

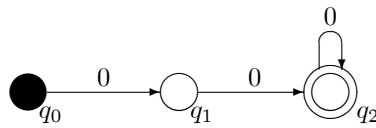
Endliche Automaten und reguläre Sprachen

Aufgabe 1 Entwerfen Sie jeweils einen NEA mit der angegebenen Anzahl von Zuständen (ohne Berücksichtigung der Falle!) für die folgenden Sprachen:

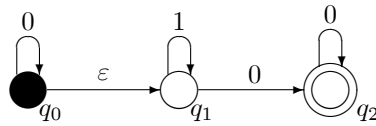
- a) $\{w \in \{0\}^* \mid w \text{ beginnt mit } 00\}$ mit drei Zuständen, (2 Punkte)
- b) $\{0\}^* \{1\}^* \{0\}^* \{0\}$ mit drei Zuständen, (2 Punkte)
- c) $\{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ enthält eine gerade Anzahl von Nullen oder genau zwei Einsen}\}$ mit sechs Zuständen, (4 Punkte)
- d) $\{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ beginnt mit } 0 \text{ und endet mit } 1\} \cap \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ enthält mindestens drei Symbole } 1\}$ mit fünf Zuständen. (4 Punkte)

Lösung 1

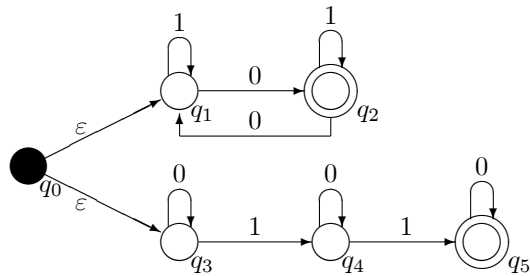
a)



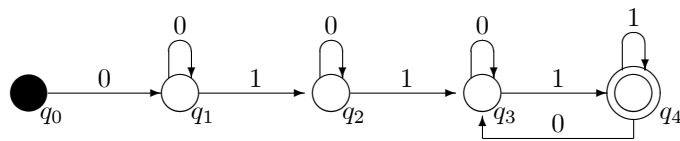
b)



c)



d)



Aufgabe 2 Konvertieren Sie folgenden NEA M in einen äquivalenten DEA und geben Sie eine reguläre Menge für die vom jeweiligen DEA akzeptierte Sprache an.

a) $M = (\{q_i \mid 0 \leq i \leq 5\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_0, q_1, q_4\})$ mit

δ	a	b
q_0	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_3\}$
q_1	$\{\}$	$\{\}$
q_2	$\{\}$	$\{q_1, q_3, q_4\}$
q_3	$\{q_5\}$	$\{\}$
q_4	$\{q_1, q_2\}$	$\{\}$
q_5	$\{\}$	$\{\}$

(4 Punkte)

b) $M = (\{q_i \mid 0 \leq i \leq 2\}, \{0, 1, 2\}, \delta, q_0, \{q_2\})$ mit

δ	0	1	2
q_0	$\{q_1\}$	$\{\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{\}$	$\{q_2\}$	$\{\}$
q_2	$\{q_0\}$	$\{\}$	$\{q_0, q_2\}$

(4 Punkte)

Lösung 2

a)

$\hat{\delta}$	a	b
$\{q_0\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_3\}$
$\{q_1, q_2\}$	$\{\}$	$\{q_1, q_3, q_4\}$
$\{q_3\}$	$\{q_5\}$	$\{\}$
$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$
$\{q_1, q_3, q_4\}$	$\{q_1, q_2, q_5\}$	$\{\}$
$\{q_5\}$	$\{\}$	$\{\}$
$\{q_1, q_2, q_5\}$	$\{\}$	$\{q_1, q_3, q_4\}$

Startzustand des DEA: $\{q_0\}$

Endzustände des DEA: $\{\{q_0\}, \{q_1, q_2\}, \{q_1, q_3, q_4\}, \{q_1, q_2, q_5\}\}$

Akzeptierte Sprache: $L(M) = \{ab\}^* \cup \{ab\}^*\{a\}$

b)

$\hat{\delta}$	0	1	2
$\{q_0\}$	$\{q_1\}$	$\{\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1\}$	$\{\}$	$\{q_2\}$	$\{\}$
$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$
$\{q_2\}$	$\{q_0\}$	$\{\}$	$\{q_0, q_2\}$
$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{\}$	$\{q_0, q_2\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_0\}$

