

# verallgemeinerte Konsequenzrelation

$\Gamma, \Delta \dots$  Endliche Mengen von Formeln  
( $\Gamma = \{F_1, \dots, F_m\}$  ,  $\Delta = \{G_1, \dots, G_n\}$  )

$\Gamma \models \Delta$  wenn für alle Interpretationen gilt:  
jede Formel in  $\Gamma$  und mindestens eine Formel in  $\Delta$  ist **t**.  
(gleichbedeutend mit:  
mind. eine Formel in  $\Gamma$  ist **f** oder mind. eine Formel in  $\Delta$  ist **t**)

## Randfälle:

$\{F\} \models \{\}$  gilt genau dann wenn  $F$  unerfüllbar ist

$\{\} \models \{G\}$  gilt genau dann wenn  $G$  gültig (Tautologie) ist

Zusammenhang zwischen semantischem Begriff der verallgemeinerten Konsequenzrelation und syntaktischer Formelebene:

$F_1, \dots, F_m \models G_1, \dots, G_n$  gilt genau dann, wenn  
 $F_1 \wedge \dots \wedge F_m \rightarrow G_1 \vee \dots \vee G_n$  gültig ist.

# verallgemeinerte Konsequenzrelation

*Problem:* Berechnung der Konsequenzrelation  
d.h. gegeben  $\Gamma$  und  $\Delta$ , gilt  $\Gamma \models \Delta$ ?

Mögliche Lösung:

Sämtliche Belegungen der in  $\Gamma$  und  $\Delta$  vorkommenden Variablen ausprobieren und überprüfen, ob in jeder entweder eine Formel in  $\Gamma$  falsch oder eine in  $\Delta$  wahr ist.

Andere Lösung:

Semantischen Beweis durch syntaktische Ableitung (induktive Definition einer binären Ableitungsrelation  $\vdash$ ) ersetzen.

# Logische Kalküle

Kalkül: Regelsystem um Aussagen zu beweisen / widerlegen

Keine Bezugnahme auf Semantik

Nur syntaktische Manipulation von Formeln

Notwendige Eigenschaft logischer Kalküle:

**Korrektheit:** Kalkül beweist nur wahre Aussagen  
(widerlegt nur falsche Aussagen)

Manche Kalküle sind darüber hinaus auch **vollständig**:  
Jede wahre Aussage ist im Kalkül beweisbar  
(jede falsche Aussage ist im Kalkül widerlegbar).

# Hilbert-Typ Kalkül

Axiome:

1.  $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$
2.  $((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$
3.  $(A \rightarrow (A \vee B))$
4.  $(B \rightarrow (A \vee B))$
5.  $((A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)))$
6.  $(A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)))$
7.  $((A \wedge B) \rightarrow A)$
8.  $((A \wedge B) \rightarrow B)$
9.  $((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A))$

Regel (Modus Ponens):

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$$

# Hilbert-Typ Kalkül

Beispiel: Ableitung von  $A \rightarrow A$

$$\begin{array}{c} \text{Axiom1 (B:=(A} \rightarrow \text{A))} \qquad \qquad \qquad \text{Axiom2 (B:=(A} \rightarrow \text{A), C:=A )} \\ \text{Axiom1 (B:=A)} \quad \underline{A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)} \quad \underline{(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))} \\ \underline{A \rightarrow (A \rightarrow A)} \quad \underline{(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)} \\ A \rightarrow A \end{array}$$

Eigenschaften des Hilbert-Typ Kalküls:

- viele Axiome, **eine einzige Regel (modus ponens)**
- *Korrektheit*: jede ableitbare Formel ist gültig
- *Vollständigkeit*: jede gültige Formel ist ableitbar
- *schwer automatisierbar*
- *Komplizierte Beweise* auch von einfachen Formeln

# Sequentialkalkül

Gerhard Gentzen (1909-1945)



1935: Untersuchungen über das logische Schließen.  
Mathematische Zeitschrift 39 (1933), 176-210.

