

Systemanalyse Modellbildung und Simulation VO

(502.256 SS-2007)
Prof. Karch
Fragenkatalog
(Erarbeitet von Schoaf)

- **Was ist ein System?**

Eine Menge von Systemkomponenten zwischen denen Relationen bestehen. + Systemgrenze.
Die Menge der Beziehungen definiert die Struktur des Systems.

Es gibt: Isolierte- (Ideal), geschlossene- (Energie), offene Systeme (Energie und Materie)

Es gibt: Eingangs-, Ausgangs- und Zustandsgrößen (beschreiben den SysZustand zu jedem Zeitpunkt vollständig und sind Unabhängig und Minimal)

- **Was ist ein Modell?**

Eine vereinfachte Darstellung eines Systems um es: besser zu verstehen, zu kontrollieren od. vorherzusagen. Jedes Modell ist nur eine beschränkt gültige Abbildung der Realität.

- **Physiologische Systeme?**

Physiologische Systeme sind überwiegend komplexe, offene, hierarchisch organisierte, mehr oder weniger zeitvariante Systeme.

- **Simulation**

Nachbildung des dynamischen Verhaltens eines Systems mit Hilfe von Modellen.

Vorteile der Computersimulation:

- einheitliche Methodik (wieder verwendbar)
- Kosten (meist günstiger)
- zeitlicher Ablauf kann verkürzt und gedehnt werden
- keine Auswirkungen auf die Realität

- **6 wichtigsten Schritte der Modellbildung?**

Analyse (Zerlegung des Gesamtsystems in hinreichend aufgeklärte Teilsysteme) →

Festlegung des Zwecks (z.B.: Überprüfung von Hypothese - Darstellung von nicht direkt beobachtbarem - Einschränkung von Tierversuchen - Darstellung pathophysiologischen Verhaltens) →

Reduzierung (Entkopplung von anderen Systemen, Betrachtungstiefe reduzieren, Linearisieren, Zeitabhängigkeit, Konstantsetzen von Variablen) →

Math. Beschreibung (formale Beschreibung des Systems) →

Simulation (Implementierung und Verifikation in: gängigen Programmiersprachen, ProblemSolvingEnvironments oder speziellen Simulationspaketen) →

Identifikation (Struktur- und Parameteridentifikation durch Vergleich mit Realität) →

Validierung (Empirische Gültigkeitsprüfung, Sensitivitätsanalyse)

- **Linear / nicht Linear?**

Ein System ist Linear wenn für eine beliebige Kombination von Eingangsgrößen das Superpositionsprinzip gilt. $[a_1 y_1 + a_2 y_2 = T(a_1 x_1 + a_2 x_2)]$

Ein Lineares System ist Homogen $[S\{k \cdot x(t)\} = k \cdot S\{x(t)\} = k \cdot y(t)]$
und Additiv $[S\{x_1(t) + x_2(t)\} = y_1(t) + y_2(t)]$

- **Kontinuierlich / Diskret?**

Zeit- bzw. Wertkontinuierliche Signale können jeden beliebigen Wert annehmen.

Kann ein System sowohl auf der Zeitachse, als auch auf der Wertachse nur bestimmte Werte annehmen so nennt man es Digital, umgekehrt wäre es ein Analoges Signal.

- **Konzentrierte / verteilte Parameter?**

Bei Systemen mit konzentrierten Parametern sind die Signale nur zeitabhängig. Dynamische Systeme mit konzentrierten Parametern werden durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschrieben.

Systeme mit verteilten Parametern sind im allg. orts- und zeitabhängig und werden durch partielle Differentialgleichungen (enthält Ableitungen nach min. 2 Variablen) beschrieben.

- **Deterministisch / Stochastisch?**

Deterministische Systeme sind zu jedem Zeitpunkt exakt reproduzierbar und können vollständig durch Formeln & Tabellen dargestellt werden.

Stochastische Systeme hängen auch vom Zufall ab und können daher nur approximiert werden.

- **Statisch / Dynamisch?**

Statische (Gedächtnislose) Systeme weisen einen zeitunabhängigen Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgangsgrößen auf. Ihr „Beharrungsverhalten“ kann durch Algebraische Gleichungen beschrieben werden.

