

| | | |
|---|--|------------------|
| Ue Statistik u. Wahrscheinlichkeitsth. f. Inf. 107.251 W 2005 6 http://www.statistik.tuwien.ac.at/RISueb/ | | Di 12:00 – 18:00 |
| | | 11.Blatt |
| Werner GURKER Tel.: 58801-10724 Spr.: Di u. Do 11-12 e-mail: W.Gurker@tuwien.ac.at | | 24. Jän. 2006 |

1. Prüfen Sie mittels W-Netz auf Basis des Datensatzes **normtemp.dat** (vgl. Ü-Homepage), wahlweise für **GE=M** oder **GE=W**, ob die Körpertemperaturen einer Normalverteilung folgen. Teilen Sie dazu die Daten zunächst in Klassen ein (z.B. $(96.0, 96.5]$, ...; vgl. auch **Bsp 2.5**) und tragen Sie die kumulierten relativen Klassenhäufigkeiten an den rechten Klassengrenzen im Netz ein. (Wie kann man – im positiven Fall – dem Netz Schätzwerte für μ und σ entnehmen?)

Hinweis: Normalnetze zum Ausdrucken gibt es auf der Ü-Homepage und an anderen Stellen im Internet; R-User nehmen **qqnorm** (und **qqline**) und die unklassierten Originaldaten.

2. Es sei bekannt, daß ein Signal vom Wert μ , das von A nach B übertragen wird, in B normalverteilt ist mit Mittel μ und Streuung 2.
 - (a) In B vermutet man, daß heute $\mu = 8$ übertragen wird. Läßt sich diese Behauptung vertreten, wenn die fünfmalige (unabhängige) Wiederholung des Signals ein Stichprobenmittel von $\bar{X} = 9.5$ ergibt? Testen Sie mit einer Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art von 5%.
 - (b) Wie groß ist beim Test von (a) die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art, wenn das übertragene Signal tatsächlich den Wert $\mu = 10$ hat?
3. Die beiden folgenden Meßreihen stammen aus (unabh.) Normalverteilungen:

| | | | | | | | | | | | | |
|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| X: | 192 | 179 | 181 | 193 | 215 | 181 | 178 | | | | | |
| Y: | 173 | 194 | 194 | 187 | 168 | 186 | 176 | 191 | 191 | 178 | 185 | 160 |

Testen Sie mit $\alpha = 10\%$, ob die Varianzen gleich sind, d.h. testen Sie:

$$\mathcal{H}_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \quad \text{gegen} \quad \mathcal{H}_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$$

4. Fortsetzung von **Bsp 3**: Ermitteln Sie ein 95%-Konfidenzintervall für die Differenz $\Delta = \mu_X - \mu_Y$ der Mittelwerte. Wie kann man auf Basis dieses Intervalls testen, ob die beiden Mittelwerte gleich sind?
Hinweis: Eine entsprechende Pivotgröße wurde in der VO angegeben.
5. Fünf (österr.) 1-EURO-Münzen werden gleichzeitig 200 Mal geworfen und jedesmal die Zahl X der geworfenen „Mozart“ gezählt, mit dem folgenden Ergebnis:

| | | | | | | |
|------------|---|----|----|----|----|---|
| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Häufigkeit | 5 | 38 | 48 | 71 | 32 | 6 |

Prüfen Sie mittels Chiquadrat-Anpassungstest (mit $\alpha = 5\%$), ob die Beobachtungen einer Binomialverteilung mit $n = 5$ und $p = 1/2$ folgen.

