

1 Aussagenlogik

Aufgabe 1.1 Zeigen Sie für das Formelpaar (F, G) die Äquivalenz der beiden Formeln F und G :
 $F = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ und $G = (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow B)$.

Lösung 1.1 Beweis durch Wahrheitstabellen:

A	B	$(A \wedge B)$	$(\neg A \wedge \neg B)$	$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
t	t	t	f	t
t	f	f	f	f
f	t	f	f	f
f	f	f	t	t

A	B	$A \rightarrow \neg B$	$\neg A \rightarrow B$	$(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow B)$
t	t	f	t	t
t	f	t	t	f
f	t	t	t	f
f	f	t	f	t

Aufgabe 1.2 Zeigen Sie mittels Wahrheitstabellen, dass die beiden Formeln F und G nicht äquivalent sind: $F = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ und $G = \neg B \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$.

Lösung 1.2 Beweis durch Wahrheitstabellen:

A	B	$(A \wedge B)$	$(\neg A \wedge \neg B)$	$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
t	t	t	f	t
t	f	f	f	f
f	t	f	f	f
f	f	f	t	t

A	B	$\neg B$	$\neg A \rightarrow A$	$\neg B \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$
t	t	f	t	t
t	f	t	t	t
f	t	f	f	t
f	f	t	f	f

Aufgabe 1.3 Eruiieren Sie, ob die Formel $F = A \wedge (B \wedge (A \vee B))$

- (a) eine Tautologie,
- (b) erfüllbar,
- (c) widerlegbar,
- (d) eine Kontradiktion ist.

Lösung 1.3 Beweis durch Wahrheitstabellen:

A	B	$A \vee B$	$B \wedge (A \vee B)$	$A \wedge (B \wedge (A \vee B))$
t	t	t	t	t
t	f	t	f	f
f	t	t	t	f
f	f	f	f	f

$A \wedge (B \wedge (A \vee B))$ (übrigens äquivalent zu $A \wedge B$) ist daher erfüllbar und widerlegbar, aber weder eine Tautologie noch eine Kontradiktion.

Aufgabe 1.4 Transformieren Sie die Formel

$$(A \vee B) \wedge (A \rightarrow B) \wedge ((B \wedge C) \rightarrow \neg A) \wedge C \wedge \neg(\neg A \wedge B)$$

in konjunktive Normalform (KNF).

Lösung 1.4 Nachdem die Grobstruktur der Formel bereits in KNF ist, können wir die Teilformeln separat in KNF umformen, und die resultierenden Klauselmengen vereinigen:

$(A \vee B)$ ist bereits in KNF

$$(A \rightarrow B) = (\neg A \vee B)$$

$$((B \wedge C) \rightarrow \neg A) = \neg(B \wedge C) \vee \neg A = (\neg B \vee \neg C \vee \neg A)$$

C ist bereits in KNF

$$\neg(\neg A \wedge B) = (A \vee \neg B)$$

Die ursprüngliche Formel in KNF lautet somit:

$$(A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg C \vee \neg A) \wedge C \wedge (A \vee \neg B)$$

Die resultierende Klauselmenge ist also:

$$\{\{A, B\}, \{\neg A, B\}, \{\neg B, \neg C, \neg A\}, \{C\}, \{A, \neg B\}\}$$

Aufgabe 1.5 Geben Sie eine geeignete Substitution für das Formelpaar (F, G) so an, dass $F\sigma = G$ gilt:

$$F = (B \wedge A) \rightarrow B \text{ und}$$

$$G = (((\neg B \rightarrow \neg A) \wedge C) \wedge ((\neg B \vee \neg A) \vee C)) \rightarrow ((\neg B \rightarrow \neg A) \wedge C).$$

Lösung 1.5 Beweis durch Angabe einer geeigneten Substitution σ mit $F\sigma = G$:

$$\sigma = \left[\begin{array}{cc} ((\neg B \vee \neg A) \vee C) & ((\neg B \rightarrow \neg A) \wedge C) \\ A & B \end{array} \right]$$

Aufgabe 1.6 Verwenden Sie den Sequentialkalkül, um die Unerfüllbarkeit der Formel

$$\neg(B \rightarrow ((A \wedge \neg(B \vee C)) \vee B))$$

nachzuweisen.