Dynamische (Gedächtnisbehaftete) Systeme weisen ein sog. Einschwingverhalten auf, d.h. sie reagieren Zeitversetzt und haben eine Masse und/oder Energiespeicher. Sie werden durch Differentialgleichungen beschrieben.

- **was ist ein LTI-System?**

Linear Time- Invariant System:

Linear: *Lineare Systeme* sind dadurch gekennzeichnet, dass der *Überlagerungssatz* (das Superpositionsprinzip) gilt: Aus der linearen Überlagerung von Ursachen folgt die entsprechende Überlagerung der Wirkungen. Eingangssignale werden also einzeln übertragen und stören sich nicht. (SuperPosPrinzip) → $[a_1 y_1 + a_2 y_2 = T(a_1 x_1 + a_2 x_2)]$

ZeitInvariant: *Zeitinvariant* heißt ein System, wenn eine zeitverschobene Ursache eine entsprechend zeitverschobene (ansonsten aber unveränderte) Wirkung erzeugt. $x(t - t_v) \rightarrow y(t - t_v)$. Systemparameter ändern sich mit der Zeit nicht. (kausal)
Zeitvariante Systeme besitzen zeitlich veränderliche Systemparameter.

- **kausale Systeme**

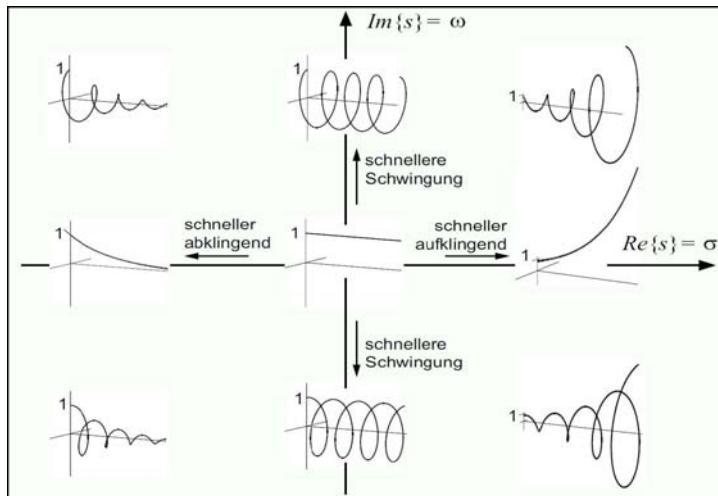
Kausal: Verlauf des Ausgangssignals $y(t)$ hängt bis zu jedem beliebigen Zeitpunkt nur vom entsprechenden Eingangssignal $x(t)$ ab. D.H. die Ursache ist vor der Wirkung da. Jedes reale System ist kausal.

- **Stabile Systeme**

Stabil=E/A Stabil=BIBOStabil: System reagiert auf jede beschränkte Eingangsgröße $x(t)$ mit einer beschränkten Ausgangsgröße $y(t)$.

Asymptotisch Stabil: wird ein System genannt, dass bei hinreichend kleiner Störung irgendwann wieder in Ruhelage (Gleichgewichtszustand) kommt.

- Was für Signalarten kennen Sie (Standardsignale)?
(Deltafunktion, Sprungfunktion, komplexe Exponentialfunktion)



Komplexe Exponentialfunktion:
nur Zeit reell, Amplitude
und Frequenz komplex

(Omega)

$$x(t) = e^{st} \text{ mit } s = \sigma + i\omega \in \mathbb{C}$$

$\sigma=0 \rightarrow$ konstante Amplitude

$\sigma<0 \rightarrow$ Abklingend $\sigma>0$ Ansteigend

$\omega=0 \rightarrow$ Signal schwingt nicht

$\omega<0 \rightarrow$ Uhrzeigers $\omega>0$ gegen UZS

Sprungfunktion: nicht kausales Signal multipliziert mit $s(t)$ = Kausales Signal

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0. \end{cases}$$

aus ihr lässt sich die Rechtecksfunktion darstellen

Deltafunktion: Rechteckimpuls mit Breite 0 und Höhe ∞ (Abtasteigenschaft, Skalierung der Zeitachse durch Gewichtung)

Rechteckimpuls:
$$\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{für } 0 \leq t < T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Deltafunktion:
$$\delta(t) := \lim_{T \rightarrow 0} \Delta(t)$$

Eine Integration über die Deltafunktion $\delta(t)$ stellt eine Funktionswertbestimmung an der Nullstelle des Arguments der Funktion dar.