6. Betrachten Sie die folgenden (geordneten) Beobachtungen:

0.05 0.06 0.12 0.16 0.26 0.29 0.53 0.65 0.69 0.74
0.75 0.85 0.88 1.17 1.19 1.23 1.29 1.37 1.42 1.49
1.59 1.89 2.21 2.60 4.60

- (a) Prüfen Sie mittels (einfachem) Chiquadrat-Anpassungstest (mit $\alpha = 5\%$), ob die Daten aus einer Exponentialverteilung mit Mittelwert 1 stammen. Nehmen Sie dazu beispielsweise die folgende Klasseneinteilung ($x_p = p$ -Quantil der Ex_1 -Verteilung):

$$[0, x_{0.2}), [x_{0.2}, x_{0.4}), [x_{0.4}, x_{0.6}), [x_{0.6}, x_{0.8}), [x_{0.8}, \infty)$$

- (b) Prüfen Sie mittels Chiquadrat-Anpassungstest (mit $\alpha = 5\%$), ob die Daten aus einer Exponentialverteilung stammen, d.h. testen Sie:

$$\mathcal{H}_0 : X \sim Ex_\tau \quad \text{gegen} \quad \mathcal{H}_1 : X \not\sim Ex_\tau$$

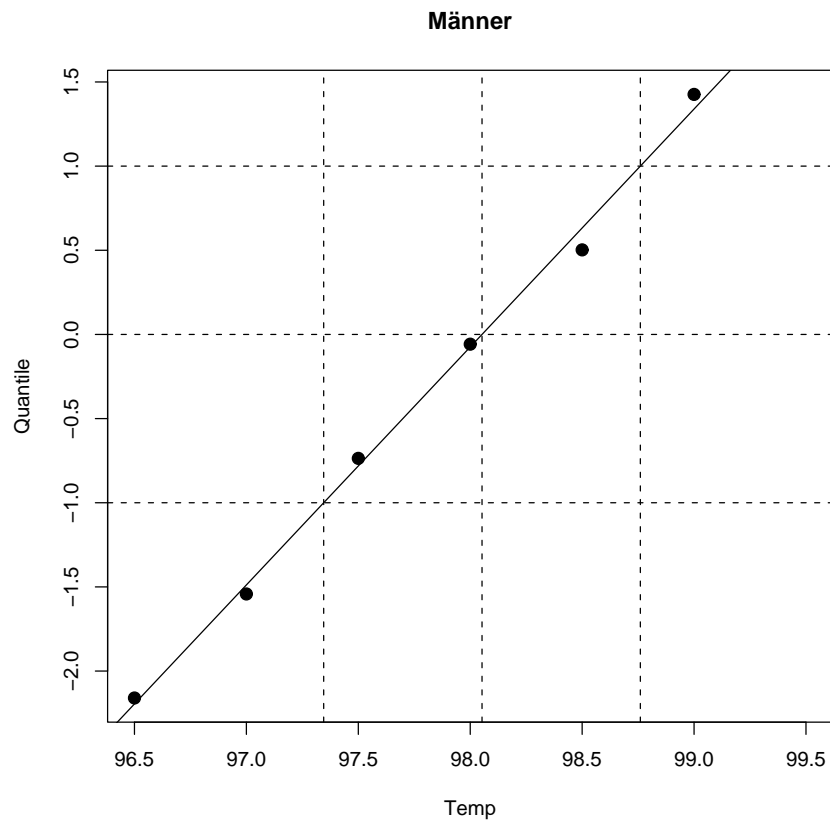
Hinweis: Zusammengesetzter χ^2 -Anpassungstest; bestimmen Sie zuerst den plausiblen Schätzwert von τ . Halten Sie sich bei der Klasseneinteilung an den Vorschlag von (a).

