(1.1) (2 Punkte)
Definieren Sie die Norm in einem linearen Vektorraum. Wozu dient die Norm? Wie werden die Abstände zwischen Elementen des Vektorraumes (Fehler) in der Norm gemessen? Geben Sie ein Beispiel für eine Vektornorm in $\mathbb{R}^n$. Wie sieht die dazugehörige Matrixnorm?

(1.2) (4 Punkte)
Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, mit einer reellen regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und den Vektoren $x, b \in \mathbb{R}^n$. Weiters sei das gestörte lineare Gleichungssystem $A\tilde{x} = \tilde{b}$ gegeben.

(a) (1 Punkt)
Ergänzen Sie die untenstehende Abschätzung und erklären Sie alle Größen die in dieser Abschätzung auftreten

$$\frac{||\Delta x||}{||x||} \leq \qquad\qquad\qquad \frac{||\Delta b||}{||b||}.$$

(b) (3 Punkte)
Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und ihre Inverse,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 2 & 2-\varepsilon \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-2+\varepsilon}{3\varepsilon} & \frac{1+\varepsilon}{3\varepsilon} \\ \frac{2}{3\varepsilon} & \frac{-1}{3\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = 10^{-5}.$$

Berechnen Sie die relative Konditionszahl dieser Matrix bezüglich der Maximumsnorm. Nehmen Sie an, daß der relative Meßfehler in der rechten Seite b des linearen Gleichungsystems $Ax = b$, durch 10^{-4} beschränkt ist, d.h. $||\Delta b||/||b|| \leq 10^{-4}$ gilt. Welcher maximale relativer Fehler kann dadurch in x enstehen? (Die Matrix A soll als exakt angenommen werden.)

(1.3) (5 Punkte)

(a) (3 Punkte)
In einer Gleitpunktarithmetik werden positive reelle Zahlen wie folgt dargestellt

$$x = m \cdot b^e = \sum_{j=1}^{p} d_j b^{-j} \cdot b^e$$

und durch das Bitmuster

$$e \quad \underbrace{d_1 d_2 d_3 \ldots d_p}_{m}$$

kodiert. Erklären Sie die in der obigen Darstellung auftretenden Größen. Wann spricht man von normalisierten Gleitpunktzahlen?

(b) (1 Punkte)
Erklären Sie den wesentlichen Unterschied zwischen Festpunkt- und Gleitpunktzahlen bezüglich ihrer Lage auf der reellen Achse.

(c) (1 Punkt)
Sei $x \in \mathbb{R}$ und $\Box x \in \mathbb{F}$ der gerundete Wert von x. Kann man für den elementaren relativen Rundungsfehler

$$\rho(x) := \frac{\Box x - x}{x}$$

eine Schranke angeben, die im gesamten Bereich der normalisierten Maschinenzahlen (unabhängig von der Größe von x) gilt? Wenn ja, geben Sie diese Schranke an.

(1.4) (2 Punkte)
Erklären Sie den Begriff *Fehlerfortpflanzung* in Zusammenhang mit einem numerischen Algorithmus. Wann nennt man den Algorithmus numerisch instabil?

(1.5) (3 Punkte)
Erklären Sie den Begriff *Auslöschung.* Warum führt die Auslöschung, im allgemeinen, zu einem großen Fehler im Ergebnis? Beurteilen Sie welche der angeführten Funktionsauswertungen von Auslöschung betroffen sind:

- $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$, x positiv und klein, d.h. $x \approx 0$,
- $\frac{1}{1+3x} - \frac{1-2x}{1+x}$, x sehr groß,
- $\frac{1}{1+3x} - \frac{1-2x}{1+x}$, x klein, d.h. $x \approx 0$,
- $\frac{1-\cos x}{x}$, $x \approx \pi$,
- $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$, x groß,
- $1 - \sqrt{1 - 2^{-n}\pi}$, $n \in \mathbb{N}$ groß.

Die folgenden Fragen beziehen sich auf das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit regulärer Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $x, b \in \mathbb{R}^n$.

(2.1) (2 Punkte)
Angenommen, A und b sind exakt, d.h. sie weisen *keine* Datenfehler auf. Kann das lineare Gleichungssystem trotzdem numerisch singulär sein?

nein ○ ja ○

Hängt die Antwort auf diese Frage von der bei der Lösung verwendeten Gleitpunkt-Arithmetik ab?

nein ○ ja ○

Falls es eine solche Abhängigkeit gibt, wie sieht diese im Fall einer Arithmetik mit *eps* $\approx 10^{-8}$ aus?

(2.2) (1 Punkt)
Warum sollte man lineare Gleichungssysteme *nicht* unter Verwendung der Formel
$x = A^{-1}b$

(2.3) (2 Punkte)
Angenommen, für die Koeffizientenmatrix A liegt ihre $LU-$Zerlegung vor, $A = LU$, wobei L eine untere Dreiecksmatrix und U eine obere Dreiecksmatrix ist. Wie löst man dann das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ nach x auf? Welche Vorteile hat diese Vorgangsweise?

Die folgenden Fragen beziehen sich auf das lineare Gleichungssystem $Ax =$ mit einer rechteckigen Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und mit den Vektor $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m \geq n$.

(2.4) (2 Punkte)
Angenommen, die Matrix A hat vollen Rang. Ist dann das Gleichung system $Ax = b$ lösbar? D.h. gibt es dann zu jedem $b \in \mathbb{R}^m$ ein $x \in \mathbb{I}$ mit $Ax - b = 0$?

nein ○ ja ○

Angenommen, die Matrix A hat vollen Rang. Ist dann das linea Ausgleichsproblem $||Ax - b||_2 \to$ Min lösbar?

nein ○ ja ○

Falls ja, ist eine solche Lösung eindeutig?

nein ○ ja ○

(2.5) (2 Punkte)
Es gibt zwei Möglichkeiten das lineare Ausgleichsproblem $||Ax - b||_2$ - Min numerisch zu lösen, mittels QR-Zerlegung oder mit Hilfe d Gaußschen Normalgleichungen. Angenommen, das Problem ist seh gut konditioniert. Liefern beide numerische Methoden vergleichbar gu te Ergebnisse?

nein ○ ja ○

(3.1) (2 Punkte)
Zeichnen Sie den typischen Verlauf eines Tschebyscheff-Polynoms $T_d(x)$ für $x \in [-1, 1]$. Was ist charakteristisch an der Lage der Nullstellen eines solchen Polynoms im Intervall $[-1, 1]$?

(3.2) (3 Punkte)
Geben Sie möglichst viele Basen für den Raum der Polynome vom Grad d an und beschreiben Sie diese.

(3.3) (2 Punkte)

Ein anderer Anwender hat exakte Daten $(x_i, y_i), i = 1, 2, ...25; x_i \in [-1, 1]$ und er weiß, daß diese Daten einer glatten Funktion entstammen, die er mit einem Polynom 24. Grades approximieren will. Er kann über die Lage der Konten x_i verfügen und überlegt, welches der beiden folgenden Interpolationspolynome er aufstellen soll: Mit Tschebyscheff-Abszissen als Interpolationsknoten oder äquidistanten Stellen als Interpolationsknoten. Wozu würden Sie ihm raten? Geben Sie für Ihren Rat eine Begründung an.