\underline{aaaaacaaa}$
$\underline{aaaaaccaaa}$
$\underline{aaaaaccaaa}$
$\underline{aaaaaccaaa}$

Es sind 2 verschiedene Fälle zu unterscheiden:
<u>Fall 1:</u> n vergrössert sich $\Longrightarrow$ ist abgedeckt mit der Produktion $S \Rightarrow \underline{a}^5 S \underline{a}^3$
Die Produktion von $\underline{c}$= Fall 2 ist gewährleistet mit $S \Rightarrow \underline{a}^5 U \underline{a}^3$
<u>Fall 2:</u> m vergrössert sich $\Longrightarrow$ ist abgedeckt mit der Produktion $U \Rightarrow \underline{c}U$
Die Produktion muss irgendwie beendet werden. $\Longrightarrow$ ist abgedeckt mit der Produktion $T \Rightarrow \underline{c}$
.
Aus diesen Kenntnissen heraus folgt folgende kontextfreie Grammatik:
$G(L_2) = \langle \{S, U, T\}, \{\underline{a}, \underline{c}\}, \{S \Rightarrow \underline{a}^5 S \underline{a}^3 \mid \underline{a}^5 U \underline{a}^3, U \Rightarrow \underline{c}U \mid \underline{c}\}, S \rangle$
$V = \{S, U, T\}$,
$T = \{\underline{a}, \underline{c}\}$,

$$\begin{array}{llll} P = \{ & S \Rightarrow & \underline{a}^5 S \underline{a}^3 & \mid \quad \underline{a}^5 U \underline{a}^3, \\ & U \Rightarrow & \underline{c}U & \mid \quad \underline{c}\} \end{array}$$

3.5 Zeigen Sie, dass die Sprache $\{\underline{0}^{n^m} \mid n \geq 0\}$ für jedes $m \geq 2$ nicht kontextfrei ist

(Hinweis: Es reicht zu zeigen, dass die Funktion nm nicht linear ist, siehe Korollar zum Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen, Folgerung 1.70, Skriptum S. 47.

.

Ich habe endlich meine Notizen vom letzter Vorlesung gefunden. Und da stehts schwarz auf weiss $\Longrightarrow$

Korollar zum Pumping Lemma wird für den Beweis dafür, dass eine sprache kontextfrei ist, angewendet. (in folgender Form zu beweisen):

zu beweisen ist, dass $f(n+1) - f(n) \geq n$ ist.

.

Beispiel 1 aus der VO: $\{a^{n^2} | n \geq 0\}$

Korollar angewendet: $\Longrightarrow$

$f(n) = n^2 \Longrightarrow f(n+1) = (n+1)^2$

$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1 \Longrightarrow 2n + 1 > n$

.

Beispiel 2 aus der VO: $\{a^{n^3} | n \geq 0\}$

$f(n) = n^3 \Longrightarrow f(n+1) = (n+1)^3$

$(n+1)^3 - n^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1 \Longrightarrow 3n^2 + 3n + 1 > n$

.

Nun zum eigentlichen Beispiel

$\{\underline{0}^{n^m} \mid n \geq 0\}$

$f(n) = n^m \Longrightarrow f(n+1) = (n+1)^m$ (hier braucht man binomische lehrsatz)

Binomischer Lerhsatz, allgemeiner Form: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \quad (1)$

Binomischer Lehrsatz angewendet auf $(n+1)^m \Longrightarrow (n+1)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} n^{m-k} 1^k \quad (1)$

.

$(n+1)^m - n^m = \underbrace{(m.n^m + (m-1)n^{m-1} + ... + m.n + 1}_{binomischer Lehrsatz} - n^m > n$

$m \geq 2$ garantiert hier in diesem Beispiel, dass die Summandten rechts von n^m in der vorherigen summe nicht wegfallen (bei $m = 1$ wäre die linke Seite nie $> n$)

TIL - Übungsblatt 4 (ss 2008)

ausgearbeitet von feurio

1. August 2008

Theoretische Informatik und Logik-Übung (ss 2008)

Übungsblatt 4 - ss 2008

Aufgabe 4.1 Sei $L1 = \{\underline{0}^{3n}\underline{1}^{m}\underline{0}^{2n+1} | n \geq 0, m \geq 1\}$

a) Geben Sie eine eindeutige minimale (bezüglich der Anzahl der Produktionen) kontextfreie Grammatik in erweiteter GREIBACH-Normalform sowie für jedes Wort der Sprache die Linksableitung in Ihrer Grammatik an.

Betrachten wie zuerst, wie sich die sprache entwickelt 1) m bleibt konstant, n ist variable m=1 , n=0,1,2,3,.....

$\underline{10}$
$\underline{0001000}$
$\underline{000000100000}$

2) m.n sind variable m=1,2,3,4.... , n=0,1,2,3,.....

$\underline{10}$
$\underline{00011000}$
$\underline{00000011100000}$

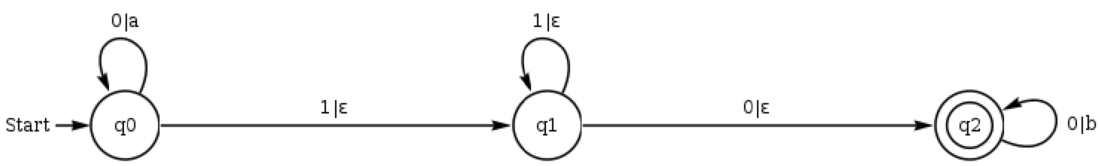
$G(L_1) = \langle \{S, T\}, \{\underline{0}, \underline{1}\}, \{S \Rightarrow \underline{000}S\underline{00} \mid \underline{1}T, T \Rightarrow \underline{1}T \mid \underline{0}\}, S\rangle$
$V = \{S, T\}$,
$T = \{\underline{0}, \underline{1}\}$,

$$
\begin{array}{llll}
P = \{ & S \Rightarrow & \underline{000}S\underline{00} & \mid \quad \underline{1}T, \\
 & T \Rightarrow & \underline{1}T & \mid \quad \underline{0}\}
\end{array}
$$

$w = \underline{0}^{3n} \circ \underline{1}^{m} \circ \underline{0}^{2n+1} \Longrightarrow$ Linksableitung:
$S \vdash \underline{0}^{3}S\underline{0}^{2} \vdash \underline{0}^{2*3}S\underline{0}^{2*2} \vdash \underline{0}^{3*3}S\underline{0}^{3*2} \vdash ..... \vdash \underline{0}^{3n}S\underline{0}^{2n} \vdash \underline{0}^{3n}1T\underline{0}^{2n} \vdash \underline{0}^{3n}\underline{1}^{2}T\underline{0}^{2n} \vdash \underline{0}^{3n}\underline{1}^{3}T\underline{0}^{2n} \vdash .... \vdash \underline{0}^{3n}\underline{1}^{m}T\underline{0}^{2n} \vdash \underline{0}^{3n}\underline{1}^{m}\underline{0}^{2n+1}$

b) Geben Sie eine **gsm** an, die L_1 auf $L_2 = \{\underline{a}^{3n}\underline{b}^{2n} | n \geq 0\}$ abbildet. Sind eine allgemeine Art von Homomorphismen. Mann kan sich dabei unter eine gsm (generalized sequential machine) einen Automaten mit Ausgabe vorstellen.

z.B. Für jeden eingelesenen $\underline{0}$ wird ein $\underline{a}$ ausgegeben. $\Longrightarrow \underline{o}/\underline{a}$



Aufgabe 4.2 Geben Sie einen Homomorphismus `h` sowie eine reguläre Menge R derart an, dass $h(L_1 \cap R) = L_2$ für $L_1 = \{\omega \in \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{3}\}^* || \omega|_0 = 2\ |\omega|_1 = 3\ |\omega|_2 = 6|\omega|_3\}$ und $L_2 = \{\underline{a}^{6n}\underline{b}^{4n}\underline{c}^{9n} | n \geq 0\}$.

Ein Homomorphismus ist eine Abbildung zwischen zwei mathematischen Strukturen, durch die Teile der einen Struktur auf bedeutungsgleiche Teile der anderen Struktur eindeutig abgebildet werden. Grob gesprochen ist also ein Homomorphismus eine strukturerhaltende Abbildung.
z.b. $f(a \oplus b) = f(a) \otimes f(b)$

z.B. lineare Funktionen

$L_1 = \{\omega \in \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{3}\}^* || \omega|_0 = 2\ |\omega|_1 = 3\ |\omega|_2 = 6|\omega|_3\} \Longrightarrow$:
$L_1 = \{\omega \in \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{3}\}^* || \omega|_0 = 6n,\ |\omega|_1 = 3n,\ |\omega|_2 = 2n,\ |\omega|_3 = n\} \Longrightarrow$:
Die Symbole $\underline{0} : \underline{1} : \underline{2} : \underline{3}$ sind im Verhältnis $6 : 3 : 2 : 1$ in L_1

Das kürzeste Wort lautet: $\underline{000000111223}$.
Das gewünschte Verhältnis von a, b und c in L_2 ist $a : b : c = 6 : 4 : 9$

weil $|\omega|_0 = 6n$ ist $\Longrightarrow h(\underline{0}) = \underline{a}$
weil $|\omega|_2 = 2n$ ist $\Longrightarrow h(\underline{2}) = \underline{bb}$
weil $|\omega|_1 = 3n$ ist $\Longrightarrow h(\underline{1}) = \underline{ccc}$
weil der Term verschwinden muss $\Longrightarrow h(\underline{3}) = \varepsilon$

$R := (0^* \circ 2^* \circ 1^* \circ 3^*) \Longrightarrow (L_1 \cap R) = \{\underline{0}^{6n} \circ \underline{2}^{2n} \circ \underline{1}^{3n} \circ \underline{3}^n | n \geq 0\}$
$\Longrightarrow h(\underline{0}^{6n} \circ \underline{2}^{2n} \circ \underline{1}^{3n} \circ \underline{3}^n) = \underbrace{h(\underline{0})}_{\underline{a}}{}^{6n} \circ \underbrace{h(\underline{2})}_{\underline{bb}}{}^{2n} \circ \underbrace{h(\underline{1})}_{\underline{ccc}}{}^{3n} \circ \underbrace{h(\underline{3})}_{\varepsilon}{}^n$
$= \underline{a}^{6n} \circ \underline{b}^{4n} \circ \underline{c}^{9n} (\circ\varepsilon)$

Aufgabe 4.3 Berechnen Sie schrittweise den Wert folgender Terme jeweils in den Variablenbelegungen I und J, wobei $I(x) = 2$, $I(y) = 4$ und $J(x) = 1$, $J(y) = 0$:
Geben Sie die jeweils relevanten Klauseln (MT1/MT2/MT3) der Definition von M_T an. Machen Sie den Syntax/Semantik-Unterschied durch korrekte Unterstreichungen sichtbar.