Startzustand des DEA: $\{q_0\}$

Endzustände des DEA: $\{\{q_2\}, \{q_0, q_2\}\}$

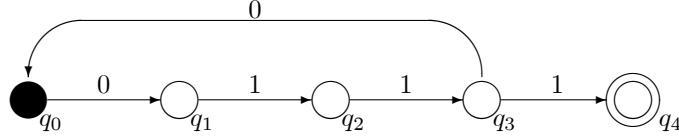
Akzeptierte Sprache: $L(M) = (\{2\}^*\{01\}\{2\}^*\{0, 2\})^* \{2\}^*\{01\}\{2\}^*$

Aufgabe 3 Geben Sie für folgende Sprachen die formale Definition des entsprechenden Minimalautomaten sowie eine minimale eindeutige reguläre Grammatik an:

- a) $\{0110\}^*\{0111\}$ (4 Punkte)
b) $\{0^6\}\{0^{2006}\}^*$ (4 Punkte)
c) $\{0^6\}^*\{0^{2006}\}$ (4 Punkte)

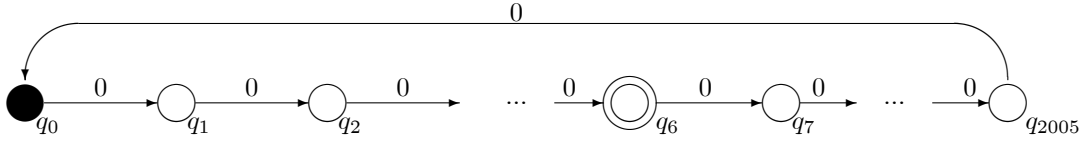
Lösung 3

a)



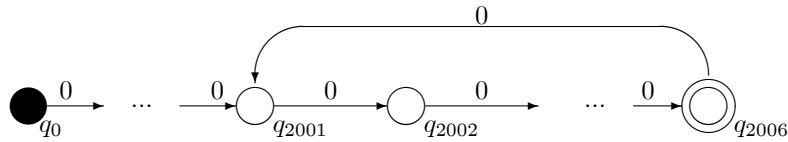
$M = (\{q_i \mid 0 \leq i \leq 4\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_4\})$ mit
 $\delta = \{(q_0, 0, q_1), (q_1, 1, q_2), (q_2, 1, q_3), (q_3, 0, q_0), (q_3, 1, q_4)\}$
 $G = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0, 1\}, P, q_0)$ mit
 $P = \{q_0 \rightarrow 0q_1, q_1 \rightarrow 1q_2, q_2 \rightarrow 1q_3, q_3 \rightarrow 0q_0, q_3 \rightarrow 1q_4, q_4 \rightarrow \varepsilon\}$

b)



$M = (\{q_i \mid 0 \leq i \leq 2005\}, \{0\}, \delta, q_0, \{q_6\})$ mit
 $\delta = \{(q_i, 0, q_{i+1}) \mid 0 \leq i \leq 2004\} \cup \{(q_{2005}, 0, q_0)\}$
 $G = (\{q_i \mid 0 \leq i \leq 2005\}, \{0\}, P, q_0)$ mit
 $P = \{q_i \rightarrow 0q_{i+1} \mid 0 \leq i \leq 2004\} \cup \{q_{2005} \rightarrow 0q_0, q_6 \rightarrow \varepsilon\}$

c)



$M = (\{q_i \mid 0 \leq i \leq 2006\}, \{0\}, \delta, q_0, \{q_{2006}\})$
 $\delta = \{(q_i, 0, q_{i+1}) \mid 0 \leq i \leq 2005\} \cup \{(q_{2006}, 0, q_{2001})\}$
 $G = (\{q_i \mid 0 \leq i \leq 2006\}, \{0\}, P, q_0)$
 $P = \{q_i \rightarrow 0q_{i+1} \mid 0 \leq i \leq 2005\} \cup \{q_{2006} \rightarrow 0q_{2001}, q_{2006} \rightarrow \varepsilon\}$

(Nicht) Kontextfreie Sprachen

Aufgabe 4 Beweisen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas für reguläre Sprachen, dass folgende Sprachen nicht regulär sind:

a) $L = \{a^{5n}b^{7n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ (4 Punkte)

b) $L = \{a^{n^3} \mid n \in \mathbb{N}\}$ (4 Punkte)

