

# Mathematische Logik

Gottlob Frege (1848-1925)



1879: Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. Halle 1879.

## G. Frege, "Begriffsschrift"

Die wichtigsten Beiträge zur Entwicklung der mathematischen Logik, wie sie auch den heutigen Deduktionssystemen zugrunde liegt, sind die Arbeiten von G. Frege, insbesondere sein Buch "Begriffsschrift". Diese enthält die erste vollständige Entwicklung desjenigen Anteils der mathematischen Logik, den wir heute als Prädikatenlogik 1. Stufe bezeichnen.

Diese "Begriffsschrift" ist aber nicht nur deshalb so relevant, weil hier ein logischer Kalkül entwickelt und vollständig formal aufgebaut wurde, sondern auch wegen der methodischen Vorgehensweise, in der Syntax und intendierte Semantik einer formalen Sprache getrennt und explizit entwickelt wurden. Die Begriffsschrift war damit nicht nur der Vorgänger der heutigen mathematischen Logik, sondern Vorbild aller formaler Sprachen, einschließlich aller Programmiersprachen.

# Mathematische Logik

B. Russel (1872-1970)



Principia Mathematica

D. Hilbert (1862-1943)



Hilbert-Programm

L.E. Brouwer (1881-1966)



Intuitionismus

A. Tarski (1902-1983)



Semantik

K. Gödel (1906-1978)



Unvollständigkeitssätze

# Prädikatenlogik

Aussagenlogik: Eine Sprachebene

Variablen symbolisieren Aussagen

Prädikatenlogik: Zwei Sprachebenen: Terme, Formeln

Eigenschaften von Individuen und deren  
Beziehungen

A: Sokrates ist ein Mensch. B: Alle Menschen sind sterblich.

C: Sokrates ist sterblich.

Dieser Schluss ist aussagenlogisch nicht repräsentierbar!

# Prädikatenlogik

A: Sokrates ist ein Mensch. B: Alle Menschen sind sterblich.

C: Sokrates ist sterblich.

A: Subjekt: „Sokrates“ Prädikat: „ist ein Mensch“

B: Subjekt: „Menschen“ Prädikat: „sind sterblich“

C: Subjekt: „Sokrates“ Prädikat: „ist sterblich“

Darstellung von A,B,C in der Prädikatenlogik:

A: Mensch(Sokrates)

B:  $(\forall x) (\text{Mensch}(x) \rightarrow \text{sterblich}(x))$

C: sterblich(Sokrates)

# Prädikatenlogik

## Formalisierung als Schluss:

$$\frac{(\forall x) (M(x) \rightarrow S(x)) \quad M(s)}{S(s)}$$

M,S	Prädikatensymbole
x	(Individuen-) Variable
s	Konstantensymbol
$\forall$	Quantor

Terme: x,s  
Formeln: M(s), S(s)  
 $(\forall x) (M(x) \rightarrow S(x))$

## Formalisierung als Formel:

$$(M(s) \wedge (\forall x) (M(x) \rightarrow S(x))) \rightarrow S(s)$$

# Symbolmengen von PL

$V = \{ x, y, z, u, v, w, x_1, \dots \}$  Menge von Variablen

$KS = \{ a, b, c, d, e, a_1, \dots \}$  Menge von Konstantensymbolen

$FS$  Menge  $i$ -stelliger Funktionssymbole  $f, g, h, i, f_1, \dots$

$$FS = \bigcup_{i=1}^{\infty} FS_i$$

$PS$  Menge  $i$ -stelliger Prädikatensymbole  $P, Q, R, S, P_1, \dots$

$$PS = \bigcup_{i=1}^{\infty} PS_i \quad PS_0 = \{ \mathbf{t}, \mathbf{f} \}$$

Quantoren:  $\forall, \exists$

Junktoren:  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$

Sonderzeichen:  $(, ), ", "$

# Terme

Unterste Sprachebene: Terme (setzen sich aus Variablen, Konstanten- und Funktionssymbolen zusammen):

