

Beispiel 1

1a

Man berechne die Determinanten der folgenden Matrizen, erläutere den Berechnungshergang und charakterisiere die Matrizen so weit als möglich (spezielle Eigenschaften etc.). Sind die Matrizen invertierbar?

$$\begin{aligned} M_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -3 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} & M_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & M_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ M_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & M_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & M_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1b

Man berechne $A \cdot B$ und $B \cdot A$ und interpretiere das Ergebnis!

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1c

Man berechne die inverse Matrix zu A :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2

Man untersuche, ob die Menge M mit der Operation \circ ein Gruppoid, eine Halbgruppe, ein Monoid bzw. eine Gruppe ist:

$$\begin{aligned} M &= \{0, 1, 2, 3\} \\ m \circ n &= \min(m, n, 3) \end{aligned}$$

Beispiel 3

Man beweise mittels vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$\sum_{k=1}^n k \cdot (3k - 1) = n^2 \cdot (n + 1)$$

Beispiel 4

4a

Ein Baum T besitzt drei Knoten vom Grad 3 und vier Knoten vom Grad 2. Die übrigen Knoten sind alle vom Grad 1. Wie viele Knoten vom Grad 1 gibt es? Hinweis: Annahme, T besitzt n Knoten und Anwendung des Handschlaglemmas.

4b

Man finde Beispiele für Graphen, die a.) Euler'sch und Hamilton'sch sind; b.) und keines von beiden sind.

Beispiel 5

Gesucht sei die Anzahl aller Möglichkeiten der zweifachen Anordnung aller $\{x | x \in \mathbf{N}, 0 \leq x \leq 20\}$, d.h. $(1, 1, 1), (1, 1, 2), \dots$, sowohl mit als auch ohne Berücksichtigung der Reihenfolge.

Desgleichen berechne man die Anzahl aller möglichen dreifachen Anordnungen von $\{x | x \in \mathbf{N}, 0 \leq x \leq 20\}$, jedoch ohne jene Anordnungen, in denen das soeben ausgewählte Element noch einmal enthalten ist, d.h. ohne die Anordnungen $(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), \dots$. Dabei berücksichtige man einmal die Wiederholung und einmal nicht. Schließlich überlege man sich, was hier mit dem Begriff der 'fixpunktfreien Permutation' gemeint sein könnte. (Hinweis: Man skizziere einen Teil des Ergebnisses im kartesischen Koordinatensystem!)