

## Was ist der Gradient einer Funktion $f$ mit $f(x)$ ( $x_1, \dots, x_n$ )

Gegeben ist ein Skalarfeld  $f(x_1, x_2, x_3): \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}$ . Aus derartigen Skalarfeldern kann ein Vektorfeld generiert werden:

$$\vec{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$$

Die Ableitung ist nun:

$$\vec{f} \mapsto \text{grad } f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$$

Unter welcher Voraussetzung ist das Vektorfeld  $u(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ \vdots \\ u_n(x) \end{pmatrix} = \text{grad } (f(x))$

### Definition:

Gilt  $\text{grad } F = f$  (für ein Skalarfeld  $F$  und ein Vektorfeld  $f$ ), dann heißt  $f$  Gradientenfeld und  $F$  Stammfunktion (oder unbestimmtes Integral) von  $f$ .

### Satz (Integrabilitätsbedingung):

Ein Vektorfeld  $f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$  besitzt (unter gewissen

Voraussetzungen) genau dann eine Stammfunktion  $F$  mit  $\text{grad } F = f$ , wenn die Bedingungen  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$

$\forall i, j = 1, \dots, n$  mit  $i \neq j$  erfüllt sind

### (Integrabilitätsbedingung)?

Was kann dann über das Kurvenintegral  $\int u(x) dx$  ausgesagt werden?

Ein Kurvenintegral ist genau dann wegunabhängig wenn die Funktion ein Gradientenfeld ist.

Wenn wir also eine Stammfunktion  $F$  finden, so dass der Gradient dieser Stammfunktion gleich unserer Funktion ist, dann ist das Kurvenintegral wegunabhängig.

Bei diesem Bsp.:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} e^{-x} \\ \cos(y) \\ z^5 \end{pmatrix}}_f = \text{grad} \left( \underbrace{-e^{-x} + \sin(y) + \frac{z^6}{6}}_F \right)$$

Damit ist gezeigt, dass  $f$  ein Gradientenfeld ist und das heißt wiederum, dass das Kurvenintegral wegunabhängig ist.

Dann gilt  $\int f(x) dx = F(c(b)) - F(c(a))$

Wie lautet die unendliche Taylorreihenentwicklung für eine Funktion  $f(x)$  an einer Anschlussstelle  $x_0$ ?

Wie im Formelheft nur statt p x0 verwenden!

**Entwickeln sie das Taylorpolynom 2. Grades für eine Funktion  $f(x,y)$ .**

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = \underbrace{f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k}_{\text{lineare Approximation (Ebene)}} + \underbrace{\frac{1}{2!} (f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2)}_{\text{quadratische Approximation (Ellipsoid, Paraboloid,...)}} + \dots + \text{Restglied}$$

Beispiel:

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Gesucht ist die quadratische Approximation im Entwicklungspunkt (0,1)

$f = x^2 + y^2$	$f(0,1) = 1$
$f_x = 2x$	$f_x(0,1) = 0$
$f_y = 2y$	$f_y(0,1) = 2$
$f_{xx} = 2$	$f_{xx}(0,1) = 2$
$f_{xy} = 0$	$f_{xy}(0,1) = 0$
$f_{yy} = 2$	$f_{yy}(0,1) = 2$

$$f(x, y) = 1 + 0 \cdot (x - x_0) + 2(y - y_0) + \frac{1}{2!} (2(x - x_0)^2 + 2 \cdot 0 \cdot (x - x_0)(y - y_0) + 2(y - y_0)^2) = 1 + 2(y - 1) + x^2 + (y - 1)^2 + \dots$$

**Welche Verfahren zur Nullstellenbestimmung kennen Sie. Erklären sie diese und erläutern sie, welche Bedingungen jeweils für  $f(x)$  gelten müssen.**

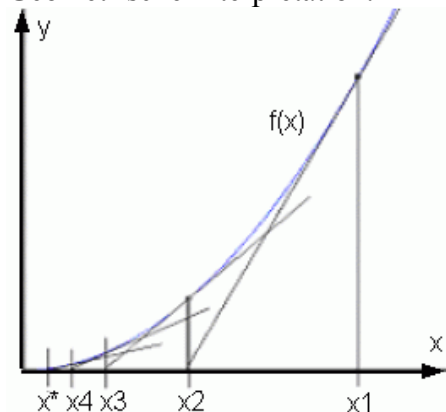
**Newtonsches Näherungsverfahren, Konvergenzordnung, Regula falsi, Beispiel, geometrische Interpretation.**

Newtonsches Näherungsverfahren

Iterationsverfahren zur Lösung von  $f(x)=0$ ,  $f(x)$  zweimal stetig differenzierbar,  $f'(x) \neq 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Geometrische Interpretation:



Konvergenzordnung:  $p = 2$

Regula falsi

Iterationsverfahren zur Lösung von  $f(x) = 0$ ,  $f$  ist stetig, aber nicht notwendigerweise differenzierbar.