Lösung 1.6 Wir müssen versuchen, $\neg(B \rightarrow ((A \wedge \neg(B \vee C)) \vee B)) \vdash$ abzuleiten:

$$\frac{\frac{\frac{\text{Axiom}}{B \vdash (A \wedge \neg(B \vee C)), B}}{B \vdash (A \wedge \neg(B \vee C)) \vee B} \vee\text{-}r}{\vdash B \rightarrow ((A \wedge \neg(B \vee C)) \vee B)} \rightarrow\text{-}r$$

$$\frac{\vdash B \rightarrow ((A \wedge \neg(B \vee C)) \vee B)}{\neg(B \rightarrow ((A \wedge \neg(B \vee C)) \vee B)) \vdash} \neg\text{-}l$$

Der Ableitungsversuch führt also in diesem Fall zu einer Ableitung. Wegen der Korrektheit des Sequentialkalküls ist damit die Unerfüllbarkeit der Ausgangsformel bewiesen.

Aufgabe 1.7 Verwenden Sie den Sequentialkalkül, um die Gültigkeit der Formel

$$(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$$

nachzuweisen.

Lösung 1.7 Der Sequent $\vdash (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$ ist ableitbar und daher ist die entsprechende Formel - wegen der Korrektheit des Sequentialkalküls - gültig:

$$\frac{\frac{\frac{\text{Axiom}}{(\neg A \rightarrow \neg B), A \vdash A}}{(\neg A \rightarrow \neg B) \vdash A, \neg A} \neg\text{-}r}{\frac{\frac{\frac{\text{Axiom}}{A, B \vdash A}}{B \vdash A, \neg A} \neg\text{-}r}{\frac{\frac{\text{Axiom}}{B \vdash A, B}}{\neg B, B \vdash A} \neg\text{-}l}{(\neg A \rightarrow \neg B), B \vdash A} \rightarrow\text{-}l}{(\neg A \rightarrow \neg B), (\neg A \rightarrow B) \vdash A} \rightarrow\text{-}r}{(\neg A \rightarrow \neg B) \vdash (\neg A \rightarrow B) \rightarrow A} \rightarrow\text{-}r}{\vdash (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)} \rightarrow\text{-}r$$

Aufgabe 1.8 Verwenden Sie den Sequentialkalkül, um ein Gegenmodell für die Formel

$$((C \wedge D) \rightarrow (E \rightarrow (\neg B \vee B))) \rightarrow A$$

zu finden.

Lösung 1.8 Wir bilden folgenden Ableitungsversuch:

$$\frac{\text{Anti-Axiom} \quad \text{Anti-Axiom}}{\frac{\frac{\vdash A, C \quad \vdash A, D}{\vdash A, (C \wedge D)} \quad \frac{E \rightarrow (\neg B \vee B) \vdash A}{(C \wedge D) \rightarrow (E \rightarrow (\neg B \vee B)) \vdash A} \quad \vdots}{\vdash ((C \wedge D) \rightarrow (E \rightarrow (\neg B \vee B))) \rightarrow A} \rightarrow -r$$

Das Anti-Axiom ganz links gibt an, dass jede Interpretation I , die A und C auf **f** abbildet, ein Gegenmodell zu $((C \wedge D) \rightarrow (E \rightarrow (\neg B \vee B))) \rightarrow A$ ist; also z.B. I mit $I(A) = \mathbf{f}$, $I(B) = \mathbf{t}$, $I(C) = \mathbf{f}$, $I(D) = \mathbf{t}$.

(Da bereits ein Zweig, der in einem Anti-Axiom endet, zum Nachweis der Widerlegbarkeit ausreicht, muss der Rest des Ableitungsversuchs nicht weiter ausgeführt werden.)

Aufgabe 1.9 Finden Sie durch Konstruktion eines geeigneten Ableitungsversuchs im Sequentialkalkül entweder ein Gegenmodell oder den Nachweis, dass die Formel

$$(\neg(P \rightarrow Q) \vee P) \rightarrow P$$

gültig ist.