Definition: Die Semantik von T(D) wird durch die Funktion $M_T : ENVxT(D) \rightarrow D$ festgelegt, die wie folgt definiert ist:

(MT1) $M_T(I, v) = I(v)$ für $v \in IVS$
(MT2) $M_T(I, c^{'}) = c$ für $c^{'} \in KS(D)$ wobei c die Konstante zum Symbol $c^{'}$ ist
(MT3) $M_T(I, f^{'}\underline{(}t_1\underline{,}....\underline{,}t_n\underline{)}) = f(M\underline{T}(I, t_1), ..., M\underline{T}(I, t_n))$, wobei f die Funktion zum Symbol $f^{'} \in FS_n(D)$ ist.
a) $\underline{-(*(x,1),y)}$ (Term über der Modellstruktur Z)

Berechnung für die Variablenbelegung $I(x) = 2$, $I(y) = 4$

$$M_T(I,t) \overset{MT3}{=} M_T(I, \underline{*(x,1)}) - \underbrace{M_T(I, \underline{y})}_{I(\underline{y})}$$

$$M_T(I,t) \overset{MT1}{=} \underbrace{M_T(I, \underline{*(x,1)})}_{M_T(I,\underline{x})*M_T(I,\underline{1})} - \underbrace{I(\underline{y})}_{4}$$

$$M_T(I,t) \overset{MT3}{=} (\underbrace{M_T(I, \underline{x})}_{I(\underline{x})} * M_T(I, \underline{1})) - 4$$

$$M_T(I,t) \overset{MT1}{=} (\underbrace{I(\underline{x})}_{2} * \underbrace{M_T(I, \underline{1})}_{I(\underline{1})}) - 4$$

$$M_T(I,t) \overset{MT2}{=} (2 * 1) - 4$$

$$M_T(I,t) = 2 - 4 = -2$$

Berechnung für die Variablenbelegung $J(x) = 1$, $J(y) = 0$

$$M_T(J,t) \overset{MT3}{=} M_T(J, \underline{*(x,1)}) - \underbrace{M_T(J, \underline{y})}_{J(\underline{y})}$$

$$M_T(J,t) \overset{MT1}{=} \underbrace{M_T(J, \underline{*(x,1)})}_{M_T(J,\underline{x})*M_T(J,\underline{1})} - \underbrace{J(\underline{y})}_{0}$$

$$M_T(J,t) \overset{MT3}{=} (\underbrace{M_T(J, \underline{x})}_{J(\underline{x})} * M_T(J, \underline{1})) - 0$$

$$M_T(J,t) \overset{MT1}{=} (\underbrace{J(\underline{x})}_{1} * \underbrace{M_T(J, \underline{1})}_{J(\underline{1})}) - 0$$

$$M_T(J,t) \overset{MT1}{=} (1 * 1) - 0$$

$$M_T(J,t) = 1 - 0 = 1$$

(MT1) $M_T(I, \underline{v}) = I(v)$ für $v \in IVS$
(MT2) $M_T(I, \underline{c'}) = c$ für $c' \in KS(D)$ wobei c die Konstante zum Symbol c' ist
(MT3) $M_T(I, \underline{f'(t_1,....,t_n)}) = f(M\underline{T}(I, t_1), ..., M\underline{T}(I, t_n))$, wobei f die Funktion zum Symbol $f' \in FS_n(D)$ ist.
b) $\underline{\dot{-}(1,+(y,x))}$ (Term über der Modellstruktur N)

$$x \dot{-} y \quad \begin{array}{l} x - y \rightarrow x \geq y \\ 0 \rightarrow \text{sonst} \end{array}$$

Berechnung für die Variablenbelegung $I(x) = 2$, $I(y) = 4$

$M_T(I, t) \overset{MT3}{=} \underbrace{M_T(I, \underline{1})}_{I(\underline{1})} \dot{-} M_T(I, \underline{+(y,x)})$

$M_T(I, t) \overset{MT1}{=} \underbrace{I(\underline{1})}_{1} \dot{-} \underbrace{M_T(I, \underline{+(y,x)})}_{M_T(I,\underline{y})+M_T(I,\underline{x})}$

$M_T(I, t) \overset{MT3}{=} 1 \dot{-} \underbrace{(M_T(I, \underline{y}) + M_T(I, \underline{x}))}_{(I(\underline{y})+M_T(I,\underline{x}))}$

$M_T(I, t) \overset{MT1}{=} 1 \dot{-} \underbrace{(I(\underline{y}) + M_T(I, \underline{x}))}_{(4+I(\underline{x})}$

$M_T(I, t) \overset{MT2}{=} 1 \dot{-} (4 + 2)$
$M_T(I, t) = 1 \dot{-} 6 = 0$

Berechnung für die Variablenbelegung $J(x) = 1$, $J(y) = 0$

$M_T(J, t) \overset{MT3}{=} \underbrace{M_T(J, \underline{1})}_{I(\underline{1})} \dot{-} M_T(J, \underline{+(y,x)})$

$M_T(J, t) \overset{MT1}{=} \underbrace{I(\underline{1})}_{1} \dot{-} \underbrace{M_T(J, \underline{+(y,x)})}_{M_T(J,\underline{y})+M_T(J,\underline{x})}$

$M_T(J, t) \overset{MT3}{=} 1 \dot{-} \underbrace{(M_T(J, \underline{y}) + M_T(J, \underline{x}))}_{(J(\underline{y})+M_T(J,\underline{x}))}$

$M_T(J, t) \overset{MT1}{=} 1 \dot{-} \underbrace{(J(\underline{y}) + M_T(J, \underline{x}))}_{(0+J(\underline{x})}$

$M_T(J, t) \overset{MT2}{=} 1 \dot{-} (0 + 1)$
$M_T(J, t) = 1 \dot{-} 1 = 0$

Aufgabe 4.4 Beweisen Sie: Für jeden Term t uber N, der keine Variablen aussr möglicherweise $\underline{x}$ enthält, gilt $M_T(I,t) \leq (I(x)+2)^{n+1}$, wobei n die Anzahl der Vorkommen von Funktionssymbolen in t ist.

Der Text der Angabe lautete sinngemäss etwa "Das Ergebnis eines Terms, der nur maximal eine Variable enthält, ist immer kleiner oder gleich dem Wert der Variable+2 hoch der Anzahl an Operationen+1."

Term $t \rightarrow$ enthält $\underline{x}$, $\underline{0}$, $\underline{1}$
$M_T(I,t) \leq (I(x)+2)^{n+1}$.... n..Anzahl der Vorkommen von Funktionssymbol
Beweis mittels vollständiger Induktion

Induktionsanfang: $n = 0$
$\mathcal{M}_T(I,t) \leq (I(t)+2)^1$, stimmt für alle $t \in \{\underline{x}, \underline{0}, \underline{1}\}$
$t = \circ(t_1,t_2)$ wobei $\circ \in \{\underline{+}, \underline{\dot{-}}, \underline{*}\}$
t_1 mit i_1 Symbole und t_2 mit i_2 Symbolen $\Longrightarrow i_1 + i_2 = n$

Induktionshypothese: $i \leq n$
$\mathcal{M}_T(I,t) \leq (I(t)+2)^{i+1}$

Induktionsschritt: (Induktionshypothese für den Fall n+1)
Für jedes unserer Symbole (+, -, *) zeigen wir, dass die Bedingung erfüllt ist, wenn sie von den Termen links und rechts des Symbols erfüllt wird. Ein Term t mit n+1 Symbolen besteht aus zwei Teiltermen t_1 und t_2, verknüpft mit einem unserer Symbol. t_1 enthält i_1 Funktionssymbole, entsprechend enthält t_2 i_2 Symbole. Es gilt $t_1 + t_2 = n$ (n+1 - dem einen Symbol mit dem verknüpft wird)

Addition:

$\mathcal{M}_T(I,t_1) + \mathcal{M}_T(I,t_2) \leq (I(x)+2)^{i_1+1} + (I(x)+2)^{i_2+1} \leq 2*(I(x)+2)^{max(i_1+1,i_2+1)}$
weil der Term $(I(x)+2)$ mindestens den Wert 2 hat, gilt für das Ganze:
$2*(I(x)+2)^{max(i_1+1,i_2+1)} \leq (I(x)+2)^{max(i_1+1,i_2+1)+1} \leq (I(x)+2)^{n+2}$
Und das entspricht der Induktionsbehauptung für n+1.

Multiplikation:
$(I(x)+2)^{i_1+1} * (I(x)+2)^{i_2+1} \leq (I(x)+2)^{i_1+i_2+2} \leq (I(x)+2)^{n+2}$

Subtraktion:

$$\mathcal{M}_T(I,t_1) - \mathcal{M}_T(I,t_2) \leq \mathcal{M}_T(I,t_1) \leq (I(x)+2)^{i_1+1} \leq (I(x)+2)^{n+2}$$

Es gilt deshalb $\mathcal{M}_T(I,t_1) - \mathcal{M}_T(I,t_2) \leq \mathcal{M}_T(I,t_1)$, da entweder $\mathcal{M}_T(I,t_2) \geq \mathcal{M}_T(I,t_1)$ gilt, worauf der Ausdruck 0 wird, oder $\mathcal{M}_T(I,t_2) < \mathcal{M}_T(I,t_1)$, worauf der Ausdruck im besten Fall ($i_2 = 0$) genau $\mathcal{M}_T(I,t_1)$ ist und ansonsten immer kleiner.

Aufgabe 4.5 Die Modellstruktur $\mathbb{S}^*$ sei genau wie $\mathbb{S}$ definiert, mit dem einzigen Unterschied, dass $\mathbb{S}^*$ eine zusätzliche zweistellige Relation $\succ$ enthält. $s_1 \succ s_2$ – lies: 's_1 ist tiefer als s_2' – trifft genau dann zu, wenn $|s_1| > |s_2|$ gilt. (Unter der Tiefe eines Stacks s verstehen wir also $|s|$, die Länge des entsprechenden Binärworts.) Für das entsprechende Prädikatensymbol soll die Infix-Notation verwendet werden.
Drücken Sie folgende Relationen durch Boolsche Ausdrücke über $\mathbb{S}^*$ aus:

a) Stacks $\underline{x}$ und $\underline{y}$ sind gleich tief

anders ausgedruckt: x ist nicht tiefer als y, und y ist nicht tiefer als x $\Longrightarrow$ beide gleich tief
$\underline{\neg(\underline{x}\succ\underline{y})\wedge\neg(\underline{y}\succ\underline{x})}$
$\neg(x \succ y) \wedge \neg(y \succ x) = \neg((x \succ y) \vee (y \succ x))$

b) Der Unterschied der Tiefen von $\underline{x}$ und $\underline{y}$ beträgt genau 1.

Der Unterschied ist dann genau 1, wenn $|x| - |y| = 1 \vee |y| - |x| = 1$
Da wir die Längen nicht voneinander subtrahieren können, sondern nur mit push und pop 1 addieren/subtrahieren können, formen wir um:
$|x| = |y| + 1 \vee |y| = |x| + 1$
Ich wähle deshalb die Methode mit +1 (push), weil bei 2 Stacks, die beide leer sind, -1 (pop) wieder einen leeren Stack ergeben würde. Push funktioniert immer, weil die Stacks theoretisch ins unendliche wachsen können.
So, wir können aber nicht auf gleiche Länge überprüfen, also wandlen wir das auf den kleiner (tiefer)-Operator um: $a = b \Longleftrightarrow \neg(a < b) \wedge \neg(b < a)$
$\Longrightarrow (\neg(x > y + 1) \wedge \neg(y + 1 > x)) \vee (\neg(y > x + 1) \wedge \neg(x + 1 > y))$
"y ist um 1 grösser als x ODER x ist um 1 grösser als y."
Noch die Negatoren zusammenfassen: $\neg((x > y + 1) \vee (y + 1 > x)) \vee \neg((y > x + 1) \vee (x + 1 > y))$
Und noch mal: $\neg(((x > y + 1) \vee (y + 1 > x)) \wedge ((y > x + 1) \vee (x + 1 > y)))$
So, den Ausdruck jetzt an die passenden Stack-Operatoren anpassen:
$\neg(((x \succ push1(y)) \vee (push1(y) \succ x)) \wedge ((y \succ push1(x)) \vee (push1(x) \succ y)))$

c) Die durch $\underline{x}$, $\underline{y}$ und $\underline{z}$ bezeichneten Stacks sind in dieser Reihenfolge nach (nicht notwendigerweise strikt) aufsteigender Tiefe sortiert.

anders ausgedruckt: y ist tiefer als x, oder (x ist nicht tiefer als y und y ist nicht tiefer als x) UND z ist tiefer als y, oder (y ist nicht tiefer als z und z ist nicht tiefer als y)
$\underline{((\underline{y}\succ\underline{x})\vee(\neg(\underline{x}\succ\underline{y})\wedge\neg(\underline{y}\succ\underline{x})))\wedge((\underline{z}\succ\underline{y})\vee(\neg(\underline{y}\succ\underline{z})\wedge\neg(\underline{z}\succ\underline{y})))}$

TIL - Übungsblatt 5 (SS 2008)

ausgearbeitet von feurio

1. August 2008

Theoretische Informatik und Logik-Übung (SS 2008)