Induktive Definition der **Terme** (Menge  $T$ ):

(T1)  $V \subseteq T$  (Variablen sind Terme)

(T2)  $KS \subseteq T$  (Konstantensymbole sind Terme)

(T3)  $f(t_1, \dots, t_n) \in T$  wenn  $f \in FS_n$  und  $t_1, \dots, t_n \in T$

(aus  $n$  Termen werden mittels  $n$ -stelliger Funktionssymbole neue Terme erzeugt)



# Formeln

Induktive Definition der **Formeln** (Menge **PL**):

(PL1)  $P(t_1, \dots, t_n) \in PL$  wenn  $P \in PS_n$  und  $t_1, \dots, t_n \in T$   
(Atomformeln)

(PL2)  $\neg A \in PL$  wenn  $A \in PL$

(PL3)  $(A \wedge B) \in PL$  wenn  $A, B \in PL$

(PL4)  $(A \vee B) \in PL$  wenn  $A, B \in PL$

(PL5)  $(A \rightarrow B) \in PL$  wenn  $A, B \in PL$

(PL6)  $(\forall x)A \in PL$  wenn  $x \in V$  und  $A \in PL$

(PL7)  $(\exists x)A \in PL$  wenn  $x \in V$  und  $A \in PL$

Klammern können entfallen, sofern dadurch der Wirkungsbereich von Prädikaten- und Funktionssymbolen ersichtlich bleibt.

# Teilformeln

Teilausdrücke von Formeln die selbst auch Formeln sind, nennen wir **Teilformeln**:

- Ist  $A \in PL$  dann ist  $A$  Teilformel von  $A$
- Ist  $A = (B \circ C)$  für  $\circ \in \{ \wedge, \vee, \rightarrow \}$  dann sind  $B$  und  $C$  Teilformeln von  $A$
- Ist  $A = \neg B$ , dann ist  $B$  Teilformel von  $A$
- Ist  $A = (Qx)B$  für  $Q \in \{ \forall, \exists \}$  und ist  $x \in V$ , dann ist  $B$  Teilformel von  $A$
- Ist  $A$  Teilformel von  $B$  und  $B$  Teilformel von  $C$ , so ist auch  $A$  Teilformel von  $C$  (transitiver Abschluss)

# freie und gebundene Variablen

Eine Variable kann in einer Formel frei oder gebunden vorkommen:

Eine Variable heisst **gebunden**, wenn sie in einer Teilformel der Form  $(\exists x) A$  oder  $(\forall x) A$  vorkommt. Eine Variable die nicht gebunden ist, ist **frei**.

*Beispiel:*

$$(\forall x) (\exists y) R(x, y, z)$$

gebundene Variablen:  $x, y$

freie Variable:  $z$

# freie und gebundene Variablen

Formal kann jeder Formel  $A$  eine Menge der in  $A$  frei vorkommenden Variablen  $FV(A)$  zugeordnet werden:

$t$  Term,  $V(t)$  Menge der in  $t$  vorkommenden Variablen

- Ist  $A$  Atomformel, so ist  $FV(A) = V(t_1) \cup \dots \cup V(t_2)$
- $FV(\neg A) = FV(A)$
- $FV(A \circ B) = FV(A) \cup FV(B)$  für  $\circ \in \{ \wedge, \vee, \rightarrow \}$
- $FV((Qx)A) = FV(A) - \{x\}$  für  $Q \in \{ \forall, \exists \}$

$x \in FV(A)$ :  $x$  kommt in  $A$  **frei** vor

$x$  kommt in  $A$  **gebunden** vor, wenn es eine Teilformel  $(Qx)B$  von  $A$  mit  $Q \in \{ \forall, \exists \}$  gibt.

$FV(A) = \{ \}$  so heisst  $A$  **geschlossen**.

# Substitution

Sei  $x \in V$  und  $t \in T$ . Wir schreiben  $A(x/t)$  für jene Formel, welche aus  $A$  entsteht indem alle **freien Vorkommen von  $x$**  in  $A$  durch  $t$  ersetzt werden.