Lösung 1.9 Der Sequent $\vdash (\neg(P \rightarrow Q) \vee P) \rightarrow P$ ist ableitbar und daher ist die entsprechende Formel - wegen der Korrektheit des Sequentialkalküls - gültig:

$$\frac{\text{Axiom} \quad \frac{P \vdash P, Q}{\vdash P, (P \rightarrow Q)} \rightarrow -r}{\frac{\neg(P \rightarrow Q) \vdash P}{\neg(P \rightarrow Q) \vee P \vdash P} \vee -l} \rightarrow -r$$

Aufgabe 1.10 Finden Sie durch Konstruktion eines geeigneten Ableitungsversuchs im Sequentialkalkül entweder ein Gegenmodell oder den Nachweis, dass die Formel

$$((\neg A \vee B) \rightarrow A) \wedge ((A \wedge \neg B) \rightarrow B)$$

gültig ist.

Lösung 1.10 Wir bilden folgenden Ableitungsversuch:

$$\frac{\text{Anti-Axiom} \quad \vdots}{\frac{\neg A \vdash A \quad B \vdash A}{(\neg A \vee B) \vdash A} \vee -l} \rightarrow -r \quad \frac{\vdots}{\vdash (A \wedge \neg B) \rightarrow B} \wedge -r$$

Das Anti-Axiom links gibt an, dass jede Interpretation I , die A auf **f** und B auf **t** abbildet, ein Gegenmodell zu $((\neg A \vee B) \rightarrow A) \wedge ((A \wedge \neg B) \rightarrow B)$ ist; also z.B. I mit $I(A) = \mathbf{f}$, $I(B) = \mathbf{t}$.

(Da bereits ein Zweig, der in einem Anti-Axiom endet, zum Nachweis der Widerlegbarkeit ausreicht, muss der Rest des Ableitungsversuchs nicht weiter ausgeführt werden.)

Aufgabe 1.11 Beweisen Sie mittels Resolution die Gültigkeit der Formel

$$(A \vee B) \wedge (A \rightarrow B) \wedge ((B \wedge C) \rightarrow \neg A) \wedge C \rightarrow (\neg A \wedge B).$$

Lösung 1.11 Da Resolution ein indirektes Verfahren ist, zeigen wir die Gültigkeit einer Formel, indem wir ihre Negation widerlegen:

$$F = (A \vee B) \wedge (A \rightarrow B) \wedge ((B \wedge C) \rightarrow \neg A) \wedge C \rightarrow (\neg A \wedge B)$$

Durch Umformung erhalten wir

$$\neg F = (A \vee B) \wedge (A \rightarrow B) \wedge ((B \wedge C) \rightarrow \neg A) \wedge C \wedge \neg(\neg A \wedge B)$$

was zur Klauselmenge

$$K = \{\{A, B\}, \{\neg A, B\}, \{\neg B, \neg C, \neg A\}, \{C\}, \{A, \neg B\}\}$$
 führt (siehe Beispiel 1.4).

Zum Nachweis der Unerfüllbarkeit von K (und damit der Richtigkeit der ursprünglichen Formel F) dient zum Beispiel folgende Resolutionswiderlegung:

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 1. $\{A, B\} \in K$ | 6. $\{B\}$ Resolvente von 1 und 2 |
| 2. $\{\neg A, B\} \in K$ | 7. $\{\neg C, \neg A\}$ Resolvente von 3 und 6 |
| 3. $\{\neg B, \neg C, \neg A\} \in K$ | 8. $\{\neg A\}$ Resolvente von 4 und 7 |
| 4. $\{C\} \in K$ | 9. $\{\neg B\}$ Resolvente von 5 und 8 |
| 5. $\{A, \neg B\} \in K$ | 10. $\{\}$ Resolvente von 6 und 9 |

Aufgabe 1.12 Beweisen oder widerlegen Sie mittels Resolution die Klauselmenge

$$K = \{\{P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{\neg P, Q\}, \{\neg R\}\}.$$

Lösung 1.12 Zum Nachweis der Unerfüllbarkeit der Klauselmenge dient zum Beispiel folgende Resolutionswiderlegung:

- | | |
|--------------------------|--|
| 1. $\{P, Q\} \in K$ | 5. $\{\neg Q\}$ Resolvente von 2 und 4 |
| 2. $\{\neg Q, R\} \in K$ | 6. $\{\neg P\}$ Resolvente von 3 und 5 |
| 3. $\{\neg P, Q\} \in K$ | 7. $\{Q\}$ Resolvente von 1 und 6 |
| 4. $\{\neg R\} \in K$ | 8. $\{\}$ Resolvente von 5 und 7 |

Aufgabe 1.13 Beweisen oder widerlegen Sie mittels Resolution die Klauselmenge

$$K = \{\{Q, R\}, \{P, \neg Q\}, \{\neg P, Q\}, \{\neg R\}\}.$$

Lösung 1.13 Wir bilden systematisch alle nicht-redundanten Resolventen:

- | | |
|--------------------------|---|
| 1. $\{Q, R\} \in K$ | 5. $\{P, R\}$ Resolvente von 1 und 2 |
| 2. $\{P, \neg Q\} \in K$ | 6. $\{Q\}$ Resolvente von 1 und 4 |
| 3. $\{\neg P, Q\} \in K$ | 7. $\{P, \neg P\}$ Resolvente von 2 und 3 |
| 4. $\{\neg R\} \in K$ | 8. $\{Q, \neg Q\}$ Resolvente von 2 und 3 |

Klauseln 7 und 8 sind Tautologien und können daher gestrichen werden. Klausel 6 subsumiert die Klauseln 1 und 3, welche dadurch ebenfalls redundant sind.

Nach Elimination dieser redundanten Klauseln bleiben folgende übrig:

2. $\{P, \neg Q\}$
4. $\{\neg R\}$
5. $\{P, R\}$
6. $\{Q\}$

Als einzige neue nicht-redundante Klausel kommt noch $\{P\}$ als Resolvente von 2 und 6 bzw. 4 und 5 hinzu.

Nun lassen sich keine neuen nicht-redundanten Resolventen mehr bilden. Die leere Klausel ist also nicht aus K ableitbar. Wegen der Widerlegungsvollständigkeit des Resolutionskalküls ist die Klauselmenge K damit als erfüllbar nachgewiesen.

2 Prädikatenlogik

Aufgabe 2.1 Übersetzen Sie folgendes Textbeispiel in eine logische Formel:

Alle klugen Zauberer können fliegen. Aron ist klug, kann aber nicht fliegen.

Daher ist Aron kein Zauberer.

Lösung 2.1 Mit den Prädikaten Z: "ist ein Zauberer", K: "ist klug" und F: "kann fliegen" erhalten wir folgende Formel: $((\forall x)(Z(x) \wedge K(x)) \rightarrow F(x)) \wedge (K(a) \wedge \neg F(a)) \rightarrow \neg Z(a)$

Aufgabe 2.2 Geben Sie ein Modell für die folgende Formel an:

$$(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow P(x, f(y))) \wedge (\forall x)\neg P(x, x)$$

Lösung 2.2 Sei $M = (\mathbf{N}, \Phi, I)$ eine Interpretation mit $\Phi(P) = <$ und $\Phi(f) = s$ wobei $s(n) = n + 1$ für alle $n \in \mathbf{N}$ (s bezeichnet man als die "Nachfolgerfunktion"). (Der Wahrheitswert ist unabhängig von der Variablenumgebung I , da alle in der Formel vorkommenden Variablen durch Quantoren gebunden sind, und muss daher hier nicht extra definiert werden.)

M ist ein Modell der gegebenen prädikatenlogischen Formel, da

für alle $x, y \in \mathbf{N}$ gilt: wenn $x < y$ dann $x < y + 1$ und

für alle $x \in \mathbf{N}$ gilt: $x \not< x$.

Aufgabe 2.3 Geben Sie für die folgenden Atomformeln einen allgemeinsten Unifikator bzw. Gründe an, warum die Atomformeln nicht unifizierbar sind:

1. $P(f(x, g(y, z)), a, g(b, z)), \quad P(f(v, w), u, g(b, a))$
2. $P(g(h(u, v), x), d, f(y, c)), \quad P(g(z), c, f(h(a, b)), d)$

Lösung 2.3 Wir erhalten folgende Lösung:

1. Der allgemeinste Unifikator der beiden Atomformeln ist
 $\sigma = \{v \leftarrow x, w \leftarrow g(y, a), u \leftarrow a, z \leftarrow a\}$
2. Die beiden Atomformeln sind nicht unifizierbar, da die Konstanten c und d nicht gleichgesetzt werden können.