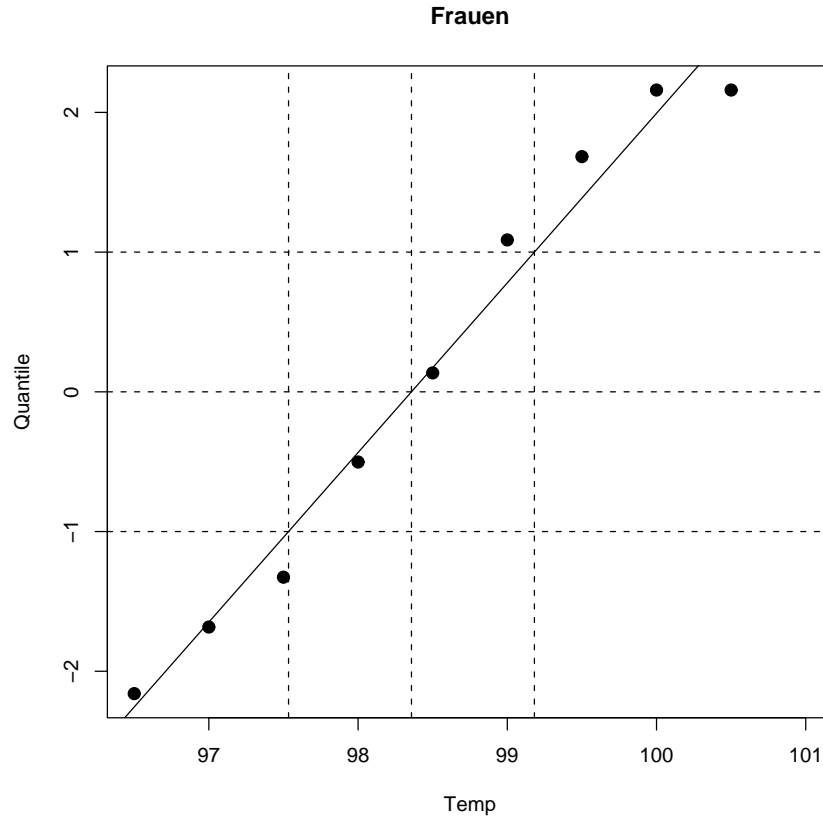
Lösungen zum 11. Blatt

- Größere Datensätze (etwa $n > 30$) kann man vor Eintragung ins W-Netz in Klassen einteilen:

| Männer | | | | Frauen | | | |
|--------------|-------|-------|--------------------|----------------|-------|-------|--------------------|
| Klasse | H_i | h_i | $\sum_{j=1}^i h_i$ | Klasse | H_i | h_i | $\sum_{j=1}^i h_i$ |
| (96.0, 96.5] | 1 | 0.015 | 0.015 | (96.0, 96.5] | 1 | 0.015 | 0.015 |
| (96.5, 97.0] | 3 | 0.046 | 0.062 | (96.5, 97.0] | 2 | 0.031 | 0.046 |
| (97.0, 97.5] | 11 | 0.169 | 0.231 | (97.0, 97.5] | 3 | 0.046 | 0.092 |
| (97.5, 98.0] | 16 | 0.246 | 0.477 | (97.5, 98.0] | 14 | 0.215 | 0.308 |
| (98.0, 98.5] | 14 | 0.215 | 0.692 | (98.0, 98.5] | 16 | 0.246 | 0.554 |
| (98.5, 99.0] | 15 | 0.231 | 0.923 | (98.5, 99.0] | 20 | 0.308 | 0.862 |
| (99.0, 99.5] | 5 | 0.077 | 1.000 | (99.0, 99.5] | 6 | 0.092 | 0.954 |
| | 65 | 1.000 | | (99.5, 100.0] | 2 | 0.031 | 0.985 |
| | | | | (100.0, 100.5] | 0 | 0.000 | 0.985 |
| | | | | (100.5, 101.0] | 1 | 0.015 | 1.000 |
| | | | | | 65 | 1.000 | |

Nun trägt man $\Phi^{-1}(\sum_{j=1}^i h_j)$ (bei vorgefertigten Netzen $\sum_{j=1}^i h_j$ oder bei einer Prozentskala $100(\sum_{j=1}^i h_j)\%$) gegen die oberen Klassengrenzen ab und versucht, die Punkte durch eine Gerade auszugleichen. Für GE=M gelingt dies recht gut, für GE=W sind jedoch – insbesondere am oberen Ende – Abweichungen zu erkennen.





