

Aussagenlogik

Aufgabe 1 Transformieren Sie folgende Formeln in konjunktive Normalform (KNF) und geben Sie diese auch in Mengennotation an.

a) $(Q \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow P \wedge Q) \wedge (P \rightarrow Q \vee R) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)$ (4 Punkte)

b) $(P \wedge (Q \rightarrow R)) \wedge (P \vee Q \vee R) \wedge \neg((P \leftrightarrow Q) \rightarrow R)$ (4 Punkte)

Lösung 1 Nachdem die Grobstruktur der beiden Formeln bereits in KNF ist, können wir die Teilformeln separat in KNF umformen, und die resultierenden Klauselmengen vereinigen:

a) $(Q \rightarrow R) = \neg Q \vee R$
 $(R \rightarrow P \wedge Q) = \neg R \vee (P \wedge Q) = (\neg R \vee P) \wedge (\neg R \vee Q)$
 $(P \rightarrow Q \vee R) = \neg P \vee (Q \vee R) = \neg P \vee Q \vee R$
 $\neg(P \leftrightarrow Q) = (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) = (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$
 Die ursprüngliche Formel in KNF lautet somit:
 $(\neg Q \vee R) \wedge (\neg R \vee P) \wedge (\neg R \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$
 Die resultierende Klauselmenge ist also:
 $\{\{\neg Q, R\}, \{\neg R, P\}, \{\neg R, Q\}, \{\neg P, Q, R\}, \{P, Q\}, \{\neg P, \neg Q\}\}$

b) $(P \wedge (Q \rightarrow R)) = P \wedge (\neg Q \vee R)$
 $(P \vee Q \vee R)$ ist bereits in KNF
 $\neg((P \leftrightarrow Q) \rightarrow R) = \neg(\neg(P \leftrightarrow Q) \vee R)$
 $= \neg((P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee R)$
 $= \neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg(\neg P \wedge Q) \wedge \neg R$
 $= (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge \neg R$
 Die ursprüngliche Formel in KNF lautet somit:
 $P \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge \neg R$
 Die resultierende Klauselmenge ist also:
 $\{\{P\}, \{\neg Q, R\}, \{P, Q, R\}, \{\neg P, Q\}, \{P, \neg Q\}, \{\neg R\}\}$

Aufgabe 2 Geben Sie eine geeignete Substitution σ für die Formelpaare (F, G) so an, dass $F\sigma = G$ gilt:

a) $F = A \rightarrow (B \vee A)$ und $G = ((B \rightarrow \neg A) \rightarrow C) \rightarrow (((B \rightarrow \neg A) \rightarrow C) \vee ((B \rightarrow \neg A) \rightarrow C))$
 bzw. (2 Punkte)

b) $F = ((A \wedge B) \rightarrow (C \vee A)) \rightarrow B$ und (2 Punkte)
 $G = (((\neg A \wedge \neg B) \wedge (B \vee A)) \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \vee (\neg A \wedge \neg B))) \rightarrow (B \vee A).$

Lösung 2 Beweis durch Angabe einer geeigneten Substitution σ mit $F\sigma = G$:

a) $\sigma = \left[\begin{array}{cc} ((B \rightarrow \neg A) \rightarrow C) & ((B \rightarrow \neg A) \rightarrow C) \\ A & B \end{array} \right]$

b) $\sigma = \left[\begin{array}{ccc} (\neg A \wedge \neg B) & (B \vee A) & \neg(A \rightarrow B) \\ A & B & C \end{array} \right]$

Aufgabe 3 Zeigen Sie die funktionale Vollständigkeit der Operatoren p bzw. s :

a)

A	B	p
t	t	f
t	f	f
f	t	f
f	f	t

(4 Punkte)

b)

A	B	s
t	t	f
t	f	t
f	t	t
f	f	t

(4 Punkte)

Lösung 3 Wir zeigen, dass sowohl die Negation als auch \vee bzw. \wedge durch p (Pierce-Array) bzw. s (Sheffer-Stroke) darstellbar sind:

1. $\neg A = (ApA)$ und $A \vee B = (ApB)p(ApB)$:

A	B	p	$(ApB)p(ApB)$
t	t	f	t
t	f	f	t
f	t	f	t
f	f	t	f

2. $\neg A = (AsA)$ und $A \wedge B = (AsB)s(AsB)$ (s. Skriptum: $s = \uparrow$)!