Lösung 4

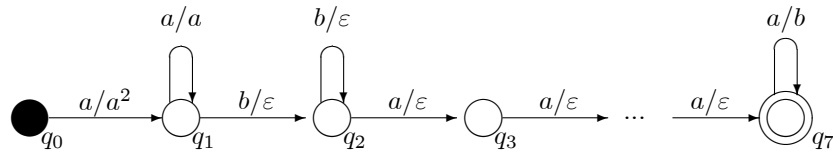
a) Beweis indirekt. Angenommen, $L = \{a^{5n}b^{7n} \mid n \in \mathbb{N}_1\}$ ist regulär. Sei dann n die Konstante aus dem Pumping Lemma und $z = a^{5n}b^{7n}$. Dann gilt $z \in L$ und $|z| = 12n > n$. Nach dem Pumping Lemma müssen $u, v, w \in \{a, b\}^*$ so existieren, dass $z = uvw$, $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$ sowie $uv^i w \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Dann muss aber $uv \in \{a\}^+$ und $uv^2w = a^{5n+|v|}b^{7n}$ aus L sein. Wegen $1 \leq |v| \leq n$ gilt nun jedoch $5n + 1 \leq 5n + |v| \leq 6n$ und daher $5n + |v| \neq 5n$, d.h., uv^2w kann nicht aus L sein. Aufgrund dieses Widerspruchs kann L keine reguläre Sprache sein!

b) Beweis indirekt. Angenommen, $L = \{a^{n^3} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist regulär. Sei dann n die Konstante aus dem Pumping Lemma und $w = a^{n^3}$. Dann gilt $w \in L$ und $|w| = n^3 \geq n$. Nach dem Pumping Lemma müssen $x, y, z \in \{a\}^*$ so existieren, dass $w = xyz$, $|xy| \leq n$ und $|y| > 0$ sowie $xy^i z \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann muss aber $xy^2z = a^{n^3+|y|}$ aus L sein. Wegen $1 \leq |y| \leq n$ gilt nun jedoch $n^3 + 1 \leq n^3 + |y| \leq n^3 + n$ und $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$ d.h., $n^3 < n^3 + |y| < (n+1)^3$, und daher kann $a^{n^3+|y|}$ nicht aus L sein. Aufgrund dieses Widerspruchs kann L keine reguläre Sprache sein.

Aufgabe 5 Zeigen Sie ohne direkte Anwendung des Pumping Lemmas, dass die Sprache $\{a^{3n-4}b^{5k}a^{4n+1} \mid n > 1, k \geq 2\}$ nicht regulär ist, indem Sie sie mittels einer gsm auf $\{a^{kn}b^{mn} \mid n \geq 1\}$ reduzieren. (Sie können dabei davon ausgehen, dass $\{a^{kn}b^{mn} \mid n \geq 1\}$ nicht regulär ist.) (6 Punkte)

Lösung 5 Beweis indirekt. Angenommen, die Sprache $L = \{a^{3n-4}b^{5k}a^{4n+1} \mid n > 1, k \geq 2\}$ ist regulär. Sei dann $M = (\{q_i \mid 0 \leq i \leq 7\}, \{a, b\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_7\})$ die (deterministische) gsm mit $\delta(q_0, a) = (q_1, a^2)$, $\delta(q_1, a) = (q_1, a)$, $\delta(q_1, b) = (q_2, \varepsilon)$, $\delta(q_2, b) = (q_2, \varepsilon)$, $\delta(q_i, a) = (q_{i+1}, \varepsilon)$ für $2 \leq i \leq 6$, $\delta(q_7, a) = (q_7, b)$. Da die Familie der regulären Sprachen gegenüber beliebigen gsm-Abbildungen abgeschlossen ist, müsste auch $M(L) = \{a^{3n}b^{4n} \mid n \geq 1\}$ regulär sein, was aber nicht der Fall ist. Widerspruch! Somit kann auch L nicht regulär sein.



Aufgabe 6 Zeigen Sie mit Hilfe eines der Korollare zum Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen, dass $\{a^{3^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ nicht kontextfrei ist, indem Sie zeigen, dass die Funktion 3^n die im entsprechenden Korollar beschriebenen Bedingungen erfüllt. (4 Punkte)

Lösung 6

Korollar A: Für jedes $c \in \mathbb{N}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f(n+1) > f(n) + c$. Es gilt $3^{n+1} = 3^n + 3^n + 3^n > 3^n + c$ für z.B. $n = c$. Beweise nun die Ungleichung $3^c > c$ durch Induktion: Induktionsbasis: $c = 1$: $3 > 1$ ist offensichtlich richtig. Induktionshypothese: $3^c > c$. Induktionsbehauptung: $3^{c+1} > c + 1$. Einsetzen und Umformen ergibt: $3^{c+1} = 3^c + 3^c + 3^c > c + c + c = 3c > c + 1 \Leftrightarrow 2c > 1 \Leftrightarrow c \geq 1$. Somit haben wir mittels Induktion bewiesen: $3^c > c$ gilt für alle $c \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 7 Geben Sie für die Sprache $\{a^{3n-4}b^{5k}a^{4n+1} \mid n > 1, k \geq 2\}$ eine kontextfreie Grammatik in erweiterter GREIBACH-Normalform und überdies die eindeutig bestimmte Linksableitung für jedes Wort in Ihrer Grammatik an. **(6 Punkte)**