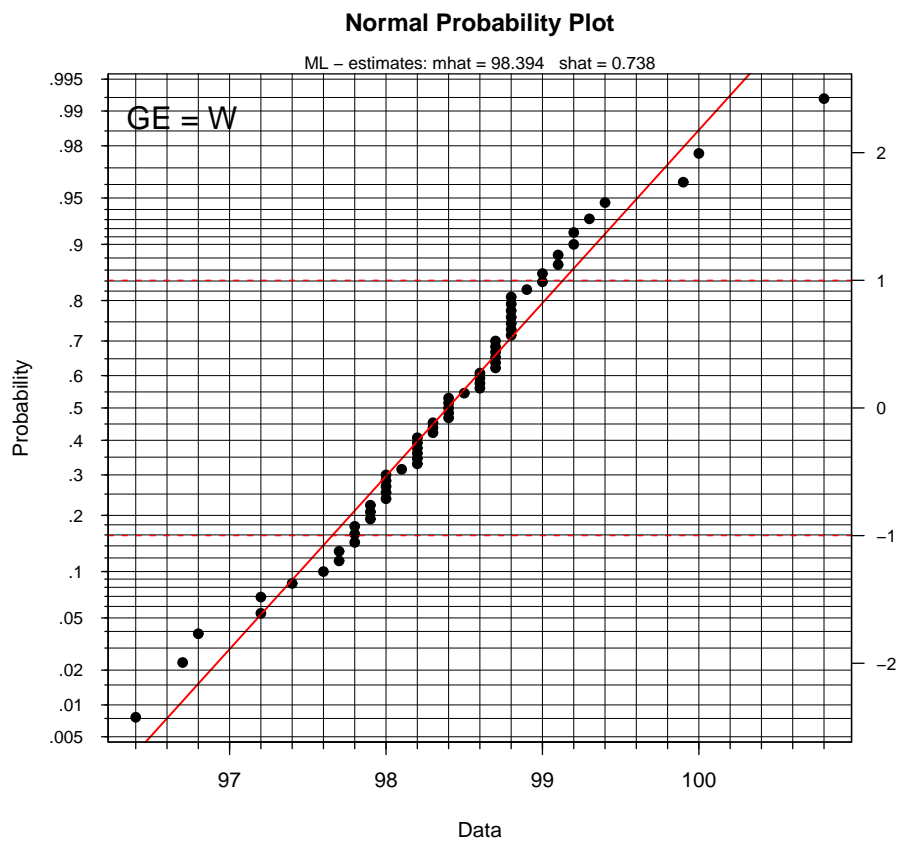
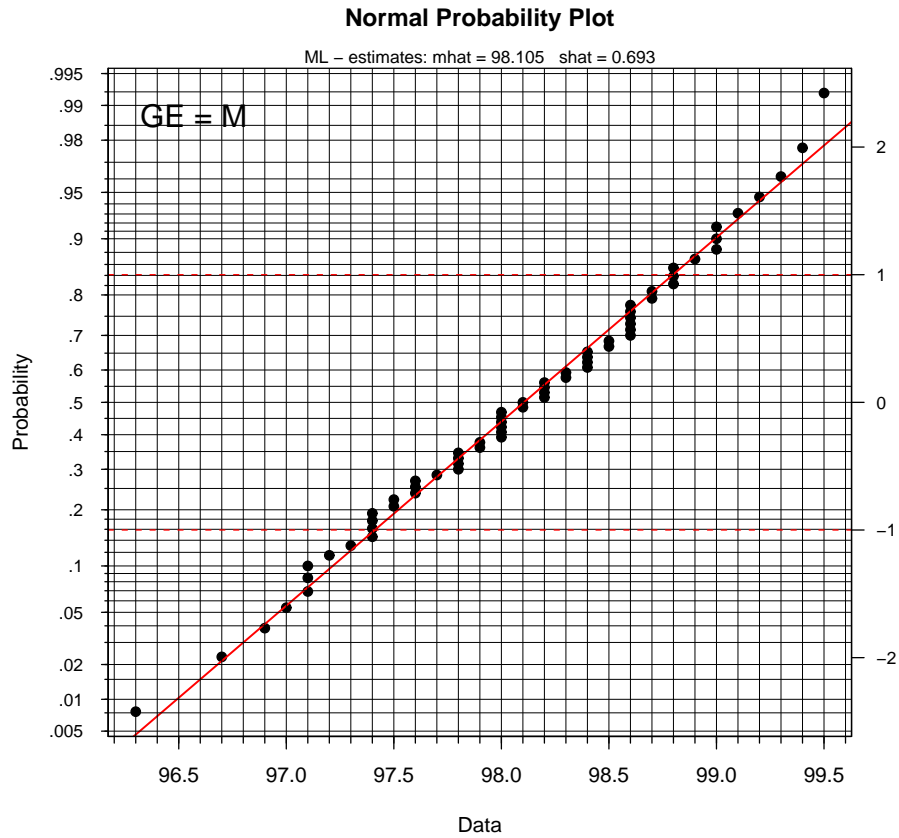
Etwas klarer wird die Situation, wenn man auf die unklassierten Daten zurückgreift. In diesem Fall trägt man aber üblicherweise nicht die Punkte $(x_{(i)}, i/n)$ im Netz ein, sondern:

$$\left(x_{(i)}, \frac{i - 0.5}{n} \right), \quad i = 1, \dots, n$$

Ein Nebeneffekt dieser Vorgangsweise besteht darin, daß auf diese Weise auch der letzte Punkt $x_{(n)}$ eingetragen werden kann (wäre sonst wegen $\Phi^{-1}(1) = \infty$ nicht möglich). Die gute Anpassung für **GE=M** bestätigt sich (allerdings leichtes „Ausfransen“ am oberen Ende); für **GE=W** deutet die Form der Abweichungen darauf hin, daß die Verteilung besonders am oberen Ende etwas schwerer als bei einer Normalverteilung ist.

Einen Schätzwert für μ kann man beim Schnittpunkt der 50%- (bzw. 0-) Linie mit der eingezeichneten Geraden entnehmen; für **GE=M** ergibt sich $\hat{\mu} \approx 98.1$. Ein Schätzwert für σ ergibt sich als Differenz zwischen dem Schnittpunkt der 84.13%- (bzw. 1-) Linie mit der eingezeichneten Geraden und der Schätzung für μ (oder als Differenz zwischen dem entsprechenden Schnittpunkt der 15.87%- (bzw. (-1)-) Linie und der Schätzung für μ); für **GE=M** ergibt sich $\hat{\sigma} \approx 98.8 - 98.1 = 0.7$.

Bem.: Die beiden letzten Abbildungen wurden mit einer eigenen R-Funktion erstellt; Sie finden diese Funktion unter `net.normal.r` auf der Ü-Homepage.



2. (a) Der Test verwirft die Nullhypothese $\mathcal{H}_0 : \mu = 8$ (zugunsten von $\mathcal{H}_1 : \mu \neq 8$) mit einer Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art von $\alpha = 0.05$, falls:

$$\frac{\sqrt{n}|\bar{X}_n - 8|}{2} > z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$$

Für $n = 5$ und $\bar{X} = 9.5$ hat die Teststatistik den Wert 1.68; die Behauptung wird also nicht verworfen.

- (b) Wird tatsächlich $\mu = 10$ übertragen, beträgt die Wahrscheinlichkeit, fälschlicherweise \mathcal{H}_0 nicht zu verwerfen (d.h. für einen Fehler 2. Art):

$$\beta(10) = W \left\{ \frac{\sqrt{5}|\bar{X}_5 - 8|}{2} \leq 1.96 \middle| \mu = 10 \right\}$$

Für $\mu = 10$ gilt $\bar{X}_5 \sim N(10, 4/5) = N(10, 0.8)$; die obige Wahrscheinlichkeit ist also wie folgt zu berechnen:

$$\begin{aligned} \beta(10) &= W \left\{ \underbrace{8 - \frac{2}{\sqrt{5}} 1.96}_{6.247} \leq \bar{X}_5 \leq \underbrace{8 + \frac{2}{\sqrt{5}} 1.96}_{9.753} \right\} \\ &= \Phi \left(\frac{9.753 - 10}{\sqrt{0.8}} \right) - \Phi \left(\frac{6.247 - 10}{\sqrt{0.8}} \right) \\ &= \Phi(-0.276) - \Phi(-4.196) \\ &= \Phi(4.196) - \Phi(0.276) \\ &= 0.391 \end{aligned}$$

3. Der F -Test verwirft die Gleichheit der Varianzen, falls:

$$\frac{S_X^2}{S_Y^2} \notin [F_{n_X-1, n_Y-1; \alpha/2}, F_{n_X-1, n_Y-1; 1-\alpha/2}]$$

Hier gilt:

$$\frac{S_X^2}{S_Y^2} = \frac{174.629}{119.356} = 1.463$$

$$F_{6,11;0.05} = \frac{1}{F_{11,6;0.95}} = \frac{1}{4.027} = 0.248, \quad F_{6,11;0.95} = 3.095$$

Die Gleichheit der Varianzen wird nicht verworfen.