Rampenfunktion: Aus ihr lässt sich der Dreiecksimpuls darstellen

$$\rho(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ t & \text{für } t \geq 0. \end{cases}$$

- Impulsantwort, Sprungantwort (Zusammenhang?)

Sprungantwort: Reakt. $s(t)$ eines kontin. Sys. auf die Erregung mit der Sprungfunkt. $\sigma(t)$
Es ist oft einfacher die Sprungantwort eines Systems zu bestimmen und daraus die Impulsantwort zu berechnen.

Impulsantwort: Reakt. $h(t)$ eines kontin. Sys. auf die Erregung mit der Deltafunkt. $\delta(t)$
Kennt man die Impulsantwort eines LTI Systems, kann die Reaktion auf beliebige Eingangssignale berechnet werden.

Die Sprungantwort ist das Integral der Impulsantwort.

Die Impulsantwort ist die Ableitung (bzw. Distribution) der Sprungantwort.

- Laplace-Transformation und Faltungssatz

Erweiterte Fourier-Transformation; Integralstransformation;

Bildet eine kausale Funktion vom reellen Zeitbereich in den komplexen Frequenzbereich (Bildbereich) ab.

$$F(s) := \mathcal{L}\{f(t)\} := \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Wichtigste Funktion: Differentiation und Integration im reellen Originalbereich entsprechen einfache algebraische Operationen im Bildbereich (Frequenzbereich).

z.B.: Das Produkt $F(s) \cdot G(s)$ im Bildbereich entspricht dem Faltungsprodukt $f(t) * g(t)$ im Zeitbereich (**FALTUNGSSATZ**: $\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} = F(s) \cdot G(s)$)

- **Eigenschaften der Laplace-Transformation?**

Linearität: $\mathcal{L}\{a \cdot f(t) + b \cdot g(t)\} = a \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} + b \cdot \mathcal{L}\{g(t)\}$ (Superpositionsprinzip)

Verschiebungssatz: $\mathcal{L}\{f(t-a)\} = e^{-as} \cdot F(s)$ (Verschiebung im Zeitbereich \rightarrow Dämpfung im BB)

Modulationssatz: $\mathcal{L}\{e^{at} \cdot f(t)\} = F(s-a)$ (Verschiebung im Bildbereich)

Ähnlichkeitssatz: $\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$

Differentiationssatz: $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = s \cdot F(s) - f(0)$ (Differentiation im ZeitB)

Integrationssatz: $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s} \cdot F(s)$ (Integration im Bildbereich)

Diff. Im Bildbereich: $\mathcal{L}\{t \cdot f(t)\} = -\frac{d}{ds} F(s)$

Integration im BB: $\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t} f(t)\right\} = \int_s^{\infty} F(u) du$

- **Zusammenhang zw. $H(s)$ und $h(t)$**

$H(s)$ = Transfer- oder Übertragungsfunktion. Sie beschreibt die Übertragungseigenschaften vom Eingang zum Ausgang. Sie ist die Lap-Trans. der Impulsantwort $h(t)$

Durch die Übertragungsfunktion kann bei bekannter Eingangsgröße $x(t)/X(s)$ die Ausgangsgröße $Y(s)$ durch eine einfache Multiplikation berechnet werden.

