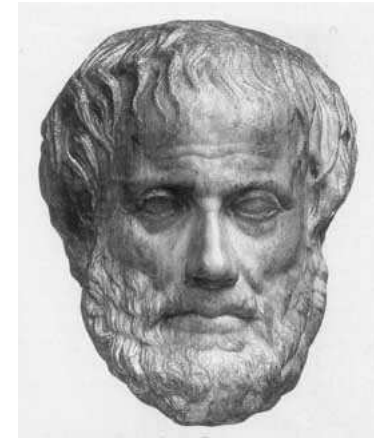


Symbolische Logik

Aristoteles (384-322 BC)



Kernstück der Aristotelischen Logik:
Ableitendes Schliessen

Syllogismen:

Sokrates ist ein Mensch. Alle Menschen sind sterblich.

Also ist auch Sokrates sterblich.

Prämisse Prämisse
Konklusion

Symbolische Logik

Regeln der Logik, die schon im antiken Griechenland als absolute Wahrheiten galten:

Gesetz der Identität:

Ein Ding ist identisch mit sich selbst.

Gesetz der Widerspruchsfreiheit:

Keine Aussage kann zugleich wahr und falsch sein.

Tertium non datur:

Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch.

Symbolische Logik

Es regnet Wenn es regnet ist die Straße nass
Also ist die Straße nass

~~Die Straße ist nass Wenn es regnet ist die Straße nass
Also regnet es~~

Trennung von Form und Inhalt einer Aussage:
die Gültigkeit der Schlussfolgerung kann allein aufgrund
ihrer logischen Form entschieden werden.

A A \rightarrow B
B

Modus Ponens

Symbolische Logik

René Descartes (1596-1650)



Gottfried Leibniz (1646-1716)

Abgesehen von Beiträge der mittelalterlichen Scholastik zur Logik beginnt die Geschichte der Automatisierung des menschlichen Denkens mit Beiträgen von Descartes und Leibniz im 17.Jh. Was Descartes für die Euklidische Geometrie getan hat (nämlich ihre Mechanisierung durch Entwicklung derselben allein mit algebraischen Methoden) hoffte Leibniz auf alles menschliche Denken erweitern zu können. Sein großes Forschungsprojekt war die Entwicklung

1. einer universellen formalen Sprache ("lingua characteristica") und
2. eines Kalküls für diese Sprache ("calculus ratiocinator").

Algebraische Logik

Augustus de Morgan (1806-1871)



George Boole (1815-1864)

Ein wirklicher Kalkül im Sinne von Leibniz wurde jedoch erst zwei Jahrhunderte später von deMorgan und Boole entwickelt, und ist uns heute als Aussagenlogik bekannt.

Aussagenlogik

Jeder Aussage („Proposition“) wird einer der beiden Wahrheitswerte „wahr“ bzw. „falsch“ zugeordnet.

Man betrachtet nur Aussagen, die entweder nicht mehr weiter zerlegt werden („atomare Aussagen“) oder die mittels Junktoren aus anderen Aussagen zusammengesetzt sind.

Prinzip der **Wahrheitsfunktionalität**:

Wahrheit bzw. Falschheit einer zusammengesetzten Aussage hängt nur von der Wahrheit bzw. Falschheit ihrer Teilaussagen ab.

Aussagenlogik

Formalisiert die Verknüpfung einfacher JA/NEIN Aussagen durch Junktoren (Konnektive, Operatoren) wie Und, Oder,...

Aussagenvariablen (A, B,...) werden zusammen mit den Konstanten (Wahrheitswerten) **t**, **f** auch als **atomare Formeln** (Atomformeln, Atome) bezeichnet.

Eine Formel heißt **atomar**, wenn sie nur aus einem Atom besteht.

Formeln werden aus atomaren Formeln durch Verknüpfung mit 1- und 2-stelligen Operatoren gebildet.

