

Operationen auf formalen Sprachen

Aufgabe 1 Sind folgende Gleichungen für alle Sprachen L_1, L_2, L_3 gültig? Begründen Sie Ihre Antwort!

a) $L_1(L_2 \cup L_3) = L_1L_2 \cup L_1L_3$

b) $L_1(L_2 \cap L_1) = L_1^2$

Lösung 1 :

a) $L_1(L_2 \cup L_3) = L_1L_2 \cup L_1L_3$ ist natürlich gültig aufgrund der Distributivität von \cdot .

b) $L_1(L_2 \cap L_1) = L_1^2$ ist nicht für alle Sprachen L_1, L_2 gültig. Gegenbeispiel: $L_1 \neq \emptyset, L_2 = \emptyset$.

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass die Menge der regulären Mengen \mathcal{L}_{REG} , die gegenüber Vereinigung abgeschlossen ist, auch gegenüber der Vereinigung endlich vieler Mengen abgeschlossen ist.

Lösung 2 Wir zeigen mittels Induktion nach der Anzahl der Mengen n , dass mit $L_1, \dots, L_n \in \mathcal{L}_{REG}$ auch $L_1 \cup \dots \cup L_n \in \mathcal{L}_{REG}$:

Induktionsbasis: Nach Voraussetzung gilt $L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}_{REG}$ für beliebige $L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}_{REG}$.

Induktionshypothese: Mit $L_1, \dots, L_m \in \mathcal{L}_{REG}$ gilt auch $L_1 \cup \dots \cup L_m \in \mathcal{L}_{REG}$ für $2 \leq m \leq n$.

Induktionsbehauptung: Mit $L_1, \dots, L_n, L_{n+1} \in \mathcal{L}_{REG}$ gilt auch $L_1 \cup \dots \cup L_n \cup L_{n+1} \in \mathcal{L}_{REG}$:
 $L_1 \cup \dots \cup L_n \cup L_{n+1} = (L_1 \cup \dots \cup L_n) \cup L_{n+1} = L \cup L_{n+1}$ für eine Sprache $L \in \mathcal{L}_{REG}$ auf Grund der Induktionshypothese. Laut Voraussetzung ist damit aber auch $L \cup L_{n+1}$ wieder aus \mathcal{L}_{REG} , was zu beweisen war.

Aufgabe 3 Sei $L_1 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_0 = |w|_1\}$ und $L_2 = \{0\}^*\{1\}^* = \{0^i1^j \mid i, j \geq 0\}$. Geben Sie den Durchschnitt der beiden Sprachen sowie das Komplement von L_1 an.

Lösung 3 :

$$L_1 \cap L_2 = \{0^i1^j \mid i = j\} = \{\varepsilon, 01, 0011, 000111, \dots\}$$

$$\overline{L_1} = \{0, 1\}^* - L_1 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_0 \neq |w|_1\}$$