*Beispiel:*

$A = (\forall x)(P(x,y) \rightarrow Q(x,y)) \wedge R(x)$  und  $t = f(a)$

Dann ist

$A(\mathbf{x}/t) = (\forall x)(P(x,y) \rightarrow Q(x,y)) \wedge R(\mathbf{f(a)})$   
nur die freien Vorkommen von  $x$  werden ersetzt!

$A(\mathbf{y}/t) = (\forall x)(P(x, \mathbf{f(a)}) \rightarrow Q(x, \mathbf{f(a)})) \wedge R(x)$

# Signatur

Oft ist es zweckmäßig, Konstanten-, Funktions- und Prädikatensymbole auf deren Vorkommen in bestimmten Formeln zu beschränken:

$FS(F)$  Menge der Funktionssymbole in  $F$  (Analog:  $KS(F)$ ,  $PS(F)$ )

**Signatur** von  $F$ :

$$\Sigma(F) = FS(F) \cup KS(F) \cup PS(F)$$

$PL[F]$  PL-Formeln über  $\Sigma(F)$

$T[F]$  Terme über  $\Sigma(F)$

Beispiel:

$F = P(f(x,a)) \quad \Sigma(F) = \{P, f, a\}$

$(\exists y)(\forall x) (P(x) \rightarrow P(f(y,x))) \in PL[F]$

$P(a) \vee P(a,a) \in PL[F]$

$P(b), Q(x,y) \notin PL[F]$

# Beispiel

Die Sprache PL ist ausdrucksstark genug, um mathematische Sätze zu formalisieren:

Beispiel: Einfaches Axiomensystem für + und <:

- |  |   |
|--|---|
| (1) $x \not< x$                              | Wir wählen P für <, a für 0, b für 1 und f für +:                                       |
| (2) $(x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z$ | (1') $(\forall x) \neg P(x, x)$   |
| (3) $x < y \rightarrow x + z < y + z$        | (2') $(\forall x)(\forall y)(\forall z) ((P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow P(x, z))$ |
| (4) $x < y \rightarrow z + x < z + y$        | (3') $(\forall x)(\forall y)(\forall z) (P(x, y) \rightarrow P(f(x, z), f(y, z)))$      |
| (5) $0 < 1$                                  | (4') $(\forall x)(\forall y)(\forall z) (P(x, y) \rightarrow P(f(z, x), f(z, y)))$      |
|  | (5') $P(a, b)$  |

Konklusion (K):

$$((1+1)+0)+1 < ((1+1)+1)+1 \quad (K') \quad P(f(f(f(b, b), a), b), f(f(f(b, b), b), b))$$

Die Aussage „aus (1) bis (5) folgt (K)“ kann man dann durch folgende Formel ausdrücken:

$$F: ((1') \wedge \dots \wedge (5')) \rightarrow K'$$

# Interpretation

Interpretation einer Formel  $F$  in PL:

$M = (D, \Phi, I)$  wobei

$D$  nichtleere Menge, Bereich (domain) von  $M$

$\Phi$  Abbildung mit Definitionsbereich  $\Sigma(F)$ , sodass gilt:

1.  $\Phi(c) \in D$  für  $c \in KS(F)$
2.  $\Phi(f)$  Funktion vom Typ  $D^n \rightarrow D$  für  $f \in FS_n(F)$
3.  $\Phi(P)$  Funktion vom Typ  $D^n \rightarrow \{ \mathbf{t}, \mathbf{f} \}$  für  $P \in PS_n(F)$   
für  $n=0$ :  $\Phi(t) = \mathbf{t}$   $\Phi(f) = \mathbf{f}$

$I: V \rightarrow D$  Variablenumgebung (environment)

$M$  ist durch die darin enthaltenen Mengen und Funktionen eindeutig bestimmt. Entgegen den Interpretationen in der AL, wo den (Aussagen-) Variablen Wahrheitswerte zugeordnet werden, werden in der Prädikatenlogik den (Individuen-) Variablen Elemente des Grundbereichs zugeordnet. Die Auswertung von Termen und Formeln erfolgt durch Evaluationsfunktionen, die auf der Basis von  $M$  definiert werden.