Aussagenlogik: Syntax

Negation	$\neg A$	Nicht A
Konjunktion	$A \wedge B$	A und B
Disjunktion	$A \vee B$	A oder B
Implikation	$A \rightarrow B$	A impliziert B
Äquivalenz	$A \leftrightarrow B$	A genau dann wenn B



Präzedenz der Operatoren

Prädikatenlogik:

Existenzaussage

Es gibt ein x das E erfüllt $\exists x : E(x)$

Allaussage Alle x erfüllen E $\forall x : E(x)$

Aussagenlogik - Syntax

aussagenlogische Variablen: $V_A = \{A, B, C, \dots\}$

aussagenlogische Konstanten: **t, f**

AF ist die kleinste Menge, für die gilt:

(AF1) $V_A \subseteq AF$
(AF2) $\{t, f\} \subseteq AF$ } Atomare Formeln (Atome)

(AF3) Sind $F, G \in AF$, dann sind auch
 $\neg F$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G) \in AF$

Aussagenlogik: Semantik

Da eine Formel nur endlich viele Variablen erhält, kann ihre **Semantik** vollständig durch eine Wahrheitstafel beschrieben werden

Negation				Konjunktion	Disjunktion	Implikation	Äquivalenz
A	\neg	A	B	\wedge	\vee	$\rightarrow (\supset)$	$\leftrightarrow (\equiv)$
t	f	f	f	f	f	t	t
f	t	f	t	f	t	t	f
		t	f	f	t	f	f
		t	t	t	t	t	t

$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ aussagenlogische Operatoren
(Junktoren, Konnektive)

Einschub: Implikation

$$A \rightarrow B$$

ist falsch, wenn (die Voraussetzung) A wahr und (die Behauptung) B falsch ist. Andernfalls ist die Implikation stets wahr.

Andere Sprechweisen:

aus A folgt B, A ist **hinreichend** für B, B ist **notwendig** für A.

„ex falso quodlibet“

„verum ex quodlibet“

Kann man also mittels einer falschen Voraussetzung alles beweisen?

Entspricht der zunächst überraschenden Konvention in der Mathematik, Schlussfolgerungen aus falschen Aussagen stets als wahr anzusehen. Im folgenden Beispiel sehen wir aber, dass diese Konvention sehr natürlich ist und der üblichen Formulierung mathematischer Sätze entspricht.

Einschub: Implikation

Beispiel: Sei m eine ganze Zahl.

Aussage A: „ m ist durch 6 teilbar“

Aussage B: „ m ist durch 2 teilbar“

aus A folgt B (A impliziert B)

Aus der Teilbarkeit von m durch 6 folgt die
Teilbarkeit von m durch 2

Man sagt auch:

Die Teilbarkeit von m durch 6 ist **hinreichend** für die
Teilbarkeit von m durch 2.

Die Teilbarkeit von m durch 2 ist **notwendig** für die
Teilbarkeit von m durch 6.

Interpretation, Auswertung

Eine **Interpretation** (**Environment**) ist eine Funktion der (Menge der) Aussagenvariablen auf $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$. ($I: IVS \rightarrow \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$)

Kommen in einer Formel n **Variablen** vor, so betrachtet man alle 2^n **möglichen Interpretationen**, sowie die Evaluierung dieser Interpretationen.

Evaluierung (Auswertung) einer Formel:
durch Wahrheitstafeln

Beispiel: $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

A B	$B \rightarrow A$	$A \rightarrow (B \rightarrow A)$
f f	t	t
f t	f	t
t f	t	t
t t	t	t

Formeln

Eine Formel F heißt

gültig (**Tautologie**), wenn sie in **jeder** Interpretation zu **t** evaluiert.

erfüllbar, wenn sie in mindestens **einer** Interpretation zu **t** evaluiert (**Modell**)

widerlegbar, wenn sie in mindestens **einer** Interpretation zu **f** evaluiert (**Gegenbeispiel**, **Gegenmodell**)

unerfüllbar (**Kontradiktion**), wenn sie in **jeder** Interpretation zu **f** evaluiert

Zwei Formeln F und G sind **äquivalent** genau dann wenn $F \leftrightarrow G$ gültig ist.