Aufgabe 2.4 Geben Sie einen Resolutionsbeweis der folgenden Formel an:

$$A = (\forall x)(\exists y)(\forall z)(\forall u)(P(z, u, x) \rightarrow P(y, z, u)) \rightarrow (\forall x)(P(x, x, x) \rightarrow P(f(x), f(x), f(x)))$$

Lösung 2.4 Da Resolution ein indirektes Verfahren ist, zeigen wir die Gültigkeit von A , indem wir ihre Negation $\neg A$ widerlegen:

$$\neg A = \neg[(\forall x)(\exists y)(\forall z)(\forall u)(P(z, u, x) \rightarrow P(y, z, u)) \rightarrow (\forall x)(P(x, x, x) \rightarrow P(f(x), f(x), f(x)))]$$

- Transformation von $\neg A$ in Normalform:

Schritt 1 Transformation in Normalform 1:

1. Elimination von \rightarrow :
 $\neg[(\forall x)(\exists y)(\forall z)(\forall u)(\neg P(z, u, x) \vee P(y, z, u)) \vee (\forall x)(\neg P(x, x, x) \vee P(f(x), f(x), f(x)))]$
2. \neg nur vor Atomen:
 $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(\forall u)(\neg P(z, u, x) \vee P(y, z, u)) \wedge (\exists x)(P(x, x, x) \wedge \neg P(f(x), f(x), f(x)))$
3. Variablennormalisierung:
 $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(\forall u)(\neg P(z, u, x) \vee P(y, z, u)) \wedge (\exists v)(P(v, v, v) \wedge \neg P(f(v), f(v), f(v)))$

Schritt 2 Transformation in Normalform 2 (Skolemform) durch Elimination der \exists -Quantoren:

$(\exists y)$ liegt im Bereich von $(\forall x)$:

$(\forall x)(\forall z)(\forall u)(\neg P(z, u, x) \vee P(f(x), z, u)) \wedge (\exists v)(P(v, v, v) \wedge \neg P(f(v), f(v), f(v)))$

$(\exists v)$ liegt nicht im Bereich von \forall -Quantoren:

$(\forall x)(\forall z)(\forall u)(\neg P(z, u, x) \vee P(f(x), z, u)) \wedge (P(a, a, a) \wedge \neg P(f(a), f(a), f(a)))$

Schritt 3 Weglassen der \forall -Quantoren (Negationsnormalform):

$(\neg P(z, u, x) \vee P(f(x), z, u)) \wedge (P(a, a, a) \wedge \neg P(f(a), f(a), f(a)))$

Schritt 4 Transformation in KNF:

die Formel ist bereits in KNF

$(\neg P(z, u, x) \vee P(f(x), z, u)) \wedge P(a, a, a) \wedge \neg P(f(a), f(a), f(a))$

Klauselform:

$C = \{\{\neg P(z, u, x), P(f(x), z, u)\}, \{P(a, a, a)\}, \{\neg P(f(a), f(a), f(a))\}\}$

- Resolutionswiderlegung von C :

$$\begin{array}{c}
 \frac{\{P(a, a, a)\} \quad \{\neg P(z, u, x), P(f(x), z, u)\}}{\{P(f(a), a, a)\}} \quad \sigma_1 \\
 \frac{\{P(f(a), a, a)\} \quad \{\neg P(z, u, x), P(f(x), z, u)\}}{\{P(f(a), f(a), a)\}} \quad \sigma_2 \\
 \frac{\{P(f(a), f(a), a)\} \quad \{\neg P(z, u, x), P(f(x), z, u)\}}{\{P(f(a), f(a), f(a))\}} \quad \sigma_3 \\
 \hline
 \square
 \end{array}$$

Mit den allgemeinsten Unifikatoren

$\sigma_1 = \{z \leftarrow a, u \leftarrow a, x \leftarrow a\},$

$\sigma_2 = \{z \leftarrow f(a), u \leftarrow a, x \leftarrow a\},$

$\sigma_3 = \{z \leftarrow f(a), u \leftarrow f(a), x \leftarrow a\}.$