# Semantik der Terme

$F \in PL$  ,  $T[F]$  Menge aller Terme über  $\Sigma(F)$

Ist  $M = (D, \Phi, I)$  eine Interpretation von  $F$ , so definieren wir  
 $M_T: T[F] \rightarrow D$

(T1S)  $M_T(x) = I(x)$  für  $x \in V$

(T2S)  $M_T(c) = \Phi(c)$  für  $c \in KS(F)$

(T3S)  $M_T(f(t_1, \dots, t_n)) = \Phi(f)(M_T(t_1), \dots, M_T(t_n))$   
für alle Terme  $f(t_1, \dots, t_n) \in T[F]$

## Beispiel

$$F = P(x) \rightarrow P(f(x,x)) \quad \Sigma(F) = \{ P, f \} \quad M = (\mathbf{N}, \Phi, I)$$

$$\Phi(f) = + \quad \Phi(P) = \text{„gerade“}$$

$$I(x) = 0 \text{ und } I(v)=1 \text{ für alle } v \in V - \{x\}$$

Intuitive Bedeutung von  $F$  unter  $M$ : Ist  $x$  gerade, dann auch  $x+x$

---

Der Term  $t = f(x, f(x, y))$  ist in  $T[F]$ ; „Wert“ von  $t$  unter

$$\Phi(f) = +$$

$$I(x) = 0 \text{ und } I(v)=1 \text{ für alle } v \in V - \{x\}$$

$$\begin{aligned} M_T(f(x, f(x, y))) &= M_T(x) + M_T(f(x, y)) = I(x) + M_T(x) + M_T(y) = \\ &= 0 + I(x) + I(y) = 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

Natürlich erhält  $t$  unter anderen Variablenumgebungen i.a. einen anderen Wert.

# Äquivalenz von Interpretationen

Interpretationen, die sich höchstens in der Variablenumgebung unterscheiden, nennt man äquivalent.

Zwei Interpretationen  $M, N$  einer Formel  $F$  heißen äquivalent modulo  $x_1, \dots, x_k$

$$(M \sim N \text{ mod } x_1, \dots, x_k)$$

wenn es  $D, \Phi, I, J$  gibt mit

$$M = (D, \Phi, I), N = (D, \Phi, J) \text{ und } I(v) = J(v) \text{ für } v \in V - \{x_1, \dots, x_k\}$$

Ist  $M$  äquivalent zu  $N$  modulo  $x$ , schreiben wir auch  $M \sim_x N$

$$M_x^* = \{ N \mid N \sim_x M \}$$

# Prädikatenlogik - Semantik

$F \in \text{PL}$  ,  $M = (D, \Phi, I)$

Ist  $M$  eine Interpretation von  $F$ , so definieren wir

$$v_M: \text{PL}[F] \rightarrow \{ \mathbf{t}, \mathbf{f} \}$$

$$(\text{PLS1}) v_M (P(t_1, \dots, t_n)) = \Phi(P)(M_T(t_1), \dots, M_T(t_n))$$

$$(\text{PLS2}) v_M ((A \wedge B)) = v_M (A) \wedge v_M (B)$$

$$(\text{PLS3}) v_M ((A \vee B)) = v_M (A) \vee v_M (B)$$

$$(\text{PLS4}) v_M ((A \rightarrow B)) = v_M (A) \rightarrow v_M (B)$$

$$(\text{PLS5}) v_M (\neg A) = \neg v_M (A)$$

$$(\text{PLS6}) v_M ((\forall x) A) = \mathbf{t} \text{ genau dann, wenn}$$

für alle  $N$  mit  $N \sim_x M$  gilt:  $v_N (A) = \mathbf{t}$

$$(\text{PLS7}) v_M ((\exists x) A) = \mathbf{t} \text{ genau dann, wenn}$$

ein  $N$  mit  $N \sim_x M$  existiert mit  $v_N (A) = \mathbf{t}$

# Gültigkeit und Erfüllbarkeit

Eine Interpretation  $M$  von  $F$  heisst **Modell** von  $F$ , wenn  $v_M(F) = \mathbf{t}$  gilt.