Aufgabe 4 Verwenden Sie den Sequentialkalkül, um die Unerfüllbarkeit der Formel a) bzw. die Gültigkeit der Formel b) nachzuweisen. Finden Sie durch Konstruktion eines geeigneten Ableitungsversuchs im Sequentialkalkül für die unter c) und d) gegebenen Formeln entweder ein Gegenmodell oder den Nachweis, dass die entsprechende Formel gültig ist.

- a) $\neg((A \rightarrow C) \rightarrow ((\neg B \vee C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)))$ (3 Punkte)

- b) $((\neg A \rightarrow B) \rightarrow (C \vee D)) \vee (\neg D \wedge (B \vee A))$ (3 Punkte)

- c) $(A \rightarrow B \vee C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C))$ (3 Punkte)

- d) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow \neg(A \vee B))$ (3 Punkte)

Lösung 4

- a) Wir müssen versuchen, $\neg((A \rightarrow C) \rightarrow ((\neg B \vee C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))) \vdash$ abzuleiten:

$\frac{\text{Axiom} \quad \frac{\text{Axiom} \quad \frac{B \vdash C, A, B}{\neg B, A \vdash C, A} \quad \neg\text{-}l}{\neg B, B \vdash C, A} \quad \neg\text{-}l}{\neg B, (A \vee B) \vdash C, A} \quad \vee\text{-}l$		$\frac{\text{Axiom} \quad C, (A \vee B) \vdash C, A}{C, (\neg B \vee C), (A \vee B) \vdash C, A} \quad \vee\text{-}l$		$\frac{\text{Axiom} \quad C, (\neg B \vee C), (A \vee B) \vdash C}{(A \rightarrow C), (\neg B \vee C), (A \vee B) \vdash C} \rightarrow\text{-}l$	
				$\frac{(A \rightarrow C), (\neg B \vee C), (A \vee B) \vdash C}{(A \rightarrow C), (\neg B \vee C) \vdash (A \vee B) \rightarrow C} \rightarrow\text{-}r$	
				$\frac{(A \rightarrow C) \vdash (\neg B \vee C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)}{\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((\neg B \vee C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))} \rightarrow\text{-}r$	
				$\frac{\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((\neg B \vee C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))}{\neg((A \rightarrow C) \rightarrow ((\neg B \vee C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)))} \neg\text{-}l$	

Der Ableitungsversuch führt also in diesem Fall zu einer Ableitung. Wegen der Korrektheit des Sequentialkalküls ist damit die Unerfüllbarkeit der Ausgangsformel bewiesen.

- b) Der Sequent $\vdash ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow (C \vee D)) \vee (\neg D \wedge (B \vee A))$ ist ableitbar und daher ist die entsprechende Formel - wegen der Korrektheit des Sequentialkalküls - gültig:

$$\begin{array}{c}
 \text{Axiom} \\
 \frac{(\neg A \rightarrow B), D \vdash C, D}{(\neg A \rightarrow B) \vdash C, D, \neg D} \neg-r \\
 \frac{(\neg A \rightarrow B) \vdash C, D, \neg D}{(\neg A \rightarrow B) \vdash (C \vee D), \neg D} \vee-r \\
 \frac{(\neg A \rightarrow B) \vdash (C \vee D), \neg D}{(\neg A \rightarrow B) \vdash (C \vee D), (\neg D \wedge (B \vee A))} \wedge-r \\
 \frac{(\neg A \rightarrow B) \vdash (C \vee D), (\neg D \wedge (B \vee A))}{\vdash ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow (C \vee D)), (\neg D \wedge (B \vee A))} \rightarrow-r \\
 \frac{\vdash ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow (C \vee D)), (\neg D \wedge (B \vee A))}{\vdash ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow (C \vee D)) \vee (\neg D \wedge (B \vee A))} \vee-r
 \end{array}$$