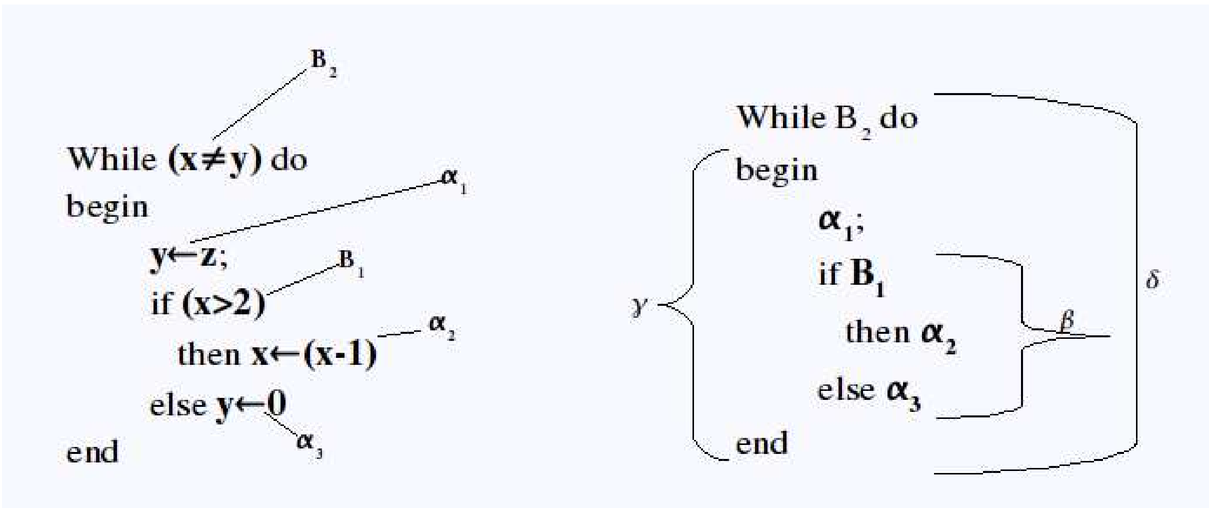
Übungsblatt 5 - SS 2008

Aufgabe 5.1 Es sei
$\pi \;=\; \underline{while}\;\; \underline{(x{\neq}y)}\;\; \underline{do}\;\; \underline{begin}\;\; \underline{y{\leftarrow}z;}\;\; \underline{if}\;\; \underline{(x{>}2)}\;\; \underline{then}\;\; \underline{x{\leftarrow}(x1)}\;\; \underline{else}\;\; \underline{y{\leftarrow}0}\;\; \underline{end}$
Geben Sie eine vollständige syntaktische Analyse von π. Mit anderen Worten: Zeigen Sie schrittweise, dass $\pi \in$ ALI.

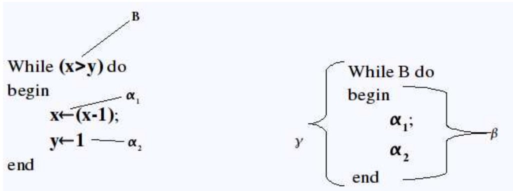
SYNTAX VON ALI: Die Menge ALI der Statements über Z ist die kleinste Menge, für die gilt:
(AL1) Ist v $\in$ IVS und t $\in \mathcal{T}(\mathbb{Z})$, dann ist $v\underline{\leftarrow}t \in AL(\mathbb{Z})$
(AL2) Sind $\alpha, \beta \in ALI$, dann ist $\underline{begin}\ \alpha\ \underline{;}\ \beta\ \underline{end} \in ALI$
(AL3) Ist B $\in BA(\mathbb{Z})$ und sind $\alpha, \beta \in ALI$, dann ist $\underline{if}\ B\ \underline{then}\ \alpha\ \underline{else}\ \beta\ \in ALI$
(AL4) Ist B $\in BA(\mathbb{Z})$ und $\alpha \in ALI$, dann ist $\underline{while}\ B\ \underline{do}\ \alpha\ \in ALI$

$\underline{while}\ \ \underline{(x{\neq}y)}\ \ \underline{do}\ \ \underline{begin}$
. $\underline{y{\leftarrow}z;}$
. $\underline{if}\ \ \underline{(x{>}2)}$
. $\underline{then}\ \ \underline{x{\leftarrow}(x\_1)}$
. $\underline{else}\ \ \underline{y{\leftarrow}0}$
$\underline{end}$

$\underline{\alpha_1} : y \in IVS \wedge z \in \mathcal{T}(\mathbb{Z}) \overset{AL1}{\Longrightarrow} \alpha_1 = y \longleftarrow z \in ALI$
$\underline{\alpha_2} : x \in IVS \wedge \underline{(x\_1)} \in \mathcal{T}(\mathbb{Z}) \overset{AL1}{\Longrightarrow} \alpha_2 = x \longleftarrow \underline{(x\_1)} \in ALI$
$\underline{\alpha_3} : y \in IVS \wedge 0 \in \mathcal{T}(\mathbb{Z}) \overset{AL1}{\Longrightarrow} \alpha_3 = y \longleftarrow 0 \in ALI$
$\underline{\beta} : \underline{(x{>}2)} = B_1 \in \mathcal{BA}(\mathbb{Z}) \wedge \alpha_2, \alpha_3 \in ALI \overset{AL3}{\Longrightarrow} \beta = \underline{if}\ B_1\ \underline{then}\ \alpha_2\ \underline{else}\ \alpha_3\ \in ALI$
$\underline{\gamma} : \alpha_1, \beta \in ALI \overset{AL2}{\Longrightarrow} \gamma = \underline{begin}\ \alpha_1; \beta\ \underline{end}\ \in ALI$
$\underline{\delta} : \underline{(x{\neq}y)} = B_2\ \in \mathcal{BA}(\mathbb{Z}) \wedge \gamma \in ALI \overset{AL4}{\Longrightarrow} \delta =\ \underline{while}\ B_2\ \underline{do}\ \gamma\ \in ALI$



Aufgabe 5.2 Es sei π das ALI-Programm
while $(x > y)$ *do begin* $x \longleftarrow (x-1)$; $y \longleftarrow 1$ *end*
Berechnen Sie $\mathcal{M}_{\mathcal{AL}}(I, \pi)$, wobei $\mathcal{I}(\underline{x}) = 2$ und $\mathcal{I}(\underline{y}) = 0$



$\alpha_1 = x \longleftarrow (x-1)$ $\qquad$ $\alpha_2 = y \longleftarrow 1$ $\qquad$ $B = (x > y)$
$\beta = \underline{begin}\ \alpha_1\ ;\ \alpha_2\ \underline{end}$ $\qquad$ $\gamma = \underline{while}\ B\ \underline{do}\ \beta$

SEMANTIK VON ALI: Die Semantik der Statements aus ALI wird durch die Funktion $\mathcal{M}_{\mathcal{AL}} :\ ENV\ \times\ ALI \rightarrow\ ENV$ festgelegt, die definiert ist durch:
(MAL1) $\mathcal{M}_{\mathcal{AL}}(I, v \underline{\leftarrow} t) = I'$ wobei $I'(v) = \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, t)$ und $I'(w) = I(w)$
(MAL2) $\mathcal{M}_{\mathcal{AL}}(I,\ \underline{begin}\ \alpha\ ;\ \beta\ \underline{end}) = \mathcal{M}_{\mathcal{AL}}(\mathcal{M}_{\mathcal{AL}}(I, \alpha), \beta)$
(MAL3) $\mathcal{M}_{\mathcal{AL}}(I,\ \underline{if}\ B\ \underline{then}\ \alpha\ \underline{else}\ \beta) =$
$\mathcal{M}_{\mathcal{AL}}(I, \alpha)$ $\qquad$ falls $\mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I, B) = true$
$\mathcal{M}_{\mathcal{AL}}(I, \beta)$ $\qquad$ falls $\mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I, B) = false$
(MAL4) $\mathcal{M}_{\mathcal{AL}}(I,\ \underline{while}\ B\ \underline{do}\ \alpha) =$
$\mathcal{M}_{\mathcal{AL}}(\mathcal{M}_{\mathcal{AL}}(I, \alpha),\ \underline{while}\ B\ \underline{do}\ \alpha)$ für $\mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I, B) = true$
$\mathcal{I}$ für $\mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I, B) = false$

$\mathcal{M}_{\mathcal{AL}}(I,\ \pi) =$
$= \mathcal{M}_{\mathcal{AL}}(I, \underline{while}\ B\ \underline{do}\ \beta) =$
...$[\mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I, B) = \mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I, \underline{(x{>}y)}) = (\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, \underline{x}) > \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, \underline{y}) = (2 > 0) = \mathbf{t}]$
$\overset{MAL4}{=} \mathcal{M}_{\mathcal{AL}}(\mathcal{M}_{\mathcal{AL}}(I, \beta), \underline{while}\ B\ \underline{do}\ \beta)$
$\overset{MAL2}{=} \mathcal{M}_{\mathcal{AL}}(I, \underline{begin}\ \alpha_1, \alpha_2\ \underline{end}) = (\mathcal{M}_{\mathcal{AL}}(I, \alpha_1), \alpha_2)$ links anfangen: zuerst α_1,α_2
$\Longrightarrow$ **α_1 auswerten**
$\overset{MAL1}{=} \mathcal{M}_{\mathcal{AL}}(I)\ x \longleftarrow (x-1)\ \ = I'$
wobei $I'(\underline{x}) = \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, \underline{(x-1)}) = \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, \underline{x}) - \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, \underline{1}) = I(\underline{x}) - 1 = 2 - 1 = 1$
$\Longrightarrow$ das neue I $\rightarrow I'(x) = 2 - 1 = 1$ $\qquad$ daher $I'(1, 0)$
y bleibt gleich $\rightarrow$0 $\qquad$ $\mathcal{M}_{\mathcal{AL}}(I' = (1, 0), \alpha_2)$
$\Longrightarrow$ **α_2 auswerten**
$\overset{MAL1}{=} \mathcal{M}_{\mathcal{AL}}(I'')\ y \longleftarrow 1\ \ = I''$
wobei $I''(\underline{y}) = \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, 1)$
$\Longrightarrow$ neues I, also I"(x) bleibt gleich = 1 $\qquad$ $I''(1, 1)$
$I''(y) = 1$
$\mathcal{M}_{\mathcal{AL}}(I''(x) = 1, (y) = 1) = \mathcal{M}_{\mathcal{AL}}((I'', \alpha_1), \alpha_2) = (1, 1)$
$\mathcal{M}_{\mathcal{AL}}((1, 0), \alpha_2) = (1, 1) \Longrightarrow$ neue Belegungsfunktion von I
$\Longrightarrow$ Programm neu auswerten und zwar mit 1,1
Bei (MAL4) ist d erste Bedingung nicht erfüllt,sondern d zweite $\Longrightarrow$ FALSE
$\overset{MAL2}{=} \mathcal{M}_{\mathcal{AL}}(I'', \underline{while}\ B\ \underline{do}\ \beta) = I(1, 1)$ ist $\mathbf{f}$ Einmal wurde die ganze Schleife durchgelaufen. Beim zweiten versuch wurde die B Bedingung nicht mehr erfullt

Aufgabe 5.3 Geben Sie für jede der folgenden Grammatiken und die von der jeweiligen grammatik erzeugte Sprache an, ob Sie regulär, kontextfrei und/oder monoton ist:
1. $G_1 = \langle\{A,B\},\{\underline{0},\underline{1}\},\{A \Longrightarrow \underline{0}B, B \Longrightarrow \underline{1}A, A \Longrightarrow \varepsilon\},A\rangle$
2. $G_2 = \langle\{A,B\},\{\underline{0},\underline{1}\},\{A \Longrightarrow \underline{0}B, B \Longrightarrow A\underline{1}, A \Longrightarrow 1\},A\rangle$

$G_1 = \langle\{A,B\},\{\underline{0},\underline{1}\},\{A \Longrightarrow \underline{0}B, B \Longrightarrow \underline{1}A, A \Longrightarrow \varepsilon\},A\rangle$

$$
\begin{array}{lllll}
G_1 = \langle & & & & \\
. & V = \{A,B\}, & & & \\
. & T = \{\underline{0},\underline{1}\}, & & & \\
. & P = \{ \quad A \Rightarrow & \underline{0}B & | & \varepsilon \\
 & \quad\quad\quad B \Rightarrow & \underline{1}A & & \},A\rangle
\end{array}
$$

$$\underbrace{A}_{\varepsilon} \Rightarrow \underline{0}B \Rightarrow \underbrace{\underline{01}A}_{\underline{01}} \Rightarrow \underline{010}B \Rightarrow \underbrace{\underline{0101}A}_{(\underline{01})^2} \overset{*}{\Rightarrow} \underbrace{A(\underline{01})^nA}_{(\underline{01})^n} \Rightarrow (\underline{01})^n\underline{0}B \Rightarrow (\underline{01})^{n+1}A \Rightarrow ..\underbrace{..}_{(\underline{01})^*}$$

G_1 ist eine reguläre und somit auch kontextfreie Grammatik.
G_1 ist nicht monoton, da in einer monotonen Grammatik $A \Longrightarrow \varepsilon$ nicht erlaubt ist, nachdem A auch auf der rechten Seite der Produktion vorkommt (mit $B \Longrightarrow \underline{1}A$)
$\mathcal{L}_(\mathcal{G}_\infty)$ wird von einer regulären Grammatik erzeugt und somit sicherlich regulär. Laut Chomsky-Hierarchi muss ise auch kontextfrei und monoton sein.