Bem.: Da es offensichtlich nicht darauf ankommt, welche Stichprobenvarianz im Zähler und welche im Nenner steht, wird man die größere Varianz in den Zähler geben. Der Quotient ist dann größer als 1 und es muß nur die obere Intervallgrenze überprüft werden; so erspart man sich die Bestimmung der unteren Grenze. Allerdings ist auf die Reihenfolge der Freiheitsgrade zu achten (1. Freiheitsgrad $\hat{=}$ Zähler; 2. Freiheitsgrad $\hat{=}$ Nenner).

4. Die Konstruktion eines Konfidenzintervalls für $\Delta = \mu_X - \mu_Y$ beruht auf der folgenden Pivotgröße (Vsn.: normalverteilte Beobachtungen, Varianzen gleich):

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta}{S_g \sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} \sim t_{n_X+n_Y-2} \quad \text{mit} \quad S_g^2 := \frac{(n_X-1)S_X^2 + (n_Y-1)S_Y^2}{n_X+n_Y-2}$$

Einschließen von Z in zwei passende t -Quantile ($\ddot{U}W = 1 - \alpha$) und Auflösen der Doppelungleichung nach Δ :

$$\bar{X} - \bar{Y} \mp t_{n_X+n_Y-2; 1-\alpha/2} S_g \sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}$$

Hier gilt $\bar{X} = 188.43$, $\bar{Y} = 181.92$ und $t_{17; 0.975} = 2.11$; für die „gepoolte“ Varianz S_g^2 ergibt sich:

$$S_g^2 = \frac{6 \cdot 174.629 + 11 \cdot 119.356}{17} = 156.153$$

Das 95%-Konfidenzintervall für die Differenz der Mittelwerte ist gegeben durch:

$$\Delta : [-5.312, 18.336]$$

Bem.: Auf Basis des obigen Intervalls kann man auch $\mathcal{H}_0 : \mu_X = \mu_Y$ (gegen $\mathcal{H}_1 : \mu_X \neq \mu_Y$) testen (mit Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art α); dazu ist nur zu prüfen, ob $\Delta = 0$ ein Element des Intervalls ist. Da dies hier der Fall ist, wird die Gleichheit der Mittelwerte nicht verworfen.

5. Da die Nullhypothese vollständig spezifiziert ist, handelt es sich um einen einfachen Chiquadrat-Anpassungstest von:

$$\mathcal{H}_0 : X \sim B_{5, 1/2} \quad \text{gegen} \quad \mathcal{H}_1 : X \not\sim B_{5, 1/2}$$

Die (Klassen-) Wahrscheinlichkeiten unter \mathcal{H}_0 sind gegeben durch:

$$w_i = W\{X = i | \mathcal{H}_0\} = \binom{5}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^5, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Die einzelnen Schritte zur Berechnung der χ^2 -Teststatistik faßt man übersichtlich in einer Tabelle zusammen:

| Klasse | Y_i | w_i | nw_i | $\frac{(Y_i - nw_i)^2}{nw_i}$ |
|--------|-------|---------|--------|-------------------------------|
| 0 | 5 | 0.03125 | 6.25 | 0.250 |
| 1 | 38 | 0.15625 | 31.25 | 1.458 |
| 2 | 48 | 0.31250 | 62.50 | 3.364 |
| 3 | 71 | 0.31250 | 62.50 | 1.156 |
| 4 | 32 | 0.15625 | 31.25 | 0.018 |
| 5 | 6 | 0.03125 | 6.25 | 0.010 |
| Summe | 200 | 1.00000 | 200.00 | 6.256 |

Wegen $\chi_{r-1; 0.95}^2 = \chi_{6-1; 0.95}^2 = \chi_{5; 0.95}^2 = 11.07 > 6.256$ wird die Nullhypothese nicht verworfen.

