

<b>Ue Statistik u. Wahrscheinlichkeitsth. f. Inf.</b> 107.251      W 2005 6 <a href="http://www.statistik.tuwien.ac.at/RISueb/">http://www.statistik.tuwien.ac.at/RISueb/</a>	Di 12:00 – 18:00
	<b>4.Blatt</b>
Werner GURKER      Tel.: 58801-10724 Spr.: Di u. Do 11-12    e-mail: W.Gurker@tuwien.ac.at	8. Nov. 2005

1. Ein Behälter enthält Karten mit aufgedruckten Nummern von  $1, 2, \dots, 50$ . Es gibt  $i$  Karten mit der Nummer  $i$  für  $i = 1, 2, \dots, 50$ . Abgesehen von der aufgedruckten Nummer sind die Karten identisch. Nach guter Durchmischung des Behälters wird eine Karte zufällig entnommen und  $X$  sei die Nummer auf dieser Karte.

- Bestimmen Sie die Verteilung von  $X$ , d.h. ermitteln Sie  $W\{X = k\}$  für  $k \in M_X = \{1, 2, \dots, 50\}$ .
- Berechnen Sie  $W\{X \leq 25\}$ .
- Ermitteln Sie einen Ausdruck für die Verteilungsfunktion von  $X$  und erstellen Sie eine Skizze/Zeichnung.

2. Betrachten Sie die folgende Funktion ( $c$  ist eine reelle Konstante):

$$F(x) = \begin{cases} c e^x & \text{für } x < 0 \\ 1 - c e^{-x} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

- Für welche Werte von  $c$  ist die Funktion eine Verteilungsfunktion?
- Für welche Werte von  $c$  ist die Verteilungsfunktion (1) diskret, (2) stetig oder (3) gemischt?
- Wie ist  $c$  zu wählen, sodaß  $W\{X = 0\} = 0.25$  ?

Hinweis: Erstellen Sie Skizzen/Zeichnungen.

3. Eine symmetrische Münze wird  $n$  Mal unabhängig geworfen, und zwar  $k$  Mal von Person A und  $n - k$  Mal von Person B.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit werfen A und B dieselbe Anzahl von Köpfen?
- Zeigen Sie, daß diese Wahrscheinlichkeit gleich groß ist wie die Wahrscheinlichkeit, insgesamt  $k$  Köpfe zu werfen.

4. Ermitteln Sie für eine poissonverteilte stochastische Größe  $X \sim P_\mu$  die Stelle(n) größter Wahrscheinlichkeit (= Modalwerte).

Hinweis: Betrachten Sie den Quotienten zweier aufeinander folgender Punktwahrscheinlichkeiten  $p_{k+1}/p_k$  mit  $p_k = W\{X = k\}$ .

5. Eine Lieferung von 25 Bauteilen wird auf die folgende Weise geprüft: Eine erste Stichprobe vom Umfang 5 wird – ohne Zurücklegen – gezogen. Ist davon mindestens ein Teil defekt, wird die Lieferung abgelehnt. Andernfalls wird eine zweite Stichprobe des Umfangs 10 – ohne Zurücklegen – aus den 20 verbliebenen Teilen gezogen. Die Lieferung wird abgelehnt, wenn davon mindestens ein Teil defekt ist. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Lieferung angenommen wird, die (a) zwei defekte Bauteile; (b) vier defekte Bauteile enthält.

6. Zeigen Sie: Für (1) die Binomialverteilung  $B_{n,p}$ , (2) die geometrische Verteilung  $G_p$  und (3) die Poissonverteilung  $P_\mu$  liegen die Werte von:

$$g(x) = \frac{x W\{X = x\}}{W\{X = x - 1\}}, \quad x = 1, 2, \dots$$

auf einer Geraden  $g(x) = a + bx$  und bestimmen Sie  $a$  und  $b$ . (\*Gilt das auch für die hypergeometrische Verteilung?) Läßt sich an Hand der Geraden erkennen, um welche dieser Verteilungen es sich handelt?

\*Anwendung: Die obige Eigenschaft kann für die Bestimmung eines passenden diskreten Verteilungsmodells ausgenützt werden. Dazu zeichnet man die Punkte  $(x, x \cdot H_x / H_{x-1})$  ( $H_x$  ist die absolute Häufigkeit von  $x$ ) in ein Diagramm ein und entscheidet sich an Hand der (eventuell) erkennbaren Geraden (Ausgleichsgerade einzeichnen) für ein passendes Modell. Führen Sie dies konkret für die folgenden Daten durch:

$x$	0	1	2	3	4	5	6	7
Häufigk.	5	15	21	24	17	11	5	2

R-Benutzer/innen können dazu die folgenden Zeilen verwenden:

```
x <- c(0:7)
H <- c(5, 15, 21, 24, 17, 11, 5, 2)
g <- x[2:8]*H[2:8]/H[1:7]
plot(x[2:8], g, type="p", pch=16, cex=1.8, xlim=c(0,7), ylim=c(0,4),
     xlab="x", ylab="g(x)")
beta <- lm(g ~ x[2:8])
abline(coef(beta), lwd=2)
```

Beispiel(teil)e mit (\*) werden im Konversatorium behandelt.