- c) Wir bilden folgenden Ableitungsversuch:

$$\begin{array}{c}
 \text{Axiom} \quad \text{Axiom} \quad \text{Axiom} \\
 \frac{(B \vee C), A \vdash C, B, A}{(B \vee C), A \vdash C, B} \vee-l \\
 \frac{(B \vee C), A \vdash C, B}{A \rightarrow (B \vee C), A \vdash C, B} \rightarrow-l \\
 \frac{A \rightarrow (B \vee C), A \vdash C, B}{A \rightarrow (B \vee C), A \vdash (A \rightarrow C), B} \rightarrow-r \\
 \frac{A \rightarrow (B \vee C), A \vdash (A \rightarrow C), B}{A \rightarrow (B \vee C) \vdash (A \rightarrow B), (A \rightarrow C)} \rightarrow-r \\
 \frac{A \rightarrow (B \vee C) \vdash (A \rightarrow B), (A \rightarrow C)}{A \rightarrow (B \vee C) \vdash (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)} \vee-r \\
 \frac{A \rightarrow (B \vee C) \vdash (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)}{\vdash (A \rightarrow B \vee C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C))} \rightarrow-r
 \end{array}$$

Der Sequent $\vdash (A \rightarrow B \vee C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C))$ ist ableitbar und daher ist die entsprechende Formel - wegen der Korrektheit des Sequentialkalküls - gültig.

- d) Wir bilden folgenden Ableitungsversuch:

$$\begin{array}{c}
 \text{Anti-Axiom} \quad \text{Axiom} \\
 \frac{\vdash A, B}{(A \rightarrow B) \vdash A, B} \rightarrow-l \\
 \frac{(A \rightarrow B) \vdash A, B}{(A \rightarrow B) \vdash (A \vee B)} \vee-r \\
 \frac{(A \rightarrow B) \vdash (A \vee B)}{(A \rightarrow B) \vdash (A \vee B) \wedge \neg A} \wedge-r \\
 \frac{(A \rightarrow B) \vdash (A \vee B) \wedge \neg A}{\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \vee B) \wedge \neg A)} \rightarrow-r
 \end{array}$$

Das Anti-Axiom links gibt an, dass jede Interpretation I , die A und B auf t abbildet, ein Gegenmodell zu $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \vee B) \wedge \neg A)$ ist; also z.B. I mit $I(A) = t, I(B) = t$.

(Da bereits ein Zweig, der in einem Anti-Axiom endet, zum Nachweis der Widerlegbarkeit ausreicht, muss der Rest des Ableitungsversuchs nicht weiter ausgeführt werden.)

Aufgabe 5 Beweisen Sie mittels Resolution die Gültigkeit der Formel

$$(Q \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow P \wedge Q) \wedge (P \rightarrow Q \vee R) \rightarrow (P \leftrightarrow Q)$$

(5 Punkte)

Lösung 5 Da Resolution ein indirektes Verfahren ist, zeigen wir die Gültigkeit der jeweiligen Formel, indem wir ihre Negation widerlegen:

$$F = (Q \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow P \wedge Q) \wedge (P \rightarrow Q \vee R) \rightarrow (P \leftrightarrow Q)$$

Durch Umformung erhalten wir

$$\neg F = (Q \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow P \wedge Q) \wedge (P \rightarrow Q \vee R) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)$$

was zur Klauselmengende

$K = \{\{\neg Q, R\}, \{\neg R, P\}, \{\neg R, Q\}, \{\neg P, Q, R\}, \{P, Q\}, \{\neg P, \neg Q\}\}$ führt (siehe Beispiel 1 a)).