$G_2 = \langle\{A,B\},\{\underline{0},\underline{1}\},\{A \Longrightarrow \underline{0}B, B \Longrightarrow A\underline{1}, A \Longrightarrow 1\},A\rangle$

$$
\begin{array}{lllll}
G_2 = \langle & & & & \\
. & V = \{A,B\}, & & & \\
. & T = \{\underline{0},\underline{1}\}, & & & \\
. & P = \{ \quad A \Rightarrow & \underline{0}B & | & \underline{1} \\
 & \quad\quad\quad B \Rightarrow & A\underline{1} & & \},A\rangle
\end{array}
$$

$$\underbrace{A}_{\underline{1}} \Rightarrow \underline{0}B \Rightarrow \underbrace{\underline{0}A\underline{1}}_{\underline{0}^1\underline{1}^2} \Rightarrow \underline{00}B\underline{1} \Rightarrow \underbrace{\underline{00}A\underline{11}}_{\underline{0}^2\underline{1}^3} \overset{*}{\Rightarrow} \underbrace{\underline{0}^nA\underline{1}^n}_{\underline{0}^n\underline{1}^{n+1}} \Rightarrow \underline{0}^{n+1}B\underline{1}^{n+1} \Rightarrow \underline{0}^{n+1}A\underline{1}^{n+1} \Rightarrow ....$$

G_2 ist eine kontextfreie und monotone Grammatik
Wegen der Produktionen $B \Longrightarrow A\underline{1}$ und $A \Longrightarrow 1$ ist G_2 nicht regulär.
$\mathcal{L}_(\mathcal{G}_\in) = \{\underline{0}^n\underline{1}^{n+1} \mid n \geq 0\}$ ist keine reguläre, aber eine kontextfreie und somit monotone Sprache.
Dass $\mathcal{L}_(\mathcal{G}_\in)$ kontextfei ist, kann man z.b. mittels gsm-Abbildung auf $\{\underline{a}^n\underline{b}^n \mid n \geq 0\}$ beweisen

Kontextsensitive Gr.: Eine GR heisst kontextsensitiv, wenn ihre Regeln von der folgenden Form sind: $l \longrightarrow r$ mit $|l| \leq |r|$.

Aufgabe 5.4 Sei $L = \{\omega \in \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{3}^{+}\} \mid \quad |w|_0 = 2|w|_1 = 3|w|_2 = 6|w|_3\}$.
Geben Sie eine monotone Grammatik G mit $G = \langle\{S\}, \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{3}\}, P, S\rangle$ an, die L erzeugt und erläutern Sie die Arbeitsweise Ihrer Grammatik.

$\Longrightarrow L = \{\omega \in \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{3}\}^{*} || \omega|_0 = 6n,\ |\omega|_1 = 3n,\ |\omega|_2 = 2n,\ |\omega|_3 = n\}$

$P := \{S \Longrightarrow \underline{0}^6 \underline{1}^3 \underline{2}^2 \underline{3}^1\ S \quad | \ \underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{3}\}$

$\underbrace{\underline{0}^6 \underline{1}^3 \underline{2}^2}_{x} \underline{3}^1 \quad S \Longrightarrow$ x kann ω beliebig oft auf S abbilden. $x^1 S, x^2 S, x^3 S, ...$

Ebenfalls gültig:
$\underline{0}^{6n} \underline{1}^{3n} \underline{2}^{2n} \underline{3}^{n} \qquad n \geq 1....()^{+}$ (+, weil keine ε

$\cup\{\underline{xy} \Longrightarrow \underline{yx} \mid \underline{x}, \underline{y} \in \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{3}\}\}$

$\Longrightarrow$ zwei nebeinander stehende Terminale können vertauscht werden.
Bsp.: wir haben 000000111223 und wir wollen die 1er nach vorn
$\Longrightarrow 00000 \underbrace{01}_{xy \to yx} 11223 \Longrightarrow 0000 \underbrace{01}_{xy \to yx} 011223 \Longrightarrow 000 \underbrace{01}_{xy \to yx} 0011223 \Longrightarrow 00 \underbrace{01}_{xy \to yx} 00011223$
$\Longrightarrow 0 \underbrace{01}_{xy \to yx} 000011223 \Longrightarrow \underbrace{01}_{xy \to yx} 0000011223 \Longrightarrow 100000011223...... \Longrightarrow 111000000223$

Aufgabe 5.5 Sei $L = \{\omega \in \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{3}^+\} \quad | \quad |w|_0 = 2|w|_1 = 3|w|_2 = 6|w|_3\}$.
Zeigen Sie, dass L nicht kontextfrei ist - lösen Sie (a) ODER (b)!

(a) Geben Sie eine deterministische gsm an, die L auf $\{\underline{a}^{6n}\underline{b}^{6n}\underline{c}^{6n}\}$ abbildet.

(b) Begründen Sie in ähnlicher Weise wie in Beispiel 4.2, dass L nicht kontextfrei sein kann.

$\underbrace{L \cap \underbrace{\{\underline{0}^*, \underline{1}^*, \underline{2}^*, \underline{3}^*\}}_{L \in L_1(regulaer)} \quad = \quad \underbrace{\{\underline{0}^{6n}\underline{1}^{3n}\underline{2}^{2n}\underline{3}^{n}\}}_{L \in L_2(kontextfrei)}}_{L_1 \cap L_2\ ist\ kontextfrei}$ wie Bsp. 4.2.

Das gewünschte Verhältnis von a, b und c in L_2 ist $a : b : c = 6 : 4 : 9$

weil $|\omega|_0 = 6n$ ist $\Longrightarrow h(\underline{0}) = \underline{a}$
weil $|\omega|_2 = 2n$ ist $\Longrightarrow h(\underline{2}) = \underline{bb}$
weil $|\omega|_1 = 3n$ ist $\Longrightarrow h(\underline{1}) = \underline{ccc}$
weil der Term verschwinden muss $\Longrightarrow h(\underline{3}) = \varepsilon$

$h(\{\underline{0}^{6n}\underline{1}^{3n}\underline{2}^{2n}\underline{3}^{n}\} = \{\underline{a}^{6n}\underline{b}^{6n}\underline{c}^{6n} \mid n \geq 1\} \notin L_2$ (Beweis im Skript: Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen.
Annahme: L ist kontextfrei $\Longrightarrow$ Widerspruch zur Annahme, dass L kontextfrei ist.
$\Longrightarrow L \neg\ kontextfrei$

	L_3	L_2	L_1	L_0
Vereinigung	ja	ja	ja	ja
Konkatenation	ja	ja	ja	ja
Kleenescher Stern	ja	ja	ja	ja
Komplement	ja	nein	ja	nein
Durchschnitt	ja	nein	ja	ja
Durchschnitt mit reg. Mengen	ja	ja	ja	ja
Homomorphismen	ja	ja	nein	ja
ε-freie Homomorphismen	ja	ja	ja	ja
inverse Homomorphismen	ja	ja	ja	ja
gsm-Abbildungen	ja	ja	nein	ja
ε-freie gsm Abbildungen	ja	ja	ja	ja

TIL - Übungsblatt 6 (SS 2008)

ausgearbeitet von feurio

1. August 2008

Theoretische Informatik und Logik-Übung (SS 2008)

Übungsblatt 6 - SS 2008

Aufgabe 6.1 Definieren Sie eine deterministische Turingmaschine, welche die Sprache
$L = \{\underline{1}^{n+m} \underline{\equiv} \underline{1}^n \underline{+} \underline{1}^m \mid n, m \geq 1\}$
akzeptiert und die Kellerautomatenbedingung erfüllt (s. Definition 1.101 auf Seite 58 im Skriptum; bitte beachten: eine Turingmaschine, welche die Kellerautomatenbedingung erfüllt, ist keineswegs ein Kellerautomat im Sinne der Definition 1.103!).

Eine Turingmachine erfüllt die Kellerautomatenbedingung:
wenn sie auf dem eingabeband nie nach links gehen kann und

für den Lese-/Schreibkopf auf dem Arbeitsband in jeder Konfiguration gilt
links davon nur Non-Blank-symbole
rechts davon nur Blank-Symbole stehen können

$$M = (\underbrace{\{\ q_{links}, q_{sum1}, q_{sum1ok}, q_{sum2}, q_{sum2ok}, q_{end}\}}_{Zustande}, \underbrace{\{\underline{1}, \underline{\equiv}, \underline{+}\}}_{Alphabet-EB}, \underbrace{\{z_0, B, k\}}_{Alphabet-AB}, \delta, q_{links}, z_0, B, \{q_{end}\})$$

δ = Übergangfunktion
q_{links} = Q der Startzustand
z_0 = V das linke Begrenzungssymbol
B = V das Blanksymbol
q_{end} = Endzustand

$\delta :=$

$\delta(q_{links}, \underline{1}, B) = (q_{links}, k, R, R)$ Arbeitsband 'merkt' sich Anzahl der 1er mit den k
$\delta(q_{links}, \underline{\equiv}, B) = (q_{sum1}, B, R, L)$
$\delta(q_{sum1}, \underline{1}, k) = (q_{sum1ok}, B, R, L)$ | k für 1 Summand entfernen
$\delta(q_{sum1ok}, \underline{1}, k) = (q_{sum1ok}, B, R, L)$ | + garantie dafür, dass $n \geq 1$
$\delta(q_{sum1ok}, \underline{+}, k) = (q_{sum2}, k, R, S)$
$\delta(q_{sum2}, \underline{1}, k) = (q_{sum2ok}, B, R, L)$ | k für 2 Summand entfernen
$\delta(q_{sum2ok}, \underline{1}, k) = (q_{sum2ok}, B, R, L)$ | + garantie dafür, dass $m \geq 1$
$\delta(q_{sum2}, z_2, z_0) = (q_{end}, z_0, S, R)$

Bsp.:
$\delta = (p, a, B; p, A, R, R)$.....schreibe fur jedes eingelesenes Symbol a ein A aufs Arbeitsband
$\delta(q_{links}, \underline{1}, B) = (q_{links}, k, R, R)$ schreibe fur jedes eingelesenes 1 ein k aufs Arbeitsband
Wichtiges: Eine Sprache wird genau dann von einer deterministischen Turingmaschine akzeptiert, wenn sie von einer Typ-0-Grammatik erzeugt wird.

Aufgabe 6.2 Geben Sie ein D0L-System für eine der beiden folgenden Sprachen an:
$L_1 = \{\underline{0}^{2^n}\ \underline{1}^{2008}\ \underline{0}^{2^n} \mid n \geq 0\}$
$L_2 = \{\underline{a}^{3^n}\ \underline{b}^{5^n}\ \underline{c}^{7^n}\ \underline{d}^{9^n} \mid n \geq 0\}$

$G_1 = (\{\underline{0}, \underline{1}\}, \{\underline{0} \to \underline{0}^2, (\underline{1} \to \underline{1})\}, \underline{0}\ \underline{1}^{2008}\underline{0})$

$G_2 = (\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}, \}, \{\underline{a} \to \underline{a}^3, \underline{b} \to \underline{b}^5, \underline{c} \to \underline{c}^7, \underline{d} \to \underline{d}^9\}, \underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}\ \underline{d})$

Das Wesentliche dieser parallelen Grammatiken (L-Systeme) bestehen in der gleichzeitigen parallelen Anwendung der Produktionen aus einer vorgegebenen Produktionen-Menge auf alle zeichen einer Satzform.

D0L = Deterministische 0L-System
wenn V = T ist und n = 1, G=(V,P,w)

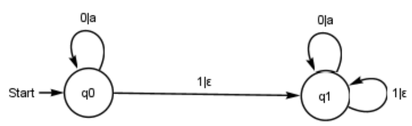
D0L-Systeme Eigenschaften
Für jedes Symbol a gibt es genau eine Produktion $a \to w_a$
Die Menge der Produktionen $\Longrightarrow$ als Homomorphismus h auf V^* mit $h(a) = w_a$.
Das heit, die Ableitung entspricht den wiederholten Anwendung des Homomorphismus h.