Beispiel: Distributivgesetz

$$\underbrace{A \vee (B \wedge C)}_F = \underbrace{(A \vee B) \wedge (A \vee C)}_G$$

A	B	C	$B \wedge C$	$A \vee B$	$A \vee C$	F	G
f	f	f	f	f	f	f	f
f	f	t	f	f	t	f	f
f	t	f	f	t	f	f	f
f	t	t	t	t	t	t	t
t	f	f	f	t	t	t	t
t	f	t	f	t	t	t	t
t	t	f	f	t	t	t	t
t	t	t	t	t	t	t	t

Äquivalenzen

$$A \wedge A = A$$

Idempotenz

$$A \wedge B = B \wedge A$$

Kommutativität

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

Assoziativität

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

Distributivität

$$A \wedge (A \vee B) = A$$

Absorption

$$A \wedge \mathbf{f} = \mathbf{f}$$

$$A \wedge \mathbf{t} = A$$

$$A \wedge \neg A = \mathbf{f}$$

Duale Versionen: Vertauschen von \wedge und \vee sowie \mathbf{t} und \mathbf{f}

Funktionale Vollständigkeit

Alle aussagenlogischen Operatoren können aus wenigen Basisoperatoren zusammengesetzt werden.

Eine Menge von Operatoren heißt **funktional vollständig**, wenn alle anderen Funktionen durch sie ausgedrückt werden können.

Beispiel:

Jeder Operator wird eindeutig durch seine Wahrheitstafel festgelegt. Jede Wahrheitstafel kann durch eine Formel beschrieben werden, die nur die Operatoren \neg , \wedge , \vee benützt. Daher ist die Menge $\{\neg, \wedge, \vee\}$ funktional vollständig. Tatsächlich ist nur entweder \wedge oder \vee notwendig, da sich ein Operator durch den anderen ausdrücken lässt:

$$A \wedge B = \neg(\neg A \vee \neg B)$$

$$A \vee B = \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

Formeln und Formelschemata

Eine **Substitution** (Ersetzung) ist eine Abbildung von Variablen A_i auf Formeln F_i .

Anwendung einer Substitution auf eine Formel:
Alle A_i werden gleichzeitig durch entsprechende F_i ersetzt.

Jede Formel kann als Formelschema aufgefasst werden, indem man die Variablen als Platzhalter für beliebige Formeln interpretiert.

Ist das Schema eine Tautologie, so sind auch die daraus abgeleiteten Formeln Tautologien.

Formeln und Formelschemata - Substitution

$\sigma = \begin{bmatrix} F_1 \dots F_n \\ A_1 \dots A_n \end{bmatrix}$ Substitution, die alle A_i durch F_i ersetzt

$F\sigma = F \begin{bmatrix} F_1 \dots F_n \\ A_1 \dots A_n \end{bmatrix}$ Formel, die aus F entsteht, indem alle A_i durch F_i ersetzt werden.

Ist F eine Tautologie, dann auch $F\sigma$.

Gilt $F \leftrightarrow G$, dann gilt auch $F\sigma \leftrightarrow G\sigma$.

Formeln können also als Schemata aufgefasst werden, wobei Variablen als Platzhalter dienen.

Beispiel:

$F = (A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$ ist gültig, daher auch

$$F \begin{bmatrix} X \vee \neg Y & \neg X \wedge Y \\ A & B \end{bmatrix} = ((X \vee \neg Y) \wedge ((X \vee \neg Y) \rightarrow (\neg X \wedge Y))) \rightarrow (\neg X \wedge Y)$$

Formeln und Formelschemata

Aus einer Formel erhält man äquivalente Formeln, wenn beliebige Teilformeln durch äquivalente ersetzt werden:

Seien σ_1, σ_2 Substitutionen, sodass $A\sigma_1 \leftrightarrow A\sigma_2$ für alle Variablen A . Dann gilt $F\sigma_1 \leftrightarrow F\sigma_2$ für alle Formeln F .