Eine Formel  $F$  aus PL heisst **gültig**, wenn jede Interpretation von  $F$  ein Modell ist.

Eine Formel heisst **erfüllbar**, wenn sie ein Modell besitzt.

Zwei Formeln  $F, G$  aus PL heissen **logisch äquivalent** ( $F \sim G$ ) wenn für alle Interpretationen  $M$  von  $(F \wedge G)$  gilt:  
 $v_M(F) = v_M(G)$

Zwei Formeln  $F, G$  aus PL heissen **erfüllungsäquivalent** ( $F \sim_e G$ ) wenn gilt:  $F$  erfüllbar  $\Leftrightarrow G$  erfüllbar.

## Beispiele

$(\forall x) (P(x,a) \vee \neg P(x,a))$ $(\forall x) (\forall y) P(x,y) \rightarrow P(a,b)$ $(\forall x) P(x) \rightarrow (\exists y) P(y)$	} gültige Formeln
$(\exists y) P(y) \rightarrow Q(y)$ $(\forall x) (P(x,a) \vee \neg P(a,x))$	} erfüllbar, aber nicht gültig
$(\exists y) P(y) \rightarrow Q(y)$ $\neg(\forall y) \neg (P(y) \vee Q(y))$	} logisch äquivalent
$(\exists y) P(y) \rightarrow Q(y)$ $(\exists y) Q(y) \rightarrow P(y)$	} nicht logisch äquivalent
$(\exists y) P(y) \rightarrow Q(y)$ $P(a) \rightarrow Q(a)$	} erfüllungsäquivalent
$(\forall x) (P(x,a) \wedge \neg P(a,b))$ $(\forall x) (P(x,a) \wedge \neg P(b,a))$	} nicht erfüllungsäquivalent

# Gültigkeit und Erfüllbarkeit

$F$  ist genau dann gültig, wenn  $\neg F$  unerfüllbar ist.

Sind  $F$  und  $\neg F$  beide erfüllbar, so ist  $F$  nicht gültig.

$F \sim G$  gilt genau dann, wenn  $(F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$  gültig ist.

$F \sim G$  impliziert  $F \sim_e G$

# Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik

Im Gegensatz zur Aussagenlogik ist das Gültigkeitsproblem der Prädikatenlogik **algorithmisch unentscheidbar**: das bedeutet, es existiert kein Algorithmus, der, bei Eingabe einer beliebigen prädikatenlogischen Formel  $A$  feststellt, ob  $A$  gültig ist oder nicht. Dagegen existiert ein **algorithmisches Aufzählungsverfahren** für die gültigen Formeln in  $P$ :

Es existieren Verfahren zur Bestätigung der Gültigkeit gültiger Formeln. Dagegen existiert aber kein Verfahren, das stets terminiert und die Ungültigkeit aller ungültigen PL-Formeln feststellen kann.



# Nachweis der Gültigkeit von Formeln

Aussagenlogik:

- a) Überprüfung, ob  $A$  unter allen aussagenlogischen Interpretationen zu  $\mathbf{t}$  evaluiert
- b) Ableitung von  $A$  in einem aussagenlogischen Inferenzsystem (z.B. Sequentialkalkül)

Prädikatenlogik:

- a) scheidet aus: Denn ein  $A$  aus PL ist gültig, wenn für alle Interpretationen  $M \models_M (A) = \mathbf{t}$  gilt. Eine direkte Überprüfung dieser Eigenschaft ist allerdings unmöglich, da es unendlich viele Interpretationen  $M$  von  $A$  gibt. Es folgt daraus, dass eine allgemeine Methode zum Nachweis der Gültigkeit prädikatenlogischer Formeln notwendigerweise auf Prinzipien der Inferenz beruhen muss.