D0L-Systeme sind gegenber Vereinigung nicht Abgeschlossen.
z.B. zwei 0L-Sprachen: $\{a\}$ und $\{aa\}$
Vereinigung der zwei Sprachen $\{a, aa\}$ kann von keinem 0L-System erzeugt werden.

Aufgabe 6.3 Zeigen Sie für die von Ihnen gewählte Sprache aus Beispiel 6.2, dass diese nicht kontextfrei ist; verwenden Sie dazu einen Homomorphismus oder eine gsm, um die gegebene Sprache auf eine Sprache der folgenden Gestalt abzubilden:
$\{\underline{a}^{k^n} \mid n \geq 0\ ,\ k \geq 2\}$
oder
$\{\underline{a}^{k^n} \mid n \geq 1\ ,\ k \geq 2\}$

a) $L_1 = \{\underline{0}^{2^n}\ \underline{1}^{2008}\ \underline{0}^{2^n} \mid n \geq 0\}$

Homomorphismus:
$h(\underline{0}) = \underline{a}$
$h(\underline{1}) = \varepsilon$
$h(\underline{0}^{2^n}\underline{1}^{2008}\underline{0}^{2^n}) = \underbrace{h(\underline{0})^{2^n}}_{\underline{a}}\ \underbrace{h(\underline{1})^{2008}}_{\varepsilon}\ \underbrace{h(\underline{0})^{2^n}}_{\underline{a}} = \underline{a}^{2^{n+1}}$
$\Longrightarrow h(L_1) = \{\underline{a}^{2^n} \mid n \geq 1\}$
gsm:



b) $L_2 = \{\underline{a}^{3^n}\ \underline{b}^{5^n}\ \underline{c}^{7^n}\ \underline{d}^{9^n} \mid n \geq 0\}$

Homomorphismus:
$h(\underline{a}) = \underline{a}$
$h(\underline{b}) = \varepsilon\ ,\ h(\underline{c}) = \varepsilon\ ,\ h(\underline{d}) = \varepsilon$
$h(\underline{a}^{3^n}\underline{b}^{5^n}\underline{c}^{7^n}\underline{d}^{9^n}) = \underbrace{h(\underline{a})^{3^n}}_{\underline{a}}\ \underbrace{h(\underline{b})^{5^n}}_{\varepsilon}\ \underbrace{h(\underline{c})^{7^n}}_{\varepsilon}\ \underbrace{h(\underline{d})^{9^n}}_{\varepsilon} = \underline{a}^{3^n}$
$\Longrightarrow h(L_2) = \{\underline{a}^{3^n} \mid n \geq 0\}$
gsm:

Kontextfreie sprachen unter gsm/Homomorphismus abgeschlossen
$\Longrightarrow$ Wiederspruch zur Annahme L_1/L_2 sei kontextfrei

Aufgabe 6.4 Geben Sie eine Matrixgrammatik (ohne ac) mit erweitert regulären Produktionen, also Produktionen der Gestalt $A \to \omega C$, $A \to \omega$ für $A, C \in \mathcal{N}$ und $\omega \in T^*$, für eine der beiden folgenden Sprachen an:
$L_3 = \{\underline{0}^{2^n}\ \underline{1}^{2008}\ \underline{0}^{2^n} \mid n \geq 0\}$
$L_4 = \{\underline{a}^{3^n}\ \underline{b}^{5^n}\ \underline{c}^{7^n}\ \underline{d}^{9^n} \mid n \geq 0\}$

Eine Matrix ist eine endliche Folge von Produktionen $[p_1, ..., p_k$, die in der vorgegebenen Reihenfolge vollständig abgearbeitet werden müssen.
Normalerweise ist die Matrixgrammatik gegeben durch:
$G_M = (N, T, M, A, F)$
N....Alphabet der Variablen (Nonterminalsymbole)
T....Alphabet der Terminalsymbole
M....Menge von Matrizen
A....Axiom ....$(N \cup T)^+$
F....Menge von produktionen, die in den matrizen vorkommen... das heit $F \subseteq M$

in unserem Fall
ist die die Grammatik ohne ac (also $F = \{\}$).... ac appearance checking (Vorkommenstest)
$G_M = (N, T, M, A)$

a) $L_3 = \{\underline{0}^{2^n}\ \underline{1}^{2008}\ \underline{0}^{2^n} \mid n \geq 0\}$

$G_3 = (\{L, R\}, \{\underline{0}, \underline{1}\}, M, L\underline{1}^{2008}R)$
Matrix $M\ =\ \{\underbrace{[L \to \varepsilon, R \to \varepsilon]}_{1}, \underbrace{[L \to \underline{0}^2 L, R \to \underline{0}^2 R]}_{2}\}$

$$\underbrace{L\underline{1}^{2008}R}_{\underline{1}^{2008}} \overset{S}{\Longrightarrow} \underbrace{\underline{0}^2 L\underline{1}^{2008}\underline{0}^2 R}_{\underline{0}^2\underline{1}^{2008}\underline{0}^2} \overset{*}{\Longrightarrow} \underbrace{\underline{0}^{2n} L\underline{1}^{2008}\underline{0}^{2n} R}_{\underline{0}^{2n}\underline{1}^{2008}\underline{0}^{2n}} \Longrightarrow \underline{0}^{2(n+1)} L\underline{1}^{2008}\underline{0}^{2(n+1)} R$$

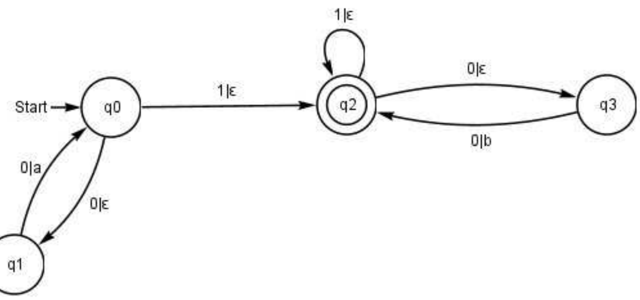
b) $L_4 = \{\underline{a}^{3^n}\ \underline{b}^{5^n}\ \underline{c}^{7^n}\ \underline{d}^{9^n} \mid n \geq 0\}$

$G_3 = (\{A, B, C, D\}, \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}\}, M, ABCD)$
Matrix $M\ =\ \{\underbrace{[A \to \varepsilon, B \to \varepsilon, C \to \varepsilon, D \to \varepsilon,]}_{1}, \underbrace{[A \to \underline{a}^3 A, B \to \underline{b}^5 B, C \to \underline{c}^7 C, D \to \underline{d}^9 D,]}_{2}\}$

$$\underbrace{ABCD}_{\varepsilon} \overset{S}{\Longrightarrow} \underbrace{\underline{a}^3 A\underline{b}^5 B\underline{c}^7 C\underline{d}^9 D}_{\underline{a}^3\underline{b}^5\underline{c}^7\underline{d}^9} \overset{*}{\Longrightarrow} \underbrace{\underline{a}^{3n} A\underline{b}^{5n} B\underline{c}^{7n} C\underline{d}^{9n} D}_{\underline{a}^{3n}\underline{b}^{5n}\underline{c}^{7n}\underline{d}^{9n}} \Longrightarrow \underline{a}^{3(n+1)} A\underline{b}^{5(n+1)} B\underline{c}^{7(n+1)} C\underline{d}^{9(n+1)} D$$

Aufgabe 6.5 Zeigen Sie für die von Ihnen gewählte Sprache aus Beispiel 6.4, dass diese nicht regulär (L_3) bzw. nicht kontextfrei (L_4) ist; verwenden Sie dazu einen Homomorphismus oder eine gsm, um die gegebene Sprache auf eine aus der Vorlesung bekannte Sprache, welche nicht regulär bzw. kontextfrei ist, abzubilden.
$L_3 = \{\underline{0}^{2^n}\ \underline{1}^{2008}\ \underline{0}^{2^n} \mid n \geq 0\}$
$L_4 = \{\underline{a}^{3^n}\ \underline{b}^{5^n}\ \underline{c}^{7^n}\ \underline{d}^{9^n} \mid n \geq 0\}$

$L_3 = \{\underline{0}^{2^n}\ \underline{1}^{2008}\ \underline{0}^{2^n} \mid n \geq 0\}$
$\underline{L_3 = \neg\ regular \Longrightarrow \text{gsm}}$



$gsm(L_3) = \{\underline{a}^n\underline{b}^n \mid n \geq 0\}$

$L_4 = \{\underline{a}^{3^n}\ \underline{b}^{5^n}\ \underline{c}^{7^n}\ \underline{d}^{9^n} \mid n \geq 0\}$
$\underline{L_4 = \neg\ kontextfrei \Longrightarrow \text{Homomorphismus}}$

$h(\underline{a}) = \underline{0}^3 \quad h(\underline{b}) = \underline{1} \quad h(\underline{c}) = \varepsilon \quad h(\underline{d}) = \underline{0}^3$

$h(L_4) = h(\underline{a}^{3^n}\underline{b}^{5^n}\underline{c}^{7^n}\underline{d}^{9^n}) = \underbrace{h(\underline{a})^{3^n}}_{\underline{0}^{9n}}\ \underbrace{h(\underline{b})^{5^n}}_{\underline{1}^{5n}}\ \underbrace{h(\underline{c})^{7^n}}_{\varepsilon}\ \underbrace{h(\underline{d})^{9^n}}_{\underline{0}^{9n}} = \underline{0}^{9n}\underline{1}^{5n}\underline{0}^{9n}$

$h(L_4)\ =\ \{\underline{0}^{9n}\underline{1}^{5n}\underline{0}^{9n} \mid n \geq 0\}$
$\Longrightarrow h(L_4)\neg\ kontextfrei$

TIL - Übungsblatt 7 (SS 2008)

ausgearbeitet von feurio

1. August 2008

Theoretische Informatik und Logik-Übung (SS 2008)

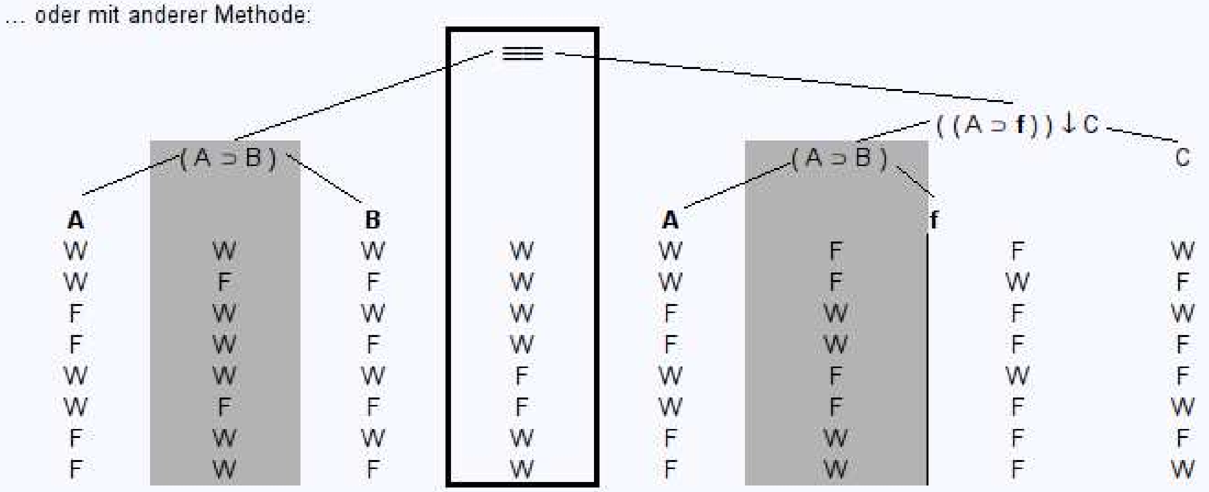
Übungsblatt 7 - SS 2008

Aufgabe 7.1 Bestimmen Sie für folgende Formeln durch Angabe des Wahrheitswertverlaufs, ob sie gültig, erfüllbar, widerlegbar, bzw. unerfüllbar sind. Geben Sie, wo möglich, jeweils ein Modell bzw. ein Gegenbeispiel an.

a) $(A \supset B) \equiv ((A \supset \mathbf{f}) \downarrow C)$

A	B	C	(A ⊃ B)	(A ⊃ **f**)	((A ⊃ **f**)) ↓ C	a)
t	t	t	t	f	f	t
f	t	t	t	t	f	t
f	f	t	t	t	f	t
t	f	t	f	f	f	f
t	t	f	t	f	t	f
f	t	f	t	t	f	t
f	f	f	t	t	f	t
t	f	f	f	f	t	t

