

Ue Statistik u. Wahrscheinlichkeitsth. f. Inf. 107.251 W 2005 6 http://www.statistik.tuwien.ac.at/RISueb/	Di 12:00 – 18:00
	1.Blatt
Werner GURKER Tel.: 58801-10724 Spr.: Di u. Do 11-12 e-mail: W.Gurker@tuwien.ac.at	11. Okt. 2005

1. Vereinfachen Sie soweit wie möglich ($AB \equiv A \cap B$):
 - (a) $(A \cup B)(A \cup \overline{B})$
 - (b) $(A \cup B)(B \cup C)$
 - (c) $(A \cup B)(\overline{A} \cup B)(A \cup \overline{B})$
 - (d) $(AB) \cup (A\overline{B})$
 - (e) $(A \cup B)(\overline{A} \cup B)(A\overline{B})$

2. (a) Gilt für eine Folge C_1, C_2, \dots von Mengen, daß $C_k \subset C_{k+1}$ für $k = 1, 2, \dots$, so wird $\lim_{k \rightarrow \infty} C_k$ als Vereinigung der Mengen, $C_1 \cup C_2 \cup \dots$, definiert. Ermitteln Sie den Limes für:
 - (1) $C_k = \{x : 1/k \leq x \leq 3 - 1/k\}$, $k = 1, 2, \dots$
 - (2) $C_k = \{(x, y) : 1/k \leq x^2 + y^2 \leq 4 - 1/k\}$, $k = 1, 2, \dots$
- (b) Gilt für eine Folge C_1, C_2, \dots von Mengen, daß $C_k \supset C_{k+1}$ für $k = 1, 2, \dots$, so wird $\lim_{k \rightarrow \infty} C_k$ als Durchschnitt der Mengen, $C_1 \cap C_2 \cap \dots$, definiert. Ermitteln Sie den Limes für:
 - (1) $C_k = \{x : 2 - 1/k < x \leq 2\}$, $k = 1, 2, \dots$
 - (2) $C_k = \{x : 2 < x \leq 2 + 1/k\}$, $k = 1, 2, \dots$
 - (3) $C_k = \{(x, y) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1/k\}$, $k = 1, 2, \dots$

3. Für jede (eindimensionale) Menge A sei $Q(A)$ definiert durch $Q(A) = \sum_A f(x)$ wobei $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $x = 0, 1, 2, \dots$ ($f(x) = 0$ sonst). Wenn $A_1 = \{0, 1, 2, 3\}$, $A_2 = \{0, 1, 2, \dots\}$, $A_3 = \{0, 2, 4, \dots\}$ bestimmen Sie $Q(A_1)$, $Q(A_2)$, $Q(A_3)$.

4. Eine Firma stellt drei verschiedene Artikel a, b, c her. Sie berichtet, daß von 1000 befragten Haushalten 67 mindestens a und b , 95 mindestens b und c , 116 mindestens a und c , 53 alle drei und 190 mindestens zwei der Artikel benutzen. Wie beurteilen Sie diese Angaben?

5. Zwei Personen betreten (unabhängig voneinander) ein Cafe und halten sich dort (genau) 1/2 Stunde (Person A) bzw. (genau) 1 Stunde (Person B) auf. Die Ankunftszeitpunkte liegen zufällig zwischen 9 und 12 Uhr.
 - (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit begegnen sie einander?
 - (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich um 11 Uhr (i) weder A noch B; (ii) A oder B, aber nicht beide; (iii) A oder B; (iv) A und B im