# Sequentialkalkül

Basisfälle: Axiome

$\Gamma \vdash \Delta$       **Sequent**       $(F_1, \dots, F_m \vdash G_1, \dots, G_n$   
(meint:  $F_1 \wedge \dots \wedge F_m \rightarrow G_1 \vee \dots \vee G_n$ )

Ein Sequent ist genau dann Axiom, wenn  $\Gamma \cap \Delta \neq \{\}$

(weil dann  $F_1 \wedge \dots \wedge F_m \rightarrow G_1 \vee \dots \vee G_n$  eine Tautologie ist).

**Schreibweise:**

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma' \vdash \Delta'} x$$

(x) wenn  $(\Gamma, \Delta) \in \vdash$ ,  
dann  $(\Gamma', \Delta') \in \vdash$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta \quad \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma'' \vdash \Delta''} x$$

(x) wenn  $(\Gamma, \Delta) \in \vdash$  und  $(\Gamma', \Delta') \in \vdash$ ,  
dann  $(\Gamma'', \Delta'') \in \vdash$

$\Gamma, A$       ist zu lesen als  $\Gamma \cup \{A\}$

# Sequentialkalkül: Regeln

$\Gamma, A \vdash \Delta, A$  **Axiome** (d.h.  $\Gamma' \vdash \Delta'$  ist Axiom, falls  $\Gamma' \cap \Delta' \neq \{\}$  )

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee\text{-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \vee\text{-r}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \wedge\text{-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \wedge\text{-r}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} \rightarrow\text{-l}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \rightarrow B} \rightarrow\text{-r}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg\text{-l}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \neg\text{-r}$$



# Sequentialkalkül: Beispiele 1

Ableitung von  $\vdash ((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$

$$\begin{array}{c} \text{Axiom} \qquad \text{Axiom} \\ A \vdash A, B \quad B, A \vdash B \\ \hline A \rightarrow B, A \vdash B \quad \rightarrow\text{-I} \\ \hline (A \rightarrow B) \wedge A \vdash B \quad \wedge\text{-I} \\ \hline \vdash ((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B \quad \rightarrow\text{-r} \end{array}$$

Ableitung von  $(A \vee B) \wedge \neg A \vdash B$

$$\begin{array}{c} \text{Axiom} \\ A \vdash A, B \\ \hline A, \neg A \vdash B \quad \neg\text{-I} \\ \text{Axiom} \\ B, \neg A \vdash B \\ \hline A \vee B, \neg A \vdash B \quad \vee\text{-I} \\ \hline (A \vee B) \wedge \neg A \vdash B \quad \wedge\text{-I} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{Axiom} \qquad \text{Axiom} \\ A \vdash A, B \quad B \vdash A, B \\ \hline A \vee B \vdash A, B \quad \vee\text{-I} \\ \hline A \vee B, \neg A \vdash B \quad \neg\text{-I} \\ \hline (A \vee B) \wedge \neg A \vdash B \quad \wedge\text{-I} \end{array}$$

## Sequentialkalkül: Beobachtungen

Jede Ableitung ist ein Baum (von unten nach oben zu lesen) von Sequenten, dessen Blätter Axiome sind.

Die anderen Knoten (d.h. Sequenten) des Baums erfüllen folgende Bedingung:

Die (ein oder zwei) Kindknoten zu jedem Elternknoten sind die Prämissen einer Regelanwendung, die zum Elternknoten als Konklusion führt.

$$\frac{\text{Prämisse}}{\text{Konklusion}}$$
$$\frac{\text{Prämisse1} \quad \text{Prämisse2}}{\text{Konklusion}}$$

## Sequentialkalkül: Beispiele 2

Ableitung von  $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \vee \neg(A \rightarrow (B \rightarrow C))$

$$\frac{\frac{\text{Axiom}}{A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)} \neg\text{-r}}{\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)), \neg(A \rightarrow (B \rightarrow C))} \vee\text{-r}$$

Bemerkung:

Axiome müssen nicht nur aus Variablen bestehen!

## Sequentialkalkül: Korrektheit

Der Sequentialkalkül ist korrekt: aus  $\Gamma \vdash \Delta$  folgt  $\Gamma \models \Delta$ .

Beweisidee:

die Relationen  $\vdash$  und  $\models$  können als Mengen jener Paare  $(\Gamma, \Delta)$  aufgefasst werden, für die  $\Gamma \vdash \Delta$  bzw.  $\Gamma \models \Delta$  gilt.

Man muss also zeigen, dass  $\vdash \subseteq \models$  gilt. Nachdem  $\vdash$  induktiv definiert ist, ist nachzuweisen, dass

1.  $\Gamma \models \Delta$  für jedes Axiom  $\Gamma \vdash \Delta$  gilt
2.  $\models$  abgeschlossen gegenüber Eigenschaften von  $\vdash$  ist.

## Sequentialkalkül: Beispiele 3

Ableitungsversuch für  $A \rightarrow B, A, C \vdash C \wedge \neg B$

$$\frac{\frac{\text{Axiom}}{A \rightarrow B, A, C \vdash C} \quad \frac{\frac{\text{Axiom}}{A, C, B \vdash A} \quad \frac{\text{KEIN Axiom!}}{A, C, B \vdash} \rightarrow -i}{A \rightarrow B, A, C, B \vdash} \rightarrow -i}{A \rightarrow B, A, C \vdash \neg B} \neg -r}{A \rightarrow B, A, C \vdash C \wedge \neg B} \wedge -r$$

## Sequentialkalkül: Beobachtungen und weitere Def.

Ein Sequent  $\Gamma \vdash \Delta$  ist sicher nicht ableitbar, wenn  $\Gamma$  und  $\Delta$  nur mehr atomare Formeln enthalten und  $\Gamma \cap \Delta = \{\}$  (**Anti-Axiom**)

Ein **Ableitungsversuch** von  $\Gamma \vdash \Delta$  ist ein Baum von Sequenten mit Wurzel  $\Gamma \vdash \Delta$ .

Die Blätter sind Axiome oder Anti-Axiome.

Die anderen Sequenten sind jeweils Prämissen zu einer Regelanwendung, deren Konklusion der entsprechende Elternknoten ist.

Endet ein Zweig eines Ableitungsversuchs von  $\Gamma \vdash \Delta$  mit einem Anti-Axiom, dann sagen wir:

Der **Ableitungsversuch scheitert**.

(Ein gelungener Ableitungsversuch ist eine Ableitung.)

# Sequentalkalkül: Grundlage der Vollständigkeit

Scheitert ein Ableitungsversuch von  $\Gamma \vdash \Delta$ , dann gilt  $\Gamma \not\models \Delta$ .

Beweisidee:

$\Gamma \not\models \Delta$  bedeutet laut Definition von  $\models$ , dass es eine Interpretation gibt, in der alle Formeln in  $\Gamma$  zu **t** und alle Formeln in  $\Delta$  zu **f** evaluieren. Die Existenz eines derartigen **Gegenbeispiels** aus dem gescheiterten Ableitungsversuch kann mittels Induktion nach der Länge des (gescheiterten) Ableitungsversuchs nachgewiesen werden.

## Sequentialkalkül: Folgerungen

Scheitert ein Ableitungsversuch von  $\Gamma \vdash \Delta$  (d.h. ein Zweig endet in einem Anti-Axiom), dann scheitern alle Ableitungsversuche (d.h. es gilt  $\Gamma \not\vdash \Delta$ )

Beweis: Endet ein Ableitungszweig von  $\Gamma \vdash \Delta$  mit einem Anti-Axiom, gilt  $\Gamma \not\vdash \Delta$ . Wegen der Korrektheit des Sequentialkalküls folgt daraus  $\Gamma \not\vdash \Delta$ .

**Der (aussagenlogische) Sequentialkalkül ist vollständig:**

Aus  $\Gamma \models \Delta$  folgt  $\Gamma \vdash \Delta$ .

Beweis: Aus dem vorigen Satz ergibt sich, dass aus  $\Gamma \vdash \Delta$  folgt, es kann keinen Ableitungsversuch von  $\Gamma \vdash \Delta$  geben, der scheitert.

$\vdash = \models$

Beweis: Aus Korrektheit ( $\vdash \subseteq \models$ ) und Vollständigkeit ( $\vdash \supseteq \models$ ) folgt  $\vdash = \models$ .

$\{\} \vdash F$  gilt genau dann, wenn  $F$  Tautologie ist.



# Sequentialkalkül: Eigenschaften

- Einfache Axiome, viele Regeln (den Wahrheitstafeln folgend).
- *Korrektheit*: Aus  $\Gamma \vdash \Delta$  folgt  $\Gamma \models \Delta$ .
- *Vollständigkeit*: Aus  $\Gamma \models \Delta$  folgt  $\Gamma \vdash \Delta$ .
- „*Don't-care-Nondeterminismus*“: Wenn  $\Gamma \vdash \Delta$  gilt, führt jede Zerlegung zu Axiomen.
- *Analytizität*: Die Prämissen bestehen aus Bestandteilen der Konklusion (wichtig für automatische Beweissuche).
- Einfache Formeln haben einfache Beweise.

# Resolution

Indirekter Beweis der Gültigkeit einer Formel  $F$ :

Gültigkeit von  $F$  wird gezeigt durch Widerlegung von  $\neg F$   
(d.h. die Unerfüllbarkeit von  $\neg F$  wird nachgewiesen)

Resolutionsableitungen beziehen sich auf Klauselmengen (KNF), daher 2 Stufen:

1. Transformation von  $\neg F$  in eine äquivalente Klauselmenge (d.h. KNF von  $\neg F$ )
2. Anwendung der Resolutionsregel um schrittweise neue Klauseln abzuleiten. Ein Widerspruch ist gefunden, wenn die leere Klausel ableitbar ist.

# Resolution: Klauselformberechnung

Nachweis von Behauptungen der Form

$$F_1, \dots, F_n \models G$$

Wegen Deduktionstheorem gleichbedeutend mit der Gültigkeit der Formel

$$(F_1 \wedge \dots \wedge F_n) \rightarrow G$$

Bzw. der Unerfüllbarkeit der Formel

$$\begin{aligned} & \neg((F_1 \wedge \dots \wedge F_n) \rightarrow G) \\ &= \neg(\neg(F_1 \wedge \dots \wedge F_n) \vee G) \\ &= \neg\neg(F_1 \wedge \dots \wedge F_n) \wedge \neg G \\ &= F_1 \wedge \dots \wedge F_n \wedge \neg G \end{aligned}$$

Grobstruktur ist also bereits in KNF

Daher: Jedes  $F_i$  und  $G$  in KNF umformen,  
resultierende Klauselmengen vereinigen.

# Resolution: Resolutionsregel

Seien  $C$  und  $D$  Klauseln, die duale Literale enthalten,  
d.h.  $C = C' \cup \{A\}$  und  $D = \{\neg A\} \cup D'$

wobei  $C' \cap \{A\} = \{\neg A\} \cap D' = \{\}$

**Resolutionsregel** zur Ableitung neuer Klauseln:

$$\frac{C' \cup \{A\} \quad \{\neg A\} \cup D'}{C' \cup D'}$$

$C' \cup D'$  heisst **Resolvente** der (Eltern-)Klauseln  $C$  und  $D$ .  
 $A$  nennt man auch **resolviertes Atom**.

# Resolution: Resolutionsableitung

Sei  $\Pi$  eine Klauselmenge

Eine **(Resolutions-)Ableitung** von  $K_m$  aus  $\Pi$  ist eine Folge von Klauseln

$$K_1, \dots, K_m$$

sodass für alle  $1 \leq l \leq m$

- entweder  $K_l \in \Pi$  oder
- $K_l$  ist eine Resolvente von  $K_i$  und  $K_j$  mit  $i, j < l$

## Resolutionsableitung: Beispiel

Ableitung von  $\{C\}$  aus der Klauselmenge

$$\Pi = \{ \{A, B, \neg C\}, \{\neg B, \neg C\}, \{\neg A\}, \{C, A\}, \{A, D\} \}$$

1.  $\{A, B, \neg C\} \in \Pi$
2.  $\{\neg B, \neg C\} \in \Pi$
3.  $\{A, \neg C\}$       Resolvente von 1 und 2
4.  $\{\neg A\} \in \Pi$
5.  $\{\neg C\}$       Resolvente von 3 und 4
6.  $\{C, A\} \in \Pi$
7.  $\{C\}$       Resolvente von 4 und 6

# Resolution: Korrektheit und Vollständigkeit

Resolution ist korrekt:

Ist eine Klausel  $D$  aus  $\Pi$  ableitbar, dann  $\Pi \models D$ .

Beweisidee: Es genügt zu zeigen, dass die Resolutionsregel korrekt ist, d.h. jedes Modell der Klauseln  $C$  und  $D$  ist auch ein Modell ihrer Resolventen.

Resolution ist vollständig:

Wenn  $\Pi \models D$ , dann ist  $D$  entweder eine Tautologie oder es ist ein  $D'$  aus  $\Pi$  ableitbar mit  $D' \subseteq D$

Es ist in endlich vielen Schritten entscheidbar, ob eine Klausel  $D$  aus  $\Pi$  ableitbar ist oder nicht.

Beweisidee: Die Resolutionsregel führt keine neuen Variablen ein, und die Anzahl verschiedener Literale in  $\Pi$  ist endlich. Daher lassen sich alle verschiedenen Ableitungen aus  $\Pi$ , in denen sich keine Klausel wiederholt, auch systematisch in endlich vielen Schritten aufzählen. Es bleibt nur festzustellen, ob  $D$  als letzte Klausel einer dieser Ableitungen vorkommt.

## Resolution: Widerlegungsvollständigkeit

Eine Ableitung der leeren Klausel  $\{\}$  aus  $\Pi$  heisst **Resolutionswiderlegung** von  $\Pi$ .

Eine Klauselmeng  $\Pi$  ist unerfüllbar genau dann, wenn es eine Resolutionswiderlegung von  $\Pi$  gibt.

Beweis:

1. Die leere Klausel ist unerfüllbar. Daher folgt aus der Korrektheit:  $\Pi$  hat auch kein Modell.
2. Wenn  $\Pi$  unerfüllbar ist, so ist jede Klausel eine Konsequenz von  $\Pi$ , insbesondere auch  $\{\}$ .  
Da  $\{\}$  keine Tautologie ist und auch keine Teilmengen besitzt, folgt aus der Vollständigkeit, dass  $\{\}$  aus  $\Pi$  ableitbar ist.



## Resolution: Beispiel

Zeigen Sie, dass  $A \vee B \vee D, B \rightarrow C, A \rightarrow B \models C \vee D$

Es ist also die Unerfüllbarkeit von  
 $\neg (((A \vee B \vee D) \wedge (B \rightarrow C) \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow (C \vee D))$  zu zeigen.

Umformung ergibt folgende Klauselmenge:

$$\Pi = \{ \{A, B, D\}, \{\neg B, C\}, \{\neg A, B\}, \{\neg C\}, \{\neg D\} \}$$

Resolutionswiderlegung:

- |                    |           |                 |         |
|--------------------|-----------|-----------------|---------|
| 1. $\{A, B, D\}$   | $\in \Pi$ | 6. $\{B, D\}$   | aus 1,3 |
| 2. $\{\neg B, C\}$ | $\in \Pi$ | 7. $\{\neg B\}$ | aus 2,4 |
| 3. $\{\neg A, B\}$ | $\in \Pi$ | 8. $\{D\}$      | aus 6,7 |
| 4. $\{\neg C\}$    | $\in \Pi$ | 9. $\{\}$       | aus 8,5 |
| 5. $\{\neg D\}$    | $\in \Pi$ |                 |         |

## Resolution: Beispiel

Resolutionswiderlegung:

- |                    |           |                 |         |
|--------------------|-----------|-----------------|---------|
| 1. $\{A, B, D\}$   | $\in \Pi$ | 6. $\{B, D\}$   | aus 1,3 |
| 2. $\{\neg B, C\}$ | $\in \Pi$ | 7. $\{\neg B\}$ | aus 2,4 |
| 3. $\{\neg A, B\}$ | $\in \Pi$ | 8. $\{D\}$      | aus 6,7 |
| 4. $\{\neg C\}$    | $\in \Pi$ | 9. $\{\}$       | aus 8,5 |
| 5. $\{\neg D\}$    | $\in \Pi$ |                 |         |

Resolutionswiderlegung in Baumform

$$\begin{array}{c} \frac{\frac{\{A, B, D\} \quad \{\neg A, B\}}{\{B, D\}} \quad \frac{\{\neg B, C\} \quad \{\neg C\}}{\{\neg B\}} \\ \frac{\{D\} \quad \{\neg D\}}{\{\}} \end{array}$$

An den **Blättern** stehen nur Klauseln aus  $\Pi$ .

# Resolution: Redundanzelimination

## Subsumption:

Wenn  $C \subseteq D$  sagt man: C subsumiert D

Subsumiert in einer Ableitung eine Klausel eine vorhergehende oder nachfolgende, muss die subsumierte in der weiteren Ableitung nicht berücksichtigt werden.

Beispiel: Klauseln  $\{S, R\}$ ,  $\{P, \neg S\}$ ,  $\{P, Q, R\}$

$\{S, R\}$      $\{P, \neg S\}$

$\{P, R\}$

$\{P, R\}$  subsumiert  $\{P, Q, R\}$

Nachdem jede Klausel eine Disjunktion ist, ist in jeder Interpretation, in der  $\{P, R\}$  erfüllbar ist, auch  $\{P, Q, R\}$  erfüllbar.

## Tautologieelimination:

Eine Klausel C ist eine Tautologie genau dann, wenn

$\{\neg A, A\} \subseteq C$ . Tautologien können immer eliminiert werden, da aus Tautologien wieder nur Tautologien oder von Elternklauseln subsumierte Klauseln ableitbar sind.

# Resolution: Heuristiken und Strategien

Klauseln mit nur einem Literal heissen **Einerklauseln** (oder **Unit-Klauseln**)

$$\frac{C' \cup \{A\} \quad \{\neg A\}}{C'} \qquad \frac{\{A\} \quad \{\neg A\} \cup D'}{D'}$$

Resolution mit einer Einerklausel (**Unitresolution**) garantiert also eine kleinere Klausel als Resolvente.

Ausserdem subsumiert jede Unit-Resolvente eine Elternklausel, die dann redundant wird.

Generell ist „Bevorzugung von kürzeren Klauseln“ eine gute Heuristik.

# Eigenschaften des Resolutions-Kalküls

- *Basisobjekte*: Klauseln
- *Zweistufiges Verfahren*: KNF-Transformation + Resolution
- *Indirektes Verfahren*: Suche nach Widerlegung
- *Korrektheit*: Jede aus  $\Pi$  ableitbare Klausel ist Konsequenz von  $\Pi$ .
- *Vollständigkeit*: Relevant nur Widerlegungsvollständigkeit:  
Aus unerfüllbaren Klauselmengen ist die leere Klausel ableitbar.
- Keine Axiome, **eine** einfache Regel  
(daher gut automatisierbar).
- In der Praxis sind diverse (Beweis-)Strategien und Redundanzeliminationen von großer Bedeutung.