Zum Nachweis der Unerfüllbarkeit von K (und damit der Richtigkeit der ursprünglichen Formel F) dient zum Beispiel folgende Resolutionswiderlegung:

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------------------|
| 1. $\{\neg Q, R\} \in K$ | 7. $\{\neg Q, P\}$ Resolvente von 1 und 2 |
| 2. $\{\neg R, P\} \in K$ | 8. $\{P\}$ Resolvente von 5 und 7 |
| 3. $\{\neg R, Q\} \in K$ | 9. $\{Q, R\}$ Resolvente von 4 und 8 |
| 4. $\{\neg P, Q, R\} \in K$ | 10. $\{Q\}$ Resolvente von 3 und 9 |
| 5. $\{P, Q\} \in K$ | 11. $\{\neg Q\}$ Resolvente von 6 und 8 |
| 6. $\{\neg P, \neg Q\} \in K$ | 12. $\{\}$ Resolvente von 10 und 11 |

Aufgabe 6 Beweisen oder widerlegen Sie mittels Resolution die folgenden Klauselmengen.

- a) $\{\{P, Q, \neg R\}, \{P, \neg Q, R\}, \{\neg P, \neg Q, R\}, \{\neg P, Q, \neg R\}, \{\neg P, \neg Q\}\}$ (4 Punkte)
- b) $\{\{P, R, \neg S\}, \{P, \neg Q\}, \{\neg P, R\}, \{R, S\}, \{\neg R\}, \{Q\}\}$ (4 Punkte)

Lösung 6

a) Wir bilden alle möglichen Resolventen:

- | | |
|----------------------------------|------------------------------------------------|
| 1. $\{P, Q, \neg R\} \in K$ | 6. $\{Q, \neg R\}$ Resolvente von 1 und 4 |
| 2. $\{P, \neg Q, R\} \in K$ | 7. $\{\neg Q, R\}$ Resolvente von 2 und 3 |
| 3. $\{\neg P, \neg Q, R\} \in K$ | 8. $\{\neg P, \neg R\}$ Resolvente von 4 und 5 |
| 4. $\{\neg P, Q, \neg R\} \in K$ | |
| 5. $\{\neg P, \neg Q\} \in K$ | |

Da keine weiteren (nicht-redundanten) Resolventen ableitbar sind, ist die Klauselmenge damit als erfüllbar nachgewiesen.

b) Zum Nachweis der Unerfüllbarkeit der Klauselmenge dient zum Beispiel folgende Resolutionswiderlegung:

- | | |
|-----------------------------|--------------------------------------|
| 1. $\{P, R, \neg S\} \in K$ | 7. $\{S\}$ Resolvente von 4 und 5 |
| 2. $\{P, \neg Q\} \in K$ | 8. $\{P, R\}$ Resolvente von 1 und 7 |
| 3. $\{\neg P, R\} \in K$ | 9. $\{R\}$ Resolvente von 3 und 8 |
| 4. $\{R, S\} \in K$ | 10. $\{\}$ Resolvente von 9 und 5 |
| 5. $\{\neg R\} \in K$ | |
| 6. $\{Q\} \in K$ | |

Aufgabe 7 Begründen Sie, warum es keine Resolutionswiderlegung für folgende Klauselmengen geben kann:

- a) $\{\{\neg A, B, C\}, \{A, \neg B, C\}, \{A, B, \neg C\}\}$ (3 Punkte)
- b) $\{\{A, \neg A\}, \{B, \neg B\}, \{C, \neg C\}\}$ (2 Punkte)

Lösung 7

a) Der letzte Schritt in einer Resolutionswiderlegung muss von der Gestalt

$\{\}$ ist die Resolvente von $\{X\}$ und $\{\neg X\}$

für eine Variable X sein; da jede Klausel in der gegebenen Klauselmenge (mindestens) zwei positive Literale enthält, muss die Resolvente zweier Klauseln ebenfalls (mindestens) zwei positive Literale enthalten. Daher kann man durch Resolution aus der gegebenen Klauselmenge nie eine Klausel $\{X\}$ erhalten, daher auch nie $\{\}$, d.h., es kann keine Resolutionswiderlegung geben.