1. (a) Es gibt  $\sum_{i=1}^{50} i = (51 \times 50)/2 = 1275$  Karten im Behälter; die Wahrscheinlichkeitsfunktion ist daher gegeben durch:

$$p(x) = W\{X = x\} = \frac{x}{1275}, \quad x = 1, 2, \dots, 50$$

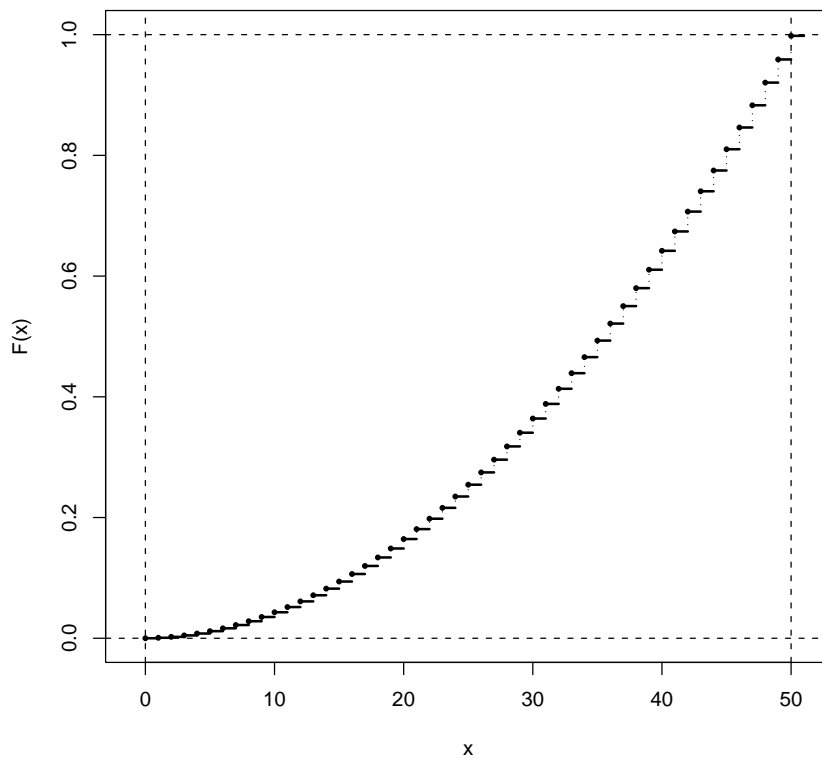
(b)

$$W\{X \leq 25\} = \frac{1}{1275} \sum_{i=1}^{25} i = \frac{(26 \times 25)/2}{1275} = \frac{325}{1275} = \frac{13}{51} = 0.2549$$

(c)

$$F(x) = W\{X \leq x\} = \frac{1}{1275} \sum_{i=1}^{\lfloor x \rfloor} i = \frac{\lfloor x \rfloor (\lfloor x \rfloor + 1)}{2550}, \quad 0 \leq x \leq 50$$

**Verteilungsfunktion von X**



2. (a) Eine Verteilungsfunktion ist monoton wachsend und es gilt  $0 \leq F(x) \leq 1$ ; daher sind für  $c$  nur Werte aus dem Intervall  $[0, 0.5]$  zulässig.

Bem.: Alle anderen Eigenschaften (Rechtsstetigkeit;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ ) folgen aus der Definition der Funktion.

- (b) (1)  $c = 0$  ( $F$  ist eine Treppenfunktion)

