

Ue Statistik u. Wahrscheinlichkeitsth. f. Inf. 107.251 W 2005 6 http://www.statistik.tuwien.ac.at/RISueb/		Di 12:00 – 18:00
		6.Blatt
Werner GURKER Tel.: 58801-10724 Spr.: Di u. Do 11-12 e-mail: W.Gurker@tuwien.ac.at		29. Nov. 2005

1. Berechnen Sie (a) den Erwartungswert und (b) die Varianz der sG X von **Bsp 4.1**. Verwenden Sie für die Varianzberechnung den Verschiebungssatz.
2. *(a) Zeigen Sie: Ist X eine auf den nichtnegativen ganzen Zahlen diskret verteilte sG mit Verteilungsfunktion $F(x)$, so gilt:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=0}^{\infty} [1 - F(x)]$$

- (b) Berechnen Sie mit Hilfe von (a) den Erwartungswert einer geometrisch verteilten sG, $X \sim G_p$, mit Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$p_X(x) = p(1-p)^{x-1}, \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

3. Der Radius X eines Kreises sei eine sG mit Dichte $f(x) = e^{-x}$ für $x > 0$ und $f(x) = 0$ sonst.
 - (a) Zeigen Sie zunächst, daß $\mathbb{E}(X^k) = k!$ für $k = 1, 2, 3, \dots$
 - (b) Berechnen Sie mit Hilfe des „Satzes vom unbewußten Statistiker“ den Erwartungswert der Kreisfläche $A = X^2\pi$.
 - (c) Berechnen Sie die Varianz der Kreisfläche.
4. Bestimmen Sie für eine normalverteilte sG, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, den Erwartungswert von $|X - \mu|$.
5. Berechnen Sie (a) den Erwartungswert und (b) die Streuung (= positive Wurzel aus der Varianz) für die Wartezeit von **Bsp 5.6**. Verwenden Sie für die Varianzberechnung den Verschiebungssatz.
6. Ein Würfel wird zweimal unabhängig geworfen und $Z = |X_1 - X_2|$ sei der Absolutbetrag der Differenz der geworfenen Augenzahlen X_1, X_2 . Bestimmen Sie (a) den Mittelwert und *(b) die Varianz von Z .

Beispiel(teil)e mit (*) werden im Konversatorium behandelt.

Lösungen zum 6. Blatt

1. (a) Allgemein gilt:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Damit folgt:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=1}^{50} \frac{x^2}{1275} = \frac{50 \cdot 51 \cdot 101}{6 \cdot 1275} = \frac{101}{3} = 33.\dot{6}$$

- (b) Allgemein gilt:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Damit folgt:

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{x=1}^{50} \frac{x^3}{1275} = \frac{1}{1275} \left[\frac{50 \cdot 51}{2} \right]^2 = 1275$$

Nach dem Verschiebungssatz gilt:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) = 1275 - \left(\frac{101}{3} \right)^2 = \frac{1274}{9} = 141.\dot{5}$$

2. *(a) Reihe umordnen:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=0}^{\infty} xp(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{k=x+1}^{\infty} p(k) = \sum_{x=0}^{\infty} W\{X > x\} = \sum_{x=0}^{\infty} [1 - F(x)]$$

Bem.: Wegen der (vorausgesetzten) *absoluten* Konvergenz von $\sum_x xp(x)$ (d.h. $\sum_x |x|p(x) < \infty$) ist die obige Reihenumordnung zulässig.

- (b) Für die Verteilungsfunktion der G_p -Verteilung gilt:

$$F(x) = 1 - W\{X > x\} = 1 - (1-p)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Damit folgt:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=0}^{\infty} [1 - F(x)] = \sum_{x=0}^{\infty} (1-p)^x = \frac{1}{1 - (1-p)} = \frac{1}{p}$$

3. (a) Dies zeigt man mittels (wiederholter) partieller Integration oder einfacher wie folgt:

$$\mathbb{E}(X^k) = \int_0^{\infty} x^k e^{-x} dx = \int_0^{\infty} x^{(k+1)-1} e^{-x} dx = \Gamma(k+1) = k!$$

- (b) Nach dem Satz vom unbewußten Statistiker gilt:

$$\mathbb{E}(A) = \mathbb{E}(X^2\pi) = \pi \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = 2!\pi = 2\pi$$

- (c) Nach dem Verschiebungssatz gilt:

$$\text{Var}(A) = \mathbb{E}(A^2) - \mathbb{E}^2(A) = \pi^2 \mathbb{E}(X^4) - 4\pi^2 = 4!\pi^2 - 4\pi^2 = 20\pi^2$$

4. Satz vom unbewußten Statistiker:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X - \mu|) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x - \mu|}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx && (f(x) \text{ symmetrisch um } \mu) \\ &= 2 \int_{\mu}^{\infty} \frac{x - \mu}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx && \left(\text{Subst.: } z = \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \\ &= 2\sigma \int_0^{\infty} \frac{z}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz \\ &= \frac{-2\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \Big|_0^{\infty} \\ &= \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \end{aligned}$$

5. Die Wartezeit hat eine gemischte Verteilung mit:

$$p(0) = \frac{1}{4}; \quad f^*(x) = F'(x) = \frac{1}{16} e^{-x/12} I_{[0,\infty)}(x)$$

- (a)

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot p(0) + \int_0^{\infty} \frac{x}{16} e^{-x/12} dx = \frac{3}{4} \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{x}{12} e^{-x/12} dx}_{=12} = 9 [\text{Min}]$$

(b)

$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \cdot p(0) + \int_0^\infty \frac{x^2}{16} e^{-x/12} dx = \frac{3}{4} \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^2}{12} e^{-x/12} dx}_{= 2 \cdot 12^2 = 288} = 216$$

$$\text{Var}(X) = 216 - 81 = 135; \quad \text{Streuung} = \sqrt{135} \doteq 11.62 [\text{Min}]$$

Bem.: Für eine exponentialverteilte sG $X \sim Ex_\tau$ gilt:

$$\mathbb{E}(X) = \tau, \quad \mathbb{E}(X^2) = 2\tau^2, \quad \text{Var}(X) = \tau^2$$

6. (a) Das folgende Schema zeigt die Werte von $|X_1 - X_2|$:

$X_1 \backslash X_2$	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X_1 - X_2|) &= \sum_{x_1, x_2} |x_1 - x_2| \underbrace{p(x_1, x_2)}_{1/36} \\ &= \frac{2(5 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5)}{36} \\ &= \frac{35}{18} = 1.94 \end{aligned}$$

*(b)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X_1 - X_2)^2) &= \sum_{x_1, x_2} (x_1 - x_2)^2 p(x_1, x_2) \\ &= \frac{2(5 \cdot 1^2 + 4 \cdot 2^2 + 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 4^2 + 1 \cdot 5^2)}{36} \\ &= \frac{35}{6} = 5.8\dot{3} \end{aligned}$$

$$\implies \text{Var}(|X_1 - X_2|) = \frac{35}{6} - \left(\frac{35}{18}\right)^2 = \frac{665}{324} \doteq 2.052$$