Alternativer Lösungsweg - Bildung aller möglicher Resolventen:

Resolventen von $\{\neg A, B, C\}$ und $\{A, \neg B, C\}$: $\{B, \neg B, C\}, \{A, \neg A, C\}$

Resolvente von $\{\neg A, B, C\}$ und $\{A, B, \neg C\}$: $\{B, C, \neg C\}, \{A, \neg A, C\}$

Resolvente von $\{A, \neg B, C\}$ und $\{A, B, \neg C\}$: $\{A, \neg A, C\}, \{A, \neg B, B\}$

Jede dieser Resolventen enthält X und $\neg X$ für ein $X \in \{A, B, C\}$, ist also immer wahr; diese Resolventen kann man daher "vergessen"!

b) Nachdem die gegebenen Klauseln keine dualen Literale enthalten, ist die Resolutionsregel nicht anwendbar. Darüberhinaus handelt es sich bei den gegebenen Klauseln durchwegs um Tautologien, d.h., die Klauselmenge kann in keinem Fall widerlegt werden.

Prädikatenlogik

Aufgabe 8 Geben Sie jeweils ein Modell für folgende Formeln an:

a) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$ (4 Punkte)

b) $(\forall x)(P(x) \rightarrow P(f(x)))$ (4 Punkte)

Lösung 8

a) Wir wählen zum Beispiel folgendes Modell: Eine natürliche Zahl ist entweder gerade oder ungerade.

Sei $M = (\mathbf{N}, \Phi, I)$ eine Interpretation mit $\Phi(P) = \text{"ist gerade"}$ und $\Phi(Q) = \text{"ist ungerade"}$. (Der Wahrheitswert ist unabhängig von der Variablenumgebung I , da alle in der Formel vorkommenden Variablen durch Quantoren gebunden sind, und muss daher hier nicht extra definiert werden.)

M ist ein Modell der gegebenen prädikatenlogischen Formel, da für alle $x \in \mathbf{N}$ gilt: x ist entweder gerade oder ungerade.

b) Wir wählen zum Beispiel folgendes Modell: Ist x eine natürliche Zahl, so ist auch der Nachfolger von x (d.h., $x + 1$) eine natürliche Zahl.

Sei $M = (\mathbf{N}, \Phi, I)$ eine Interpretation mit $\Phi(P) = \text{"} \in \mathbb{N} \text{"}$ und $\Phi(f) = s$ wobei $s(n) = n + 1$ für alle $n \in \mathbf{N}$ (s bezeichnet man als die "Nachfolgerfunktion"). (Der Wahrheitswert ist unabhängig von der Variablenumgebung I , da alle in der Formel vorkommenden Variablen durch Quantoren gebunden sind, und muss daher hier nicht extra definiert werden.)

M ist ein Modell der gegebenen prädikatenlogischen Formel, da für alle $x \in \mathbf{N}$ gilt: wenn $x \in \mathbb{N}$ dann ist auch $x + 1 \in \mathbb{N}$

Aufgabe 9 Geben Sie für die folgenden Atomformeln je einen allgemeinsten Unifikator bzw. Gründe an, warum die Atomformeln nicht unifizierbar sind.

a) $P(x, x), \quad P(f(a), f(y))$ (2 Punkte)

b) $P(g(f(x), x)), \quad P(g(y, a))$ (2 Punkte)

c) $P(x, f(y), x), \quad P(a, f(a), g(w, z))$ (2 Punkte)

d) $P(g(f(x, x), y, i(z)), a, f(x)), \quad P(g(l(w, w), c, i(v)), u, f(g(v)))$ (2 Punkte)

Lösung 9

a) $\sigma = \{x/f(a), y/a\}$

b) $\sigma = \{x/a, y/f(a)\}$

c) Die beiden Formeln sind nicht unifizierbar, da $g(w, z)$ nicht durch a ersetzt werden kann.

d) Die beiden Formeln sind nicht unifizierbar, da die Funktionsterme $f(x, x)$ und $l(w, w)$ nicht gleichgesetzt werden können.