Beispiel:

Sei $F = (A \wedge B) \rightarrow C$, $\sigma_1 = \begin{bmatrix} A \rightarrow B & B \\ B & C \end{bmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{bmatrix} \neg A \vee B & B \\ B & C \end{bmatrix}$

Da $B\sigma_1 = (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B) = B\sigma_2$

gilt, erhalten wir

$$F\sigma_1 = (A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B \leftrightarrow (A \wedge (\neg A \vee B)) \rightarrow B = F\sigma_2$$

Logische Konsequenz und Implikation

Eine Formel G ist eine **logische Konsequenz** der Formeln F_1, \dots, F_n (geschrieben $F_1, \dots, F_n \models G$), wenn in jeder Interpretation, in der F_1, \dots, F_n erfüllbar sind, auch G erfüllbar ist.

Für $n = 0$ ist $\models G$ gleichbedeutend mit „ G ist gültig“.

DEDUKTIONSTHEOREM

$F_1, \dots, F_n \models G$ genau dann wenn $F_1, \dots, F_{n-1} \models (F_n \rightarrow G)$

Folgerung:

$F_1 \dots F_n \models G$ gilt

genau dann wenn $F_1 \rightarrow (F_2 \rightarrow \dots (F_n \rightarrow G) \dots)$ gilt

genau dann wenn $(F_1 \wedge \dots \wedge F_n) \rightarrow G$ gültige Formel ist.

Logische Konsequenz und Implikation: Beispiel

B ist logische Konsequenz aus A und $A \rightarrow B$, d.h. es gilt

$$A, A \rightarrow B \models B$$

Die Formel $(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$ ist daher eine Tautologie.

Bemerkung:

\models und $=$ sind keine logischen Operatoren, sondern Relationen zwischen Formeln und gehören zur Metasprache:

Symbole, die wir benutzen, um über Logik zu sprechen.

Normalformen

Normalform einer Formel: standardisierte vereinfachte Variante, die äquivalent zur ursprünglichen Formel ist.

Literal: aussagenlogische Variable A oder ihr Negat $\neg A$.

Eine Formel ist in **disjunktiver Normalform (DNF)**, wenn sie eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen $L_{i,j}$ ist:

$$(L_{1,1} \wedge \dots \wedge L_{1,n_1}) \vee \dots \vee (L_{m,1} \wedge \dots \wedge L_{m,n_m})$$

Eine Formel ist in **konjunktiver Normalform (KNF)**, wenn sie eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen $L_{i,j}$ ist:

$$(L_{1,1} \vee \dots \vee L_{1,n_1}) \wedge \dots \wedge (L_{m,1} \vee \dots \vee L_{m,n_m})$$

Die einzelnen Disjunktionen der KNF werden auch **Klauseln** genannt, die KNF daher auch **Klauselnormalform**.

Spezialfälle:

t (entspricht leerer Konjunktion), **f** (entspricht leerer Disjunktion)

Normalformen: Mengennotation

Implizite Berücksichtigung von Idempotenz, Kommutativität und Assoziativität von Konjunktion und Disjunktion:

Menge von Literalmenge $\{\{L_{1,1}, \dots, L_{1,n_1}\}, \dots, \{L_{m,1}, \dots, L_{m,n_m}\}\}$ kann sowohl als DNF als auch als KNF interpretiert werden.

Hier wird die Mengennotation ausschließlich für KNF verwendet: Eine **Klauselmeng**e, d.h., eine endliche Menge von endlichen Mengen von Literalen repräsentiert hier immer eine **KNF**!

Dementsprechend steht $\{\}$ auf Ebene der Klauseln für **f**, auf Ebene einer vollständigen KNF jedoch für **t**.