6. (a) Einfacher Chiquadrat-Anpassungstest von:

$$\mathcal{H}_0 : X \sim Ex_1 \quad \text{gegen} \quad \mathcal{H}_1 : X \not\sim Ex_1$$

Die Quantile der Ex_1 sind gegeben wie folgt:

$$F(x_p) = 1 - e^{-x_p} = p \quad \longrightarrow \quad x_p = -\ln(1 - p)$$

| Klasse | Y_i | w_i | nw_i | $\frac{(Y_i - nw_i)^2}{nw_i}$ |
|--------------------|-------|-------|--------|-------------------------------|
| [0, 0.223) | 4 | 0.2 | 5 | 0.2 |
| [0.223, 0.511) | 2 | 0.2 | 5 | 1.8 |
| [0.511, 0.916) | 7 | 0.2 | 5 | 0.8 |
| [0.916, 1.610) | 8 | 0.2 | 5 | 1.8 |
| [1.610, ∞) | 4 | 0.2 | 5 | 0.2 |
| Summe | 25 | 1.0 | 25 | 4.8 |

Wegen $\chi^2_{r-1;0.95} = \chi^2_{5-1;0.95} = \chi^2_{4;0.95} = 9.488 > 4.8$ wird die \mathcal{H}_0 nicht verworfen.

Bem.: Man beachte, daß durch die gewählte Klasseneinteilung die Regel $nw_i \geq 5$ automatisch erfüllt ist; mehr als 5 Klassen sind nach dieser Regel nicht zulässig. Ist noch ein Parameter zu schätzen (vgl. (b)), ist wegen $r - s - 1 \geq 1$ die minimale Anzahl von Klassen drei.

- (b) Zusammengesetzter Chiquadrat-Anpassungstest von:

$$\mathcal{H}_0 : X \sim Ex_\tau \quad \text{gegen} \quad \mathcal{H}_1 : X \not\sim Ex_\tau$$

Zuerst ist der Parameter τ (plausibel) zu schätzen; eine analoge Rechnung wie in **Bsp 10.3** (vgl. auch die in der Lösung zu **Bsp 10.2(d)** erwähnte „Invarianz“ der ML-Schätzung) ergibt:

$$\hat{\tau} = \bar{x} = 1.1232$$

Die Quantile sind nun gegeben wie folgt:

$$\hat{F}(x_p) = 1 - e^{-x_p/\hat{\tau}} = p \quad \longrightarrow \quad \hat{x}_p = -\hat{\tau} \ln(1 - p)$$

| Klasse | Y_i | \hat{w}_i | $n\hat{w}_i$ | $\frac{(Y_i - n\hat{w}_i)^2}{n\hat{w}_i}$ |
|--------------------|-------|-------------|--------------|---|
| [0, 0.251) | 4 | 0.2 | 5 | 0.2 |
| [0.251, 0.574) | 3 | 0.2 | 5 | 0.8 |
| [0.574, 1.029) | 6 | 0.2 | 5 | 0.2 |
| [1.029, 1.808) | 8 | 0.2 | 5 | 1.8 |
| [1.808, ∞) | 4 | 0.2 | 5 | 0.2 |
| Summe | 25 | 1.0 | 25 | 3.2 |

Wegen $\chi^2_{r-s-1;0.95} = \chi^2_{5-1-1;0.95} = \chi^2_{3;0.95} = 7.815 > 3.2$ wird die \mathcal{H}_0 nicht verworfen.

Bem.: In Hinblick auf das Ergebnis von (a) könnte man der Auffassung sein, daß das Ergebnis von (b) quasi eine „Folgerung“ aus (a) ist. Das ist jedoch nicht der Fall; es ist nicht schwierig, Datensätze zu finden (zu konstruieren), für die die Nullhypothese von (a) nicht verworfen wird, wohl aber diejenige von (b).