Übertragungsfkt. $H(s)$ für $x(t)=e^{st}$ (Komp.Exp.): $H(s) = \int_0^{+\infty} h(t) \cdot e^{-st} dt$ ($h(t)$... Impuslantwort)

$H(s): Y(s) = X(s) \cdot H(s) \rightarrow H(s) = Y(s)/X(s)$ (Transferfunktion, Übertragungsfunktion)

$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \int_0^{\infty} h(t) e^{-st} dt$

Faltungsintegral: $y(t) = x(t) * h(t) = \int x(\tau) h(t-\tau) d\tau$ (E/A-Gleichung, Faltungsintegral)

- **Eingangs- Ausgangsgleichung und Faltungsintegral**

Kennt man die Impulsantwort kann mit der E/A-Gleichung die Reaktion auf jedes Eingangssignal berechnet werden. = Faltungsintegral

Die Reaktion $y(t)$ eines LTI-Systems auf das Eingangssignal $x(t)$ lässt sich darstellen durch die Faltung des Eingangssignals $x(t)$ mit der Impulsantwort $h(t)$

- **Pol/Nullstellendiagramm und Stabilität**

Einfache Abschätzungen über das System lassen sich ablesen.

Wenn alle Pole der Übertragungsfunktion in der LinkenHE liegen, d.h. wenn alle Pole einen negativen Realteil besitzen sodass die Eigenbewegung insgesamt abklingt, ist das System kausal und stabil.

- **was ist eine Differentialgleichung**

Wenn in einer Gleichung neben der Unbekannten Funktion $y(t)$ auch eine ihrer Ableitungen vorkommt $[y(t)', y(t)'', \dots]$ Ihre Lösung ist also keine Zahl sondern eine Funktion.

Gewöhnliche DGL: unbekannte Fkt. hängt nur von einer unabhängigen Variable ab.

Partielle DGL: unbekannte Fkt. hängt von mehreren unabhängigen Variablen ab.

Ordnung einer DGL: = höchste vorkommende Ableitung

Explizite DGL: $y^{(n)}(t) = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \rightarrow$ nach der höchsten Ableitung aufgelöst

Implizite DGL: $F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \rightarrow$ nicht aufgelöst

Lineare DGL: Linear in der unabhängigen Variable und ihren Ableitungen. Keine Potenzen, Produkte oder Funktionen von y, y', y'', \dots
Potenzen von t sind erlaubt.

Nicht Lineare DGL: Enthält Potenzen, Produkte oder Funktionen der unabhängigen Var.

Autonome DGL: hängt nicht von der Zeit t ab

Anfangswertproblem: Die Anfangsbedingungen $[y(t_0) = y_0; y'(t_0) = y'_0; \dots]$ sind vorgegeben

- **welche Prozesse werden mit Differentialgleichungen beschrieben?**

Viele Naturgesetze können mittels Differentialgleichungen formuliert werden, bzw. andersherum sind Differentialgleichungen ein wesentliches Werkzeug der mathematischen Modellierung.

Dynamische Systeme werden durch Differentialgleichungen beschrieben. Sie beschreiben das Änderungsverhalten der Systemgrößen zueinander.

in der Physik verschiedene Arten von Bewegungen, von Schwingungen oder das Belastungsverhalten von Bauteilen,

in der Astronomie die Bahnen der Himmelskörper und die Turbulenzen im Innern der Sonne,

in der Biologie etwa Prozesse bei Wachstum, bei Strömungen oder in Muskeln,

in der Chemie die Reaktionskinetik von Reaktionen,

in der Elektrotechnik das Verhalten von Netzwerken mit energiespeichernden Elementen,

in der Differentialgeometrie das Verhalten von Flächen,

in der Strömungsmechanik das Verhalten eben dieser Strömungen.

- **was ist ein Richtungsfeld?**

Das Richtungsfeld einer Differentialgleichung $y'(x) = f(x, y(x))$ ordnet jedem Punkt in der (x, y) -Ebene eine Tangente mit Steigung f zu. \rightarrow Die Graphen der Lösungen y sind in jedem Punkt zum Richtungsfeld tangential.

Die *Isoklinen* eines Richtungsfeldes sind Kurven auf denen alle Linienelemente die gleiche Steigung haben.

- **was verstehen Sie unter der "logistischen DGL"?**

Die „Lineare DGL des Exponentiellen Wachstums“ um einen Term proportional zu $n^2(t)$ erweitert. Diese DGL ist nicht linear!