Beachte: Reine Konjunktionen bzw. Disjunktionen von Literalen, d.h. Formeln wie $L_1 \wedge \dots \wedge L_n$ bzw. $L_1 \vee \dots \vee L_n$ sind sowohl in KNF als auch in DNF!

Normalformen: DNF und KNF

Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es eine äquivalente Formel in DNF bzw. KNF.

Schritt 1: alle Operatoren durch \wedge , \neg , \vee ersetzen:

$$A \rightarrow B = \neg A \vee B$$

$$A \leftrightarrow B = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

Schritt 2: Negationen vor Variablen schieben (deMorgan):

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B \quad \neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B \quad \neg\neg A = A$$

Schritt 3: Elimination von **t** und **f**:

$$A \wedge \mathbf{t} = A \quad A \wedge \mathbf{f} = \mathbf{f} \quad A \vee \mathbf{t} = \mathbf{t} \quad A \vee \mathbf{f} = A \quad \neg\mathbf{t} = \mathbf{f} \quad \neg\mathbf{f} = \mathbf{t}$$

Schritt 4: Umformung in KNF/DNF mittels Distributivgesetz

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C) \quad \text{führt zu KNF}$$

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \quad \text{führt zu DNF}$$

Normalformen: Beispiel

$$(\neg A \vee \neg(B \vee C)) \rightarrow \neg D$$

Schritt 1: $\neg(\neg A \vee \neg(B \vee C)) \vee \neg D$

Schritt 2: $(A \wedge (B \vee C)) \vee \neg D$

Schritt 3: $(A \wedge (B \vee C)) \vee \neg D$

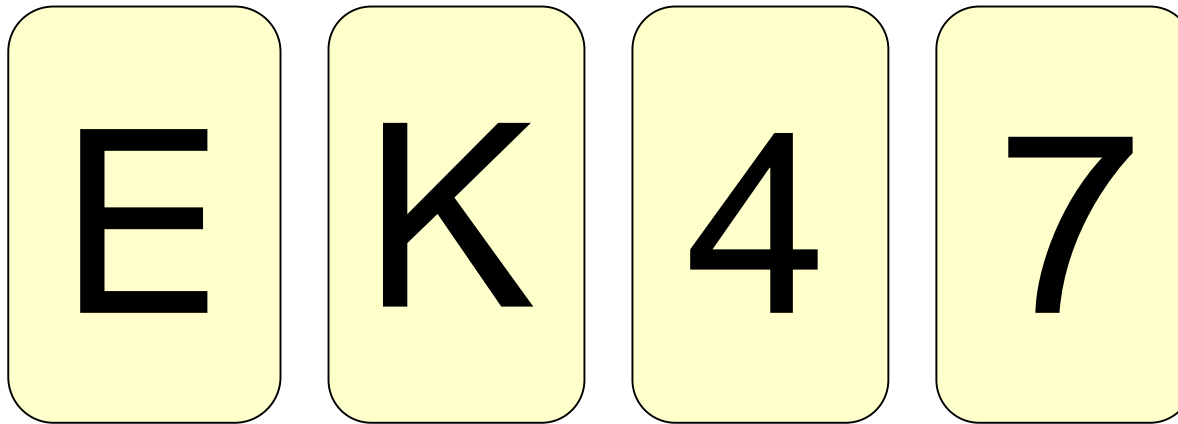
Schritt 4: Ausdistribuiieren

DNF: $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee \neg D$

KNF: $(A \vee \neg D) \wedge (B \vee C \vee \neg D)$ $\{\{A, \neg D\}, \{B, C, \neg D\}\}$

Denkaufgabe

A: Hat eine Karte einen Vokal auf der einen Seite, dann hat sie eine gerade Ziffer auf der anderen.



Welche Karten müssen zumindest umgedreht werden, um zu beweisen, dass A wahr ist ?

- | | |
|---------|---|
| E | ? |
| E und 4 | ? |
| E und 7 | ? |
| K und 7 | ? |
| andere | ? |