Aufgabe 10 Geben Sie Resolutionsbeweise der folgenden Formeln an.

a) $(P(a) \wedge (\forall x)(P(x) \rightarrow P(f(x)))) \rightarrow P(f(f(a)))$ (6 Punkte)

b) $((\forall x)(\exists y)P(x, y) \wedge (\forall x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow Q(x, y))) \rightarrow (\forall x)(\exists y)Q(x, y)$ (8 Punkte)

Lösung 10

a) $\neg[(P(a) \wedge (\forall x)(P(x) \rightarrow P(f(x)))) \rightarrow P(f(f(a)))]$

Normalform1 (Elimination von \rightarrow und \neg nur vor Atomen):

$(P(a) \wedge (\forall x)(\neg P(x) \vee P(f(x)))) \wedge \neg P(f(f(a)))$

KNF:

$P(a) \wedge (\neg P(x) \vee P(f(x))) \wedge \neg P(f(f(a)))$

Klauselform:

$C = \{\{P(a)\}, \{\neg P(x), P(f(x))\}, \{\neg P(f(f(a)))\}\}$

Resolutionswiderlegung von C :

$$\frac{\frac{\frac{\{P(a)\} \quad \{\neg P(x), P(f(x))\}}{\{P(f(a))\}} \quad \sigma_1 \quad \{\neg P(y), P(f(y))\}}{\{P(f(f(a)))\}} \quad \sigma_2 \quad \{\neg P(f(f(a)))\}}{\square}$$

$\sigma_1 = \{x \leftarrow a\}$

$\sigma_2 = \{y \leftarrow f(a)\}$

b) $\neg[(\forall x)(\exists y)P(x, y) \wedge (\forall x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow Q(x, y))] \rightarrow (\forall x)(\exists y)Q(x, y)$

Normalform1 (Elimination von \rightarrow und \neg nur vor Atomen):

$((\forall x)(\exists y)P(x, y) \wedge (\forall x)(\forall y)(\neg P(x, y) \vee Q(x, y))) \wedge (\exists x)(\forall y)\neg Q(x, y)$

Variablenstandardisierung:

$((\forall x)(\exists y)P(x, y) \wedge (\forall u)(\forall v)(\neg P(u, v) \vee Q(u, v))) \wedge (\exists w)(\forall z)\neg Q(w, z)$

Normalform2 (Elimination d. \exists -Quantoren, Skolemform):

$((\forall x)P(x, f(x)) \wedge (\forall u)(\forall v)(\neg P(u, v) \vee Q(u, v))) \wedge (\forall z)\neg Q(a, z)$

Weglassen der \forall -Quantoren (Negationsnormalform) und KNF:

$P(x, f(x)) \wedge (\neg P(u, v) \vee Q(u, v)) \wedge \neg Q(a, z)$

Klauselform:

$C = \{\{P(x, f(x))\}, \{\neg P(u, v), Q(u, v)\}, \{\neg Q(a, z)\}\}$

Resolutionswiderlegung von C :

$$\frac{\frac{\frac{\{P(x, f(x))\} \quad \{\neg P(u, v), Q(u, v)\}}{\{Q(x, f(x))\}} \quad \sigma_1 \quad \{\neg Q(a, z)\}}{\square} \quad \sigma_2$$

$\sigma_1 = \{u \leftarrow x, v \leftarrow f(x)\}$

$\sigma_2 = \{x \leftarrow a, z \leftarrow f(a)\}$