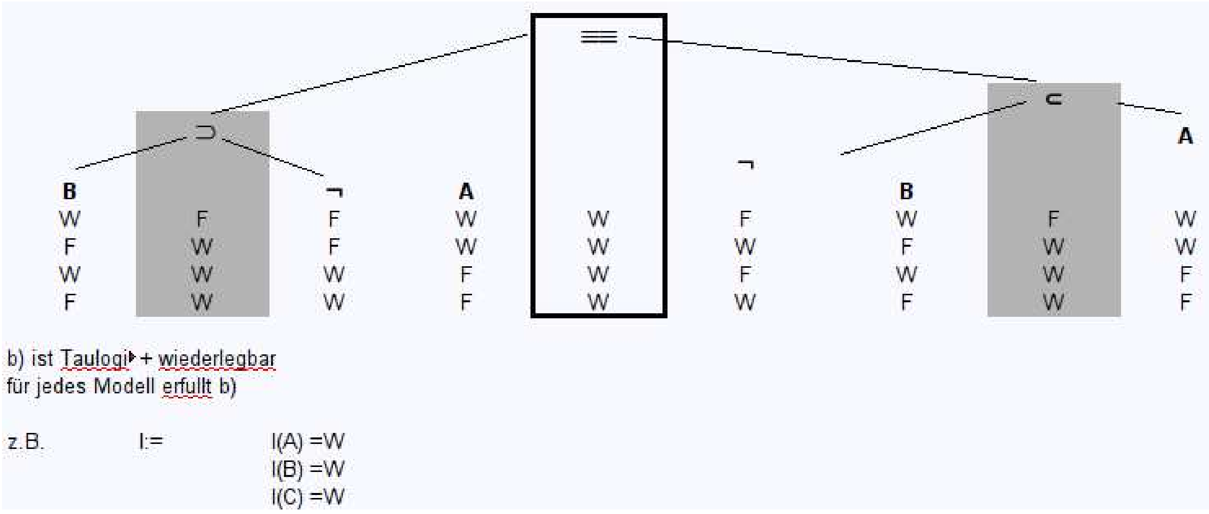
... oder mit anderer Methode:



a) ist erfüllbar + wiederlegbar

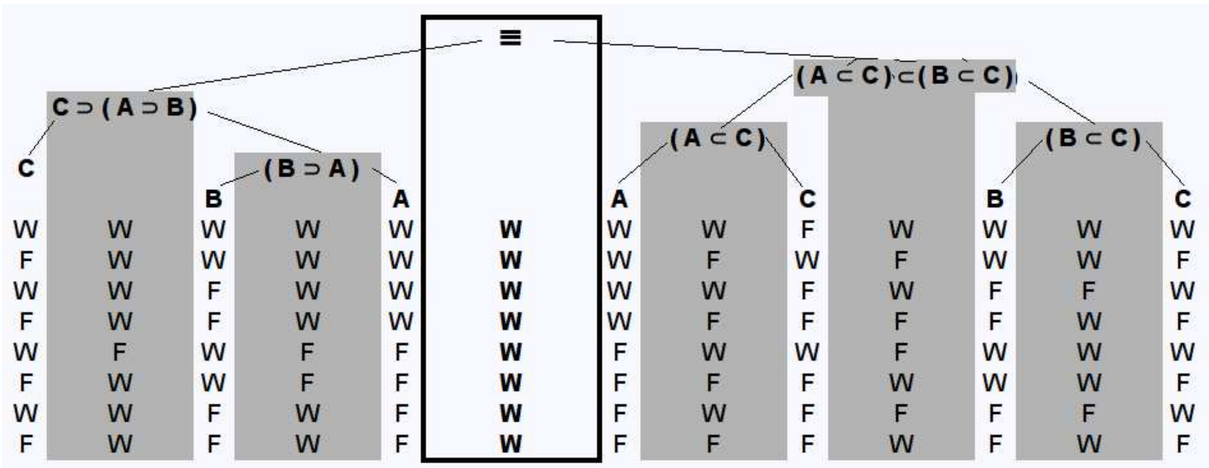
Model von a)		Gegenbeispiel fur a)	
I:=	I(A) =W	I:=	I(A) =W
	I(B) =W		I(B) =W
	I(C) =W		I(C) =F

b) $(B \supset \neg A) \equiv (\neg B \subset A)$



.

c) $(C \supset (B \supset A)) \equiv ((A \subset C) \subset (B \subset C))$



c) Taulogie / gültig
Model von c)
I(A) = W
I(B) = W
I(C) = W

Aufgabe 7.2 Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $F_1, ..., F_n \models G$ genau dann, wenn $(F_1 \wedge \wedge F_n) \supset G$ gültig ist. (Folgerung 3.32 zum Deduktionstheorem, Vorlesungsskriptum S. 95.)

DEDUKTIONSTHEOREM (laut Skript)
$(F_1 \wedge \wedge F_n) \supset G$ gilt genau dann, wenn $F_1 \supset (F_2 \supset ...(F_n \supset G)...)$ bzw $(F_1 \wedge ... \wedge F_n) \supset G$ eine gültige Formel ist.

Beispiel
B folgt logisch aus A und $A \supset B$, das heisst, es gilt A,$A \supset B \models B$. Daher sind die Formeln $A \supset ((A \supset B) \supset B)$ und $(A \wedge (A \supset B)) \supset B$ Tautologien.
Umgekehrt ergibt sich aus der Tatsache, dass $(A \wedge B) \supset (A \vee B)$ eine Tautologie ist, dass $(A \vee B)$ eine logische Konsequenz von $A \wedge B$ ist.
Eine Tautologie im Sinne der Logik ist eine Aussageform, die unabhängig von den Wahrheitswerten ihrer Bestandteile stets wahr ist. Der Wahrheitswert einer Tautologie ist wie der der Kontradiktion allein eine Funktion der durch semantische Regeln definierten Wahrheitsbedingungen der in ihr enthaltenen logischen Konstanten.
.
Ind. Anfang: $n = 1$
$F_1, ..., F_N \models G$ gdw $F_1, ..., F_{N-1} \models (F_N \supset G)$
.
Ind. Anfang: n
$F_1, ..., F_N \models G$ gdw $F_1, ..., F_{N-n} \models ((F_{N-(n-1)} \wedge \wedge F_N) \supset G)$
.
Ind. Schluss:
$F_1, ..., F_N \models G$ gdw $F_1, ..., F_{N-n} \models ((F_{N-(n-1)} \wedge \wedge F_N) \supset G)$
.
$n \rightarrow n + 1$
gdw $F_1, ..., F_{N-(n+1)} \models (F_{N-n} \models ((F_{N-(n-1)} \wedge \wedge F_N) \supset G))$ (a)
gdw $F_1, ..., F_{N-(n+1)} \models ((F_{N-n} \wedge ... \wedge F_N) \supset G)$ (b)
$\Longrightarrow$ $F_1, ..., F_N \models G$ gdw $((F_1 \wedge .... \wedge F_N) \supset G)$

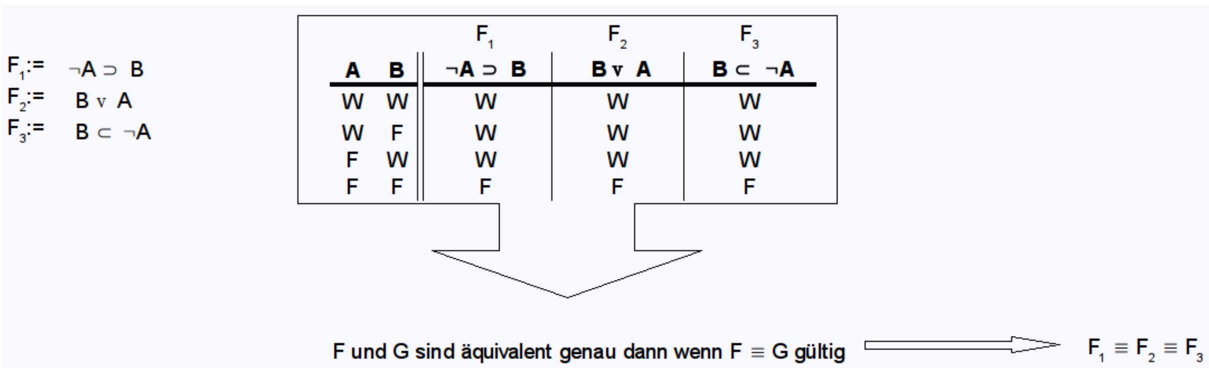
Aufgabe 7.3 Zeigen Sie, dass folgende Formeln H_1, H_2, H_3 paarweise quivalent sind. Verwenden Sie dazu Satz 3.28 aus dem Vorlesungsskriptum.

$$
\begin{aligned}
H_1 &= \neg\ \underbrace{(\,(\,G \equiv D\,)\uparrow K\,)}_{A} \supset \underbrace{(\,C \downarrow (\,E \uparrow D\,)\,)}_{B} \\
H_2 &= \underbrace{(\,C \downarrow (\,E \uparrow D\,)\,)}_{B} \vee \underbrace{(\,(\,G \equiv D\,)\uparrow K\,)}_{A} \\
H_3 &= \underbrace{(\,C \downarrow (\,E \uparrow D\,)\,)}_{B} \subset \neg\ \underbrace{(\,(\,G \equiv D\,)\uparrow K\,)}_{A}
\end{aligned}
$$

$\underbrace{aa}_{A}$

Satz 3.28
Seien α_1, α_2 Substitutionen, sodass $A\alpha_1\tilde{\ }A\alpha_2$ für alle Variablen A gilt. Dann gilt $F\alpha_1\tilde{\ }F\alpha_2$ für alle Formeln F.
.
Folgerung 3.25 (skript Seite 92)
Gilt $F \sim G$, dann auch $F\alpha \sim G\alpha$

$\neg B \supset A$ wird zu $\neg\neg B \vee A$ und das zu $A \vee B$, was in NF ist
$A \vee B$ is schon in NF
$A \subset \neg B$ ist dasselbe wie $\neg B \supset A$ −¿ wie 1. −¿ $A \vee B$
.
...also ist $(\neg B \supset A) \sim (A \vee B) \sim (A \subset \neg B)$



		F_1	F_2	F_3
A	**B**	**¬A ⊃ B**	**B ∨ A**	**B ⊂ ¬A**
W	W	W	W	W
W	F	W	W	W
F	W	W	W	W
F	F	F	F	F

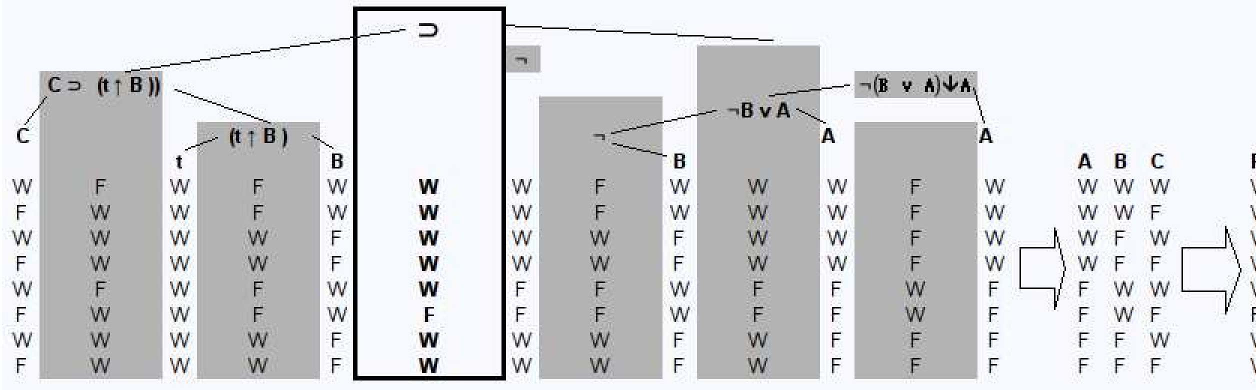
$$\delta = \begin{array}{ll} ((G \neq D) \uparrow K) & (C \downarrow (E \uparrow D)) \\ \text{A} & \text{B} \end{array} \implies \begin{array}{ll} F_1\delta = & H_1 \\ F_2\delta = & H_2 \\ F_3\delta = & H_3 \end{array}$$

$$\implies F_1\delta \equiv F_2\delta \equiv F_3\delta \implies H_1 \equiv H_2 \equiv H_3$$

Aufgabe 7.4 Finden Sie konjunktive und disjunktive Normalformen zur Formel $F = ((C \supset (t \uparrow B)) \supset \neg((\neg B \vee A) \downarrow A))$ indem Sie sowohl die syntaktische als auch die semantische Methode zur Normalformenbildung anwenden. Geben Sie die KNF von F auch in Mengennotation an.