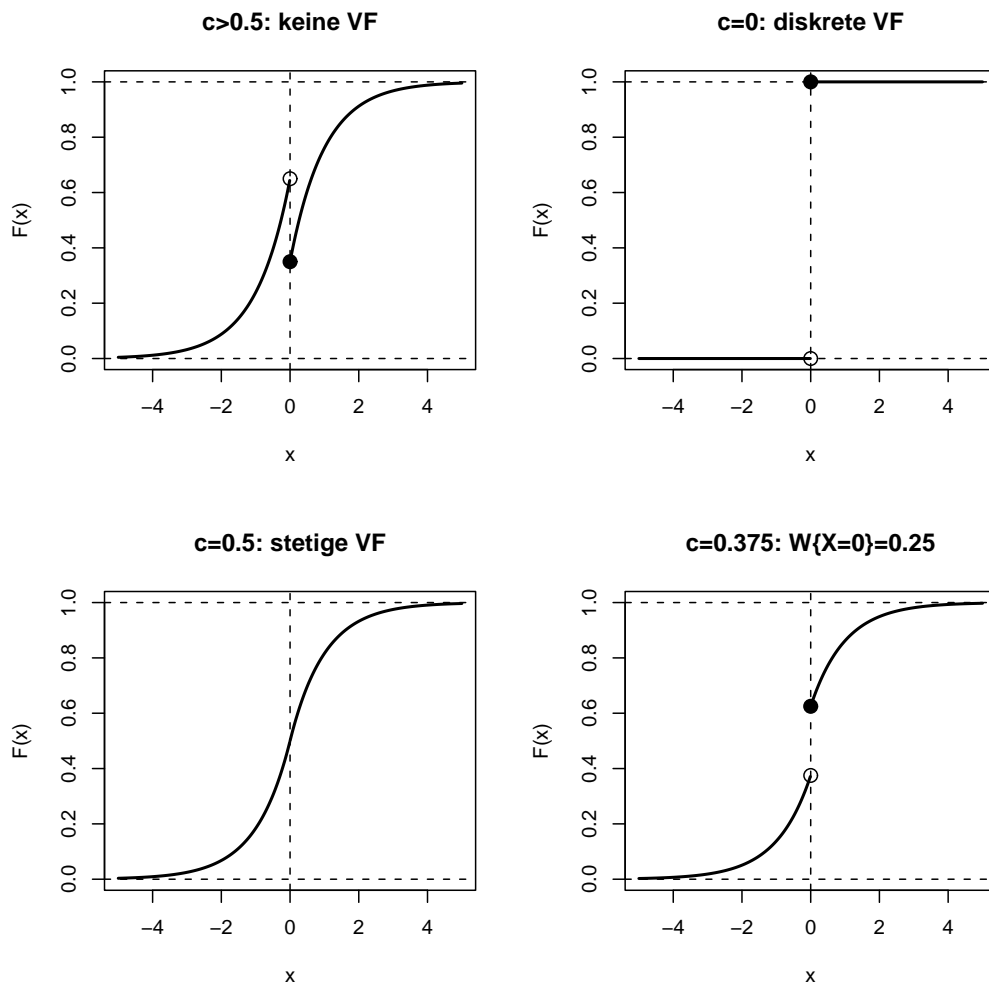
(2)  $c = 0.5$  ( $F$  hat keinen Sprung)

(3)  $c \in (0, 0.5)$  ( $F$  hat einen Sprung, ist aber keine Treppenfunktion)

- (c) Die Sprunghöhe an der Stelle 0 muß gleich 0.25 sein:

$$W\{X = 0\} = F(0) - F(0-) = (1 - c) - c = 1 - 2c$$

$$1 - 2c = 0.25 \quad \implies \quad c = 0.375$$



3. (a)  $X_A$  ( $X_B$ ) bezeichne die Anzahl der von A (B) geworfenen Köpfe:

$$\begin{aligned}
 W\{X_A = X_B\} &= \sum_i W\{X_A = i, X_B = i\} \\
 &= \sum_i W\{X_A = i\} W\{X_B = i\} \quad (\text{A u. B werfen unabh.}) \\
 &= \sum_i \binom{k}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^k \binom{n-k}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \quad (\text{Binomialvert.}) \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_i \binom{k}{i} \binom{n-k}{i}
 \end{aligned}$$

Bem.:  $\binom{a}{b} = 0$  für  $b > a$  ( $a, b \in \mathbb{N}_0$ ).

- (b) Es gilt  $\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$ ; damit folgt:

$$\begin{aligned}
 W\{X_A = X_B\} &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_i \binom{k}{i} \binom{n-k}{i} \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_i \binom{k}{k-i} \binom{n-k}{i}
 \end{aligned}$$

Nun gilt für  $a, b \in \mathbb{N}_0$  (*Vandermonde'sche Identität*):

$$\sum_{i=0}^n \binom{a}{i} \binom{b}{n-i} = \binom{a+b}{n}$$

Angewendet auf die obige Summe ergibt sich:

$$W\{X_A = X_B\} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Dies ist aber die Wahrscheinlichkeit, bei  $n$  Würfeln mit einer fairen Münze  $k$  Köpfe zu werfen (= Wahrscheinlichkeit bei  $n$  Würfeln mit einer fairen Münze  $k$  Zahlen zu werfen).