Lösung 7 Wir erhalten zum Beispiel folgende Grammatik:

$$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S) \text{ mit } P = \{S \rightarrow a^2 A a^9, A \rightarrow a^3 A a^4 \mid b^5 B, B \rightarrow b^5 B \mid b^5\}$$

Linksableitungen in G :

$$S \Rightarrow a^2 A a^9 \xRightarrow{n-1} a^{3n-4} A a^{4n+1} \Rightarrow a^{3n-4} b^5 B a^{4n+1} \xRightarrow{k-2} a^{3n-4} b^{5(k-1)} B a^{4n+1} \Rightarrow a^{3n-4} b^{5k} a^{4n+1} \text{ für alle } n > 1, k \geq 2.$$

Aufgabe 8 Geben Sie eine Turing-Maschine an, welche die Kellerautomatenbedingung erfüllt und jedes Wort w der Sprache $\{a^n b^{3n} \mid n \geq 1\}$ mit der Endkonfiguration $Z_1 w Z_2 q_f Z_0 q_f$ akzeptiert, wobei q_f der einzige Endzustand ist. **(12 Punkte)**

Lösung 8 $M = (Q, T, V, \delta, q_0, Z_0, B, F)$ mit

$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_f\}, F = \{q_f\}, T = \{a, b\}, V = \{Z_0, B, A\}.$$

Die Übergangsfunktion ist gegeben durch:

$$\delta(q_0, a, B; q_1, A, S, R)$$

$$\delta(q_1, a, B; q_2, A, S, R)$$

$$\delta(q_2, a, B; q_0, A, R, R)$$

$$\delta(q_0, b, B; q_3, B, S, L)$$

$$\delta(q_3, b, A; q_3, B, R, L)$$

$$\delta(q_3, Z_2, Z_0; q_f, Z_0, S, S)$$

Aufgabe 9 Geben Sie ein $D0L$ -System G mit $L(G) = L$ sowie alle Ableitungen für folgende Sprachen L an:

a) $L = \{a^{2^n} b^{3^n} \mid n \geq 0\}$ **(3 Punkte)**

b) $L = \{0^{3^n} 1^{2^n} \mid n \geq 0\}$ **(3 Punkte)**

Lösung 9

a) $G = (\{a, b\}, P, A)$ mit $P = \{a \rightarrow a^2, b \rightarrow b^3\}, A = ab;$

$$ab \Rightarrow^n a^{2^n} b^{3^n} \text{ für alle } n \geq 0.$$

b) $G = (\{0, 1\}, P, A)$ mit $P = \{0 \rightarrow 0^3, 1 \rightarrow 1^2\}, A = 01;$

$$01 \Rightarrow^n 0^{3^n} 1^{2^n} \text{ für alle } n \geq 0.$$

Aufgabe 10 Zeigen Sie ohne Zuhilfenahme des Pumping Lemmas, dass folgende Sprachen L nicht kontextfrei sind, indem Sie sie mittels eines Homomorphismus auf $\{a^{3^n} \mid n \geq 0\}$ abbilden:

a) $L = \{a^{2^n} b^{3^n} \mid n \geq 0\}$ **(3 Punkte)**

b) $L = \{0^{3^n} 1^{2^n} \mid n \geq 0\}$ **(3 Punkte)**

Lösung 10

a) Beweis indirekt. Angenommen, die Sprache $L = \{a^{2^n} b^{3^n} \mid n \geq 0\}$ ist kontextfrei. Sei dann h der Homomorphismus mit $h : \{a, b\}^* \rightarrow \{a\}^*$ sowie $h(a) = \varepsilon$ und $h(b) = a$. Da die Familie der kontextfreien Sprachen gegenüber beliebigen Homomorphismen abgeschlossen ist, müsste auch $h(\{a^{2^n} b^{3^n} \mid n \geq 0\}) = \{a^{3^n} \mid n \geq 0\}$ kontextfrei sein, was aber nicht der Fall ist. Widerspruch! Somit kann auch L nicht kontextfrei sein.

b) Beweis indirekt. Angenommen, die Sprache $L = \{0^{3^n} 1^{2^n} \mid n \geq 0\}$ ist kontextfrei. Sei dann h der Homomorphismus mit $h : \{0, 1\}^* \rightarrow \{a\}^*$ sowie $h(0) = a$ und $h(1) = \varepsilon$. Da die Familie der kontextfreien Sprachen gegenüber beliebigen Homomorphismen abgeschlossen ist, müsste auch $h(\{0^{3^n} 1^{2^n} \mid n \geq 0\}) = \{a^{3^n} \mid n \geq 0\}$ kontextfrei sein, was aber nicht der Fall ist. Widerspruch! Somit kann auch L nicht kontextfrei sein.