Semantische Methode zur Normalformenbildung

$F = ((C \supset (t \uparrow B)) \supset \neg((\neg B \vee A) \downarrow A))$



.
.
.

Syntaktische Methode zur Normalformenbildung

$F = ((C \supset (t \uparrow B)) \supset \neg((\neg B \vee A) \downarrow A))$

Aufgabe 7.5 Finden Sie durch Konstruktion geeigneter Ableitungsversuche im Sequentialkalkül jeweils entweder ein Gegenmodell oder den Nachweis, dass die Formel gültig ist.

a) $((\neg A \wedge D) \supset (D \supset (\neg B \vee B))) \supset A$

b) $((A \supset D) \supset (B \wedge C)) \supset (\neg C \supset (\neg (A \supset D) \vee B))$

TIL - Übungsblatt 8 (SS 2008)

ausgearbeitet von feurio

1. August 2008

Theoretische Informatik und Logik-Übung (SS 2008)

Aufgabe 8.1 Drücken Sie folgende Prädikate bzw. Sätze als Formeln in N über der Standardsignatur aus. Lassen Sie dabei Unterstreichungen weg und verwenden Sie Infixnotation, sowie eventuell auch die auf Seite 74 des Vorlesungsskriptums vereinbarten Schreibvereinfachungen. Achten Sie allerdings auf vollständige Klammerung in den Termen.

a) $(A \wedge E) \supset (D \vee C)$ ist logische Konsequenz v. $\neg(A \supset B)$ und $\neg B \supset (C \wedge D)$.

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\text{Axinom}}{A,B,E \vdash B,C,D}}{A,E \vdash B,C,D,\neg B}\ \neg - r \qquad \cfrac{\cfrac{\text{Axinom}}{A,C,D,E \vdash B,C,D}}{A,E,(C \wedge D) \vdash B,C,D}\ \wedge - l}{\neg B \supset (C \wedge D),(A,E),A \vdash (D,C),B}\ \supset -l}{\neg B \supset (C \wedge D),(A,E) \vdash (D,C),(A \supset B)}\ \supset -r}{\neg(A \supset B),\neg B \supset (C \wedge D),(A,E) \vdash (D,C)}\ \neg - l}{\neg(A \supset B),\neg B \supset (C \wedge D),(A \wedge E) \vdash (D,C)}\ \supset -l}{\neg(A \supset B),\neg B \supset (C \wedge D),(A \wedge E) \vdash (D \vee C)}\ \vee - r}{\neg(A \supset B),\neg B \supset (C \wedge D) \vdash (A \wedge E) \supset (D \vee C)}\ \supset -r
$$

Ist ableitbar, also richtig.

b) Die Formel $(\neg A \vee B) \wedge (C \supset (D \wedge (A \supset B)))$ ist unerfüllbar.

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overbrace{A \vdash B}^{Antiaxinom}}{A \vdash B}\ {\scriptstyle \neg - r}}{\vdash (\neg A, B)}\ {\scriptstyle \neg - r}}{\vdash (\neg A \vee B)}\ {\scriptstyle \vee - r} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\overbrace{C \vdash D}^{Antiaxinom} \qquad \cfrac{\overbrace{A, C \vdash B}^{Antiaxinom}}{C \vdash A \supset B}\ {\scriptstyle \supset - r}}{C \vdash D \wedge (A \supset B)}\ {\scriptstyle \wedge - r}}{C \vdash D \wedge (A \supset B)}\ {\scriptstyle \wedge - r}}{(C \supset (D \wedge (A \supset B)))}\ {\scriptstyle \wedge - r}}{\vdash (\neg A \vee B) \wedge (C \supset (D \wedge (A \supset B)))}\ {\scriptstyle \wedge - r}
$$

Aus den Antiaxiomen

$A, C \vdash B$	$A = t,\ \ C = t,\ \ B = f$
$C \vdash D$	$C = t,\ \ D = f$
$A \vdash B$	$A = t,\ \ B = f$

sieht man dass z.B.

A = true, B = false, Rest egal
ein Gegenmodell wäre $\Longrightarrow$ b) $\neg$ gültig

$\mathcal{F}, A, C \vdash B$
$\mathcal{F}, C \vdash D \Longrightarrow$ wird aber für $\mathcal{F} = B, D$ zu einer Menge von Axiomen
$\mathcal{F}, A \vdash B \Longrightarrow B, D \vdash (\neg A \vee B) \wedge (C \supset (D \wedge (A \supset B)))$ **b) ist ableitbar.**
Für B=true, D=true wird die Formel also erfüllt. $\Longrightarrow$ **b) ist erfüllbar**

Aufgabe 8.2 Ergänzen Sie den Beweis der Korrektheit des Sequentialkalküls (Satz 3.44) um die zwei Fälle für die beiden Implikationsregeln $\supset -r$ und $\supset -l$.

Die Relationen $\vdash$ und $\models$ können als Mengen angesehen werden. Laut Induktion reicht es, wenn man folgendes nachweisen kann
* Für jedes Paar (F,G) gilt folgende Relation: $\Longrightarrow$ gilt $F \models G$ so gilt auch $F \vdash G$
* die Relation $\models$ ist gegenüber Abschlusseigenschaften von $\vdash$ abgeschlossen

$\supset -r$

1) Annahme

$\underline{F, A \ \vdash \ G, B} \quad {}_{\neg - r}$ (Gilt F und A, so gilt mindestens eine G oder B)

Man geht also den umgekehrten weg. Schaut sich also an, wo dieses Axiom als resultat vorkommt und leitet dann alles zurück.

$$\frac{F, A \ \vdash \ G, B}{F \ \vdash \ G, B, \neg A} \ {}_{\neg - r}$$

Beweis für die Annahme:

$F, A \ \models \ G, B \quad :\Longleftrightarrow$

Jede Interpretation, die F und A erfüllt, macht mindestens ein $G \in \mathcal{G}$ wahr $\Longleftrightarrow$ Jede Interpretation, die F erfüllt, macht mind. ein $G \in \mathcal{G}$ wahr oder erfüllt A nicht (Def. 3.38)

$:\Longleftrightarrow F \ \models \ G, \ \neg A$

.

2) Folgerung (siehe Definition von S-Kalkül Seite 100)

auf der rechten Seite gilt die **oder** Bedingung $\Longrightarrow$

$$\frac{F \ \vdash \ G, B, \neg A}{F \ \vdash \ G, (B \vee A)} \ {}_{\vee - r}$$

Beweis für die Folgerung:

$F \ \models \ G, A, B \quad :\Longleftrightarrow$

Jede Interpretation, die F erfüllt, erfüllt mind. ein $G \in \mathcal{G}$ oder A oder B $\Longleftrightarrow$

Jede Interpretation, die F erfüllt, erfüllt mind. ein $G \in \mathcal{G}$ oder $(A \vee B)$

$:\Longleftrightarrow F \ \models \ G, \ (A \vee B)$

.

3) Schlussfolgerung

$$\frac{F, A \ \vdash \ G, B}{F \ \vdash \ G, (B \vee \neg A)} \ {}_{\neg - r} \quad :\Longleftrightarrow$$

Jede Interpretation, die F erfüllt, erfüllt mind. ein $G \in \mathcal{G}$ oder $(B \vee \neg A)$ $\Longleftrightarrow$

Jede Interpretation, die F erfüllt, erfüllt mind. ein $G \in \mathcal{G}$ oder $(A \supset B)$

$:\Longleftrightarrow F \ \models \ G, \ (A \supset B)$ (wegen $(B \vee \neg A) \equiv (A \supset B)$ (Normalformen - synaktische Methode)

Aufgabe 8.2 Ergänzen Sie den Beweis der Korrektheit des Sequentialkalküls (Satz 3.44) um die zwei Fälle für die beiden Implikationsregeln $\supset -r$ und $\supset -l$.

Die Relationen $\vdash$ und $\models$ können als Mengen angesehen werden. Laut Induktion reicht es, wenn man folgendes nachweisen kann
* Für jedes Paar (F,G) gilt folgende Relation: $\Longrightarrow$ gilt $F \models G$ so gilt auch $F \vdash G$
* die Relation $\models$ ist gegenüber Abschlusseigenschaften von $\vdash$ abgeschlossen

$\supset -l$

1) Annahme

$\dfrac{F \ \vdash \ G, A}{} \quad {}_{\neg - l}$ (Gilt F und A, so gilt mindestens eine G oder B)

Man geht also den umgekehrten weg wie oben. Schaut sich also an, wo dieses Axiom als resultat vorkommt und leitet dann alles zurück.

$\dfrac{F, \neg A \ \vdash \ G \qquad F, B \ \vdash \ G}{F, (B \vee \neg A) \ \vdash \ G} \quad {}_{\vee - l}$

$\Longleftrightarrow$

$F, (A \supset B) \ \models \ G$

.

$F, A \models G$ und $F, B \models G \quad :\Longleftrightarrow$

Jede Interpretation, die F und A erfüllt, erfüllt mind. ein G und

Jede Interpretation, die F und B erfüllt, erfüllt mind. ein

$:\Longleftrightarrow$ Jede Interpretation, die F und A oder B erfüllt, erfüllt mind. ein G $\quad :\Longleftrightarrow$

$F, (A \vee B) \models G$

Aufgabe 8.3 Verwenden Sie den Tableau-KalkÜl um fÜr folgende Formeln entweder je ein Gegenbeispiel zu finden oder deren GÜltigkeit nachzuweisen.

a) $\neg(((D \wedge \neg E) \wedge A) \wedge \neg((C \vee E) \supset (C \wedge \neg D)))$

(1) f: a)
(2) t: a ohne $\neg$
(3) t: $((D \wedge \neg E) \wedge A)$
(4) f: $((C \vee E) \supset (C \wedge \neg D)))$
(5) t: $(D \wedge \neg E)$
(6) t: A
(7) t: D
(8) f: E
(9) t: $C \vee E$
(10) f: $C \wedge \neg D$
(11) t: C | (12) t: E (Wiederspruch zu (8))
(13) f: C (Wiederspruch zu (11)) | t: D

b) $((D \supset \neg E) \vee (\neg E \supset C)) \wedge ((A \vee C) \supset (\neg A \supset C))$

(1) f: $((D \supset \neg E) \vee (\neg E \supset C)) \wedge ((A \vee C) \supset (\neg A \supset C))$
(2) f: $(D \supset \neg E) \vee (\neg E \supset C)$
(3) f: $(A \vee C) \supset (\neg A \supset C)$ *z(1)*
(4) f: $D \supset \neg E$ *z(2)*
(5) f: $\neg E \supset C$
(6) t: D *z(4)*
(7) f: $\neg E$
(8) t: E *z(7)*
(9) t: $\neg E$ *z(5)*
(10) f: C
(11) f: E *z(9)* (Widerspruch (11) - (8))
(12) t: $A \vee C$ *z(3)*
(13) f: $\neg A \supset C$
(14) t: $\neg A$ *z(13)*
(15) f: C
(16) f: A *z(14)*
(17) t: A (Widerspruch (17) - (16))
(18) t: C (Widerspruch (18) - (15))

b) ist gültig

Aufgabe 8.4 Aufgabe 8.4 Zeigen Sie mittels Resolution, dass die atomare Formel A eine logische Konsequenz der Formeln $\neg((B \vee C) \wedge D) \supset A, \neg B \equiv D, B \supset (B \wedge C)$ und $\neg C$ ist. Gehen Sie dabei wie folgt vor: a) Verwenden Sie das Deduktionstheorem bzw. Folgerung 3.32 um das Problem auf einen Gültigkeits- bzw. Unerfüllbarkeitsnachweis für eine einzige Formel zu reduzieren. b) Verwenden Sie (eine möglichst günstige) Transformation in KNF um eine entsprechende Klauselmenge zu erzeugen. c) Finden Sie eine entsprechende Resolutionswiderlegung.

$$\neg((B \vee C) \wedge D) \supset A, \quad \neg B \equiv D, \quad B \supset (B \wedge C), \quad \neg C \quad \models A$$

gdw (Dediktionstheorem)

$\models A\ [\neg(((B \vee C) \wedge D) \supset A) \quad \wedge \quad (\neg B \equiv D) \quad \wedge \quad (B \supset (B \wedge C) \quad \wedge \quad (\neg C)] \supset A$
Annahme:$\not\models$ $\Longrightarrow$ nicht gültig $\Longrightarrow$
$\Longrightarrow \quad \neg([\underline{\neg(((B \vee C) \wedge D) \supset A}) \ \wedge \ (\underline{\neg B \equiv D}) \ \wedge \ (\underline{B \supset (B \wedge C)} \ \wedge \ (\underline{\neg C})] \supset \underline{A})$
.
Resulution ist ein Verfahren, dass ebenso wie der Tableau-Kalkül die Gültigkeit einer Fo indirekt zeigt, indem $\neg F$ wiederlegt wird.
.
1) Transformiere $\neg F$ in eine Klauselmenge, d.h. in eine konjunktive Normalform.
$\sim \{\{((B \vee C) \wedge D) \supset A\} \ , \ \{\neg B \equiv D\} \ , \ \{B \supset (B \wedge C)\} \ , \ \{\neg C\} \ , \ \{A\}\}$
.
2) Berechne aus der Klauselmenge mit Hilfe der Resolutionsregel neue Klauseln, sogenannte Resolventen. Gelingt es, die leere Klausel herzuleiten, haben wir einen widerspruch gefunden, d.h. die ursprüngliche Formel war gültig.
$\{\{((B \vee C) \wedge D) \supset A\} \quad \sim \quad ((B \vee C) \wedge D) \vee A \quad \sim \quad (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee D) \Rightarrow \{A, B, C\}, \{A, D\}$
.
$\{\neg B \equiv D\} \quad \sim \quad (B \wedge \neg D) \vee (\neg B \wedge D) \quad \sim \quad (B \vee (B \wedge \neg D)) \wedge (\neg D(\neg B \wedge D)) \quad \sim \quad (B \vee \neg B) \wedge (B \vee D) \wedge (\neg D \vee \neg B) \wedge (\neg D \vee D) \quad \sim \quad (B \vee D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow \{B, D\}, \{\neg B, \neg D\}$
.
$\{B \supset (B \wedge C)\} \quad \sim \quad \neg B \vee (B \wedge C) \quad \sim \quad (\neg B \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \quad \sim \quad (\neg B \vee C) \Rightarrow \{\neg B, C\}$
.
Alles zusammenfassen
$\{\{((B \vee C) \wedge D) \supset A\} \quad \sim \quad ((B \vee C) \wedge D) \vee A \quad \sim \quad (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee D) \Rightarrow \{B, D\}, \{\neg B, \neg D\}$
$\Longleftrightarrow$
$\{\{A, B, C\}, \{A, D\}, \{B, D\}, \{\neg B, \neg D\}, \{\neg B, C\}\}$

1) A, B, C
2) A, D
3) B, D
4) ¬B, ¬D
5) ¬B, C

6) ¬A
7) ¬C

8) *A*, *C* *1,5*
9) A, *7,8*
10) {} *6,9* ⇒ Widerspruch zu Annahme,
da Unerfüllbarket (Zeile 10) mit Resolution gezeigt wurde (Wegen Leere Menge),
die Leere Menge kann nicht erfüllbar sein.
.
$\Longrightarrow$ Formel A ist logische Konsequenz von $\neg((B \vee C) \wedge D) \supset A, \quad \neg B \equiv D, \quad B \supset (B \wedge C), \quad \neg C$

Erläuterung: Zeile 8

$$\frac{\{A, B, C\} \qquad \{A, B, C\}}{A,C}$$

Aufgabe 8.5

Verwenden Sie Resolution um für folgende Klauselmengen jeweils zu testen, ob sie unerfüllbar sind:

a) K = $A, B, C, C, D, A, \neg B, D, \neg A, B, C, \neg A, \neg B, D, A, \neg C, D, \neg B, C, \neg C$

b) K = $A, B, C, C, D, A, \neg B, D, \neg A, B, C, \neg A, \neg B, D, A, \neg C, D, A, B, \neg A$

Berücksichtigen Sie dabei, dass Tautologien und subsumierte Resolventen redundant sind.

1		A		B		C		Sub 9	
2						C	D	Sub 10	
3		A	¬	B				Sub 10	
4	¬	A		B		C		Sub11	
5	¬	A	¬	B			D	Sub 10	
6		A			¬	C	D	Sub 8	
7			¬	B		C		Sub 13	
8					¬	C			
9		A		B					1,8 Sub 12
10							D		2,8
11	¬	A		B					4,8 Sub 12
12				B					9,11
13			¬	B					7,8
14			{}						12,13

1		A		B		C		Sub 9	
2						C	D	Sub 11	
3		A	¬	B				Sub 12	
4	¬	A		B		C		Sub10	
5	¬	A	¬	B			D	Sub 13	
6		A			¬	C	D	Sub 12	
7			¬	B		C		Sub 11	
8		A	¬	A		B		Tautologie	
9		A				C			1,7 Sub 11
10	¬	A				C			4,7 Sub 11
11						C			9,1
12		A					D		6,11
13			¬	B			D		5,13

TIL - Übungsblatt 9 (SS 2008)

ausgearbeitet von feurio

1. August 2008

Theoretische Informatik und Logik-Übung (SS 2008)

Aufgabe 9.1 Drücken Sie folgende Prädikate bzw. Sätze als Formeln in N über der Standardsignatur aus. Lassen Sie dabei Unterstreichungen weg und verwenden Sie Infixnotation, sowie eventuell auch die auf Seite 74 des Vorlesungsskriptums vereinbarten Schreibvereinfachungen. Achten Sie allerdings auf vollständige Klammerung in den Termen.

$\mathcal{N} = \langle\{0, 1, 2, 3, ...\}, \{+, -, *\}, \{<, =\}, \{0, 1\}\rangle$
$\Longrightarrow$ Signatur $\Sigma = \langle\underbrace{\{+, -, *\}}_{FS}, \underbrace{\{<, =\}}_{PS}, \underbrace{\{0, 1\}}_{KS}\rangle$

FS=Funktionssymbol PS=Prädikatensymbol KS=Konstantensymbol

a) x ist gerade, aber nicht durch 4 teilbar

$(\exists u)[(((1 + 1) * u) = x)] \wedge \neg(\exists u)[(((1 + 1 + 1 + 1) * u) = x =]$
oder
$(\exists u)[(((1 + 1) * u) = x)] \wedge \neg(\exists v)[(((1 + 1) * v) = u)]$

b) x und y sind in der selben Restklasse modulo 3.

(
$((y < x) \supset (\exists u)[(x - y) = (u * (1 + 1 + 1))])$
$\wedge$
$((x < y) \supset (\exists u)[(y - x) = (u * (1 + 1 + 1))])$
)

c) in jedem Intervall der Form $[n, 2n]$ $(n \geq 1)$ liegt mindestens eine Primzahl

$(\forall n)$
$[(0 < n) \supset (\exists u)[((n - 1) < u) \wedge (u < (((1 + 1) * n) + 1)) \wedge (\forall n)(\forall w)[((v * w) = u) \supset ((v = 1) \vee (w = 1))]]]$

Aufgabe 9.2 Ergänzen Sie den Beweis der Korrektheit des Sequentialkalküls (Satz 3.44) um die zwei Fälle für die beiden Implikationsregeln $\supset -r$ und $\supset -l$.

Aufgabe 9.3 Zeigen bzw. widerlegen Sie folgende Äquivalenzbehauptungen:

a) $(\forall y)P(x,y) =_{PL} (\forall z)P(x,z)$

b) $(\forall x)(\exists y)Q(x,y) \sim_e (\exists x)(\forall y)Q(y,x)$

c) $(\forall x)[Q(x) \wedge \neg Q(x)] \sim_e (\exists x)[Q(x) \supset \neg Q(x)]$

d) $(\exists x)(\forall y)P(x,y) =_{PL} (\forall x)(\forall y)P(x,y)$

Aufgabe 9.4 Zeigen Sie die Gültigkeit von $(\exists x)(\exists y)[Q(x,y) \supset (\forall z)Q(a,z)]$ mit dem Tableau-Kalkül oder finden Sie ein Gegenbeispiel, falls diese Formel nicht gültig ist. Markieren Sie alle auftretenden γ- und δ-Formeln als solche.

γ-Regel:	$\dfrac{\text{t: } (\forall x)\, F}{\text{t: } F(x/t)}$	$\dfrac{\text{f: } (\exists x)\, F}{\text{f: } F(x/t)}$
δ-Regel:	$\dfrac{\text{f: } (\forall x)\, F}{\text{f: } F(x/c)}$	$\dfrac{\text{t: } (\exists x)\, F}{\text{t: } F(x/c)}$

a) $\neg(((D \wedge \neg E) \wedge A) \wedge \neg((C \vee E) \supset (C \wedge \neg D)))$

(1) f: $(\exists x)(\exists y)[Q(x,y) \supset (\forall z)Q(a,z)]$ γ

(2) f: $(\exists y)[Q(a,y) \supset (\forall z)Q(a,z)]$ (1) γ

(3) f: $Q(a,t) \supset (\forall z)Q(a,z)$ (2)

(4) t: $Q(a,t)$ (3)

(5) f: $(\forall z)Q(a,z)$ δ

(6) f: $Q(a,b)$ 5)

(7) f: $Q(a,b) \supset (\forall z)Q(a,z)$ (2)

(8) t: $Q(a,b)$ (7)

Wiederspruch 6/8 $\otimes \Longrightarrow$ gültig

Aufgabe 9.5

Theoretische Informatik und Logik – Übungsblatt 10 (SS2008)

Aufgabe 10.1 Bringen Sie folgende Formel F schrittweise in Klauselform:

$$F = \neg[(\forall x)P(x,x) \vee (\exists x)P(a,x)] \wedge (\forall x)[(\exists y)P(f(x),f(y)) \wedge (\exists z)(P(z,f(z)) \supset P(a,z))]$$

Aufgabe 10.2 Wenden Sie das Regelsystem $\mathcal{UR}$ an um für folgende Atommengen einen allgemeinsten Unifikator zu berechnen, bzw. um festzustellen, dass die Menge nicht unifizierbar ist.

a) $\{P(x,g(x,z)), P(f(y),g(u,u))\}$

b) $\{R(g(x),y,f(y,x)),\ R(v,f(v,v),u)\}$

c) $\{Q(x,f(c)),\ Q(y,y),\ Q(a,z)\}$

Aufgabe 10.3 Finden Sie zur Klauselmenge $\Pi = \{C_1, C_2, C_3\}$ mit $C_1 = \{P(x,x), \neg P(x,a)\}$, $C_2 = \{P(x,y), P(z,f(z))\}$, $C_3 = \{P(x,x), P(x,y), P(z,f(z))\}$

a) alle Faktoren von Klauseln in Π,

b) alle binären Resolventen von (geeigneten Varianten) von Klauseln in Π,

c) alle Robinson-Resolventen von (geeigneten Varianten) von Klauseln in Π.

Beachten Sie, dass die Varianten variablenfremd sein müssen. Es genügt jeweils eine Variante einer Klausel anzugeben. Geben Sie auch jeweils die verwendenten MGUs und das resolvierte Atom an.

Aufgabe 10.4 Finden Sie eine Resolutionswiderlegung von

$$\Pi = \big\{\{\neg R(x,c,c)\},\ \{R(g(c),g(c),g(x))\},\ \{R(x,y,z), \neg R(g(z),x,y)\}\big\}.$$

Geben Sie dabei die verwendeten MGUs, die resolvierten Atome und die Elternklauseln der Resolventen an.

Aufgabe 10.5 Verwenden Sie die Resolutionsmethode um folgenden Satz zu beweisen: Jede reflexive, euklidische Relation ist symmetrisch. Genauer: Zeigen Sie durch Transformation in Klauselnormalform und anschließende Anwendungen der Resolutionsregel, dass *refl*, *eukl* $\models$ *sym* gilt, wobei:

refl $= (\forall x)R(x,x)$,
eukl $= (\forall x)(\forall y)(\forall z)[(R(x,y) \wedge R(x,z)) \supset R(y,z)]$,
sym $= (\forall x)(\forall y)[R(x,y) \supset R(y,x)]$.