Bem.: Mit Hilfe eines etwas anderen Arguments läßt sich dies auch direkt zeigen. Bei einer fairen Münze ist die Wahrscheinlichkeit für Kopf (K) gleich groß wie für Zahl (Z); daher gilt:

$$\begin{aligned} W\{\# \text{ K von A} = \# \text{ K von B}\} &= W\{\# \text{ Z von A} = \# \text{ K von B}\} \\ &= W\{k - \# \text{ K von A} = \# \text{ K von B}\} \\ &= W\{\# \text{ K von A} + \# \text{ K von B} = k\} \\ &= W\{\# \text{ K insgesamt} = k\} \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

(Dies ist gleichzeitig ein Beweis für die Vandermonde'sche Identität.)

4. Für den Quotienten von zwei aufeinanderfolgenden Wahrscheinlichkeiten gilt:

$$\frac{W\{X = k+1\}}{W\{X = k\}} = \frac{\mu^{k+1} e^{-\mu} / (k+1)!}{\mu^k e^{-\mu} / k!} = \frac{\mu}{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Das kleinste  $k$  mit  $k+1 > \mu$  ist der Modalwert; ist  $\mu$  ganzzahlig, gibt es zwei Modalwerte,  $\mu - 1$  und  $\mu$ :

$$\text{Modalwert} = \begin{cases} \lfloor \mu \rfloor & \text{falls } \mu \notin \mathbb{N} \\ \mu - 1, \mu & \text{falls } \mu \in \mathbb{N} \end{cases}$$

5. Da die Ziehungen ohne Zurücklegen erfolgen, kommt die hypergeometrische Verteilung zur Anwendung. Ist  $A$  die Zahl der defekten Bauteile im Los, so gilt:

$$W\{\text{Annahme}\} = \frac{\binom{A}{0} \binom{25-A}{5}}{\binom{25}{5}} \times \frac{\binom{A}{0} \binom{20-A}{10}}{\binom{20}{10}} = \frac{\binom{A}{0} \binom{25-A}{15}}{\binom{25}{15}}$$

$A$	$W\{\text{Annahme}\}$	$A$	$W\{\text{Annahme}\}$
0	1.0000	5	0.0047
1	0.4000	6	0.0012
2	0.1500	7	0.0002
3	0.0522	8	0.0000
4	0.0166		

6. (1) Binomialverteilung  $B_{n,p}$ :

$$g(x) = \frac{x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}}{\binom{n}{x-1} p^{x-1} (1-p)^{n-x+1}} = (n+x+1) \frac{p}{1-p}$$

$$= \underbrace{\frac{(n+1)p}{1-p}}_{a(+)} + x \underbrace{\frac{-p}{1-p}}_{b(-)}, \quad x = 1, 2, \dots, n$$

(2) Geometrische Verteilung  $G_p$ :

$$g(x) = \frac{x(1-p)^{x-1}p}{(1-p)^{x-2}p} = x \underbrace{(1-p)}_{b(+)}, \quad x = 2, 3, \dots$$

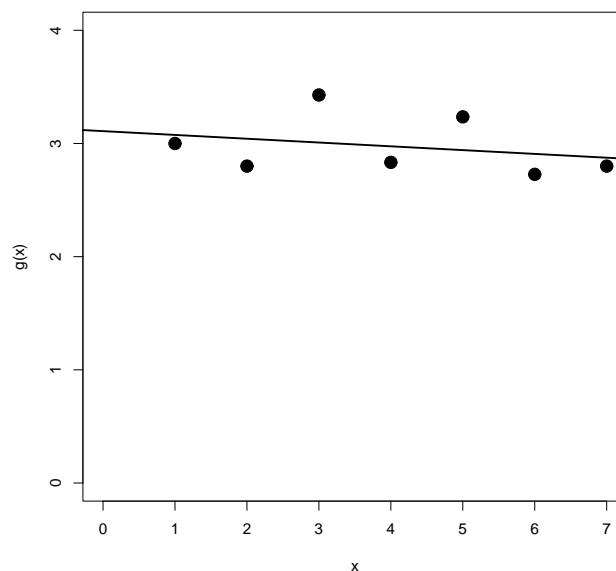
(3) Poissonverteilung  $P_\mu$ :

$$g(x) = \frac{x\mu^x e^{-\mu}/x!}{\mu^{x-1} e^{-\mu}/(x-1)!} = \underbrace{\mu}_{a(+)}, \quad x = 1, 2, \dots$$

\*(4) Hypergeometrische Verteilung  $H_{N,A,n}$ :

$$g(x) = \frac{(A-x+1)(n-x+1)}{N-A-n+x} \quad (\text{keine Gerade})$$

\*Anwendung: Trägt man die Punkte  $(x, xH_x/H_{x-1})$  in einem Diagramm auf und legt durch sie eine Ausgleichsgerade (Kleinste-Quadrate-Gerade), so ergibt sich das folgende Bild:



Die Beobachtungen stammen (vermutlich) aus einer Poissonverteilung mit  $\mu \approx 3$ .