$df/dx$  wird durch den Differenzenquotienten ersetzt:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n) \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots$$

## Was ist die erzeugende Funktion einer Folge $\langle a_n \rangle_{n \geq 0}$ ?

Wir betrachten die Folge  $\langle a_n \rangle = a_0, a_1, a_2, \dots$  und ordnen ihr die Reihe  $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  zu. Die

Potenzreihe  $A(z)$  wird erzeugende Funktion der Folge  $\langle a_n \rangle$  genannt.

Potenzreihe in  $z$ , ist eine „erzeugende Funktion“.

## Kurvenintegral (Kurve $c:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ )

Kurvenintegral für skalare Funktionen ( $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  skalare Funktion):

$$\int_a^b f(c(t)) \|c'(t)\| dt$$

Kurvenintegral für vektorwertige Funktionen ( $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  vektorwertige Funktion):

$$\int_a^b f(c(t)) \cdot c'(t) dt$$

## Bogenlänge:

Eine Kurve  $c:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist von endlicher Länge, wenn die Längen gegen einen Grenzwert konvergieren und falls die Feinheit  $f(z)$  gegen 0 konvergiert.

Die Länge der Kurve ist dann durch

$$L = \lim_{F(Z) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \|c(t_i) - c(t_{i-1})\| \quad \text{gegeben und wird Bogenlänge genannt.}$$

## Wie lautet der Hauptsatz über implizite Funktionen (für Funktionen $F(x,y)$ ) ?

Hauptsatz über implizite Funktionen:

Sei  $F: D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar,  $F(x_0, y_0) = 0$  und  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$  für ein  $(x_0, y_0) \in D$ . Dann ist (in einer Umgebung von  $(x_0, y_0)$ ) durch die Gleichung  $F(x, y) = 0$  implizit eine Funktion  $y(x)$  gegeben,

$$\text{für die gilt: } \frac{dy}{dx} = - \frac{F_x}{F_y}$$

Beispiel:

$$F(x, y) = x^2 + y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow y' = - \frac{F_x}{F_y} = - \frac{2x}{1} = -2x$$

## Man beschreibe die Ansatzmethode zur Lösung von homogenen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

$$y^{(k)} + c_1 y^{(k-1)} + \dots + c_{k-1} y' + c_k y = 0$$

$y^{(k)}$  soll die k-te Ableitung sein,  $c_1$  heißt, dass 1 der Index ist...

lineare homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

Lösung mittels Ansatz  $y = e^{\lambda x}$  somit ergibt sich das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{(n-1)} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

Aus den Nullstellen des Polynoms lassen sich Teillösungen bilden, aus deren Linearkombination sich die Lösung der Dgl. ergibt.

- reelle Nullstelle  $\lambda_k$  der Vielfachheit  $r_k$   
 $e^{\lambda_k x}, x e^{\lambda_k x}, \dots, x^{r_k-1} e^{\lambda_k x}$
- komplexes Nullstellenpaar  $\lambda_k = a + bi, \lambda_{k+1} = a - bi$  der Vielfachheit  $r_k$   
 $e^{ax} \cos bx, x e^{ax} \cos bx, \dots, x^{r_k-1} e^{ax} \cos bx$   
 $e^{ax} \sin bx, x e^{ax} \sin bx, \dots, x^{r_k-1} e^{ax} \sin bx$

## Wie berechnet man die Elemente der Funktionalmatrix?

Die Jacobi-Matrix (benannt nach [Carl Gustav Jacob Jacobi](#); auch Funktionalmatrix oder Ableitungsmatrix genannt) einer [differenzierbaren Funktion](#) ist die -Matrix sämtlicher erster [partieller Ableitungen](#). Genutzt wird sie z. B. in der näherungsweisen Berechnung/Approximation oder Minimierung mehrdimensionaler [Funktionen](#) in der [Mathematik](#).

Die Jacobi-Matrix bildet die Matrix-Darstellung der ersten [Ableitung](#) der Funktion  $f$ .

Definition der [Funktionalmatrix](#) einer mehrdimensionalen Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , d.h.

$$f(x_1, \dots, x_n) \doteq \begin{pmatrix} f_1(x_i) \\ \vdots \\ f_m(x_i) \end{pmatrix}$$

$$J_f = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

## Wann heißt eine Ableitung f (von Rn nach Rm) an x0 differenzierbar?

Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt differenzierbar im Punkt  $x_0$ , falls der Grenzwert existiert, dieser wird dann die Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x_0$  genannt  $f'(x_0)$ . Falls  $f$  für alle  $x \in D$  differenzierbar ist, so heißt die Funktion  $f'(x)$  die Ableitung von  $f$ .

## Wann heißt f stetig differenzierbar an x0?

Ist auch die Ableitung von  $f$  eine stetige Funktion, dann nennt man sie "**stetig differenzierbar**".