Anders als beim unbeschränkten exponentiellen Wachstum, beschreibt sie den Wettbewerb um vorhandene Ressourcen (Wachstum von Populationen z.B. Bakterien).

Lin-DGL Exp Wachstums $[n'(t) = r \cdot n(t)] \rightarrow$ Log-DGL $[n'(t) = r \cdot n(t) - a \cdot n^2(t)]$

Pro-Kopf-Zuwachsrates nimmt bis $K/2$ (Kapazität des Lebensraums) zu, dann immer mehr ab

\rightarrow Population strebt gegen K (für kleine Populationen Anfangs fast exponentiell)

- **lineare / nichtlineare DGLen (Beispiele)**

Lineare DGL enthalten keine Potenzen, Produkte der unabhängigen Variable y bzw ihrer Ableitungen auf.

z.B.: Tumorwachstum, Radioaktiver Zerfall

- **Was für Elementare Systembausteine kennen Sie?**

DIPL. Ing. (Eselsbrücke=

D-Systeme (Differenzierende Systeme): Das Ausgangssignal $y(t)$ ist proportional der zeitlichen Ableitung des Eingangssignals $x(t)$

Eigenschaften: schwer zu realisieren; benötigt einen Speicher

$$y(t) = k_D x'(t) \quad \text{z.B.: idealer Kondensator}$$

I-Systeme (Integrierende Systeme): Das Ausgangssignal $y(t)$ ist proportional zum Zeitintegral des Eingangssignals $x(t)$

Eigenschaften: Eingangssignal fließt in einen Speicher; instabil; reagiert auf einen Sprung mit einem unbegrenzten Anstieg.

$$y(t) = k_I \int_0^t x(\tau) d\tau \quad \text{z.B.: Behälter, Federn}$$

P-Systeme (Proportional- Systeme): Das Ausgangssignal $y(t)$ ist proportional zum Eingangssignal $x(t)$

Eigenschaften: Kein Speicher = keine Verzögerung

$$y(t) = k_P x(t) \quad \text{z.B.: mechanischer Hebel}$$

L-Systeme (Laufzeit- Systeme): Geben Signale originalgetreu (unverzerrt) aber um die Laufzeit T_L später wieder.

Eigenschaften: verzerrungsfrei, verzögert

$$y(t) = k_P x(t - T_L) \quad \text{z.B.: Transportprozesse, Reflexion}$$

- **Was sind Eigenfunktionen?**

Ein Signal $\phi(t)$, das als Eingangssignal eines Systems an dessen Ausgang die Reaktion $y(t) = \lambda \cdot \phi(t)$ mit einer komplexen Konstanten λ hervorruft, heißt Eigenfunktion dieses Systems.

- **Auf welche Arten können Teilsysteme im Bildbereich zusammengesetzt werden?**

Serienschaltung: $H_G(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) \cdot \dots \cdot H_n(s)$

Parallelschaltung: $H_G(s) = H_1(s) + H_2(s) + \dots + H_n(s)$

Kreisschaltung: $H(s) = \frac{H_1(s)}{1 \mp H_2(s) \cdot H_1(s)} \quad (\text{Mit- oder Gegenkopplung})$

| | |
|--|---|
| Impulsantwort | $h(t) = S\{\delta(t)\}$ |
| Eingangs-Ausgangsgleichung (Faltung) | $y(t) = x(t) * h(t)$ $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) \, d\tau$ |
| Sprungantwort | $s(t) = S\{\sigma(t)\}$ |
| Impulsantwort und Sprungantwort | $h(t) = \frac{d}{dt} s(t)$ $s(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) \, d\tau$ |
| Kausalität | $h(t) = 0 \text{ für } t < 0$ |
| BIBO-Stabilität | $\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \, d\tau < \infty$ |
| Eigenfunktion e^{st} , Eigenwert und Übertragungsfunktion $H(s)$ (einseitige Laplace-Transformation von $h(t)$ für kausale Systeme) | $y(t) = S\{e^{st}\} = H(s) \cdot e^{st}$ $H(s) = \int_0^{+\infty} h(t) \cdot e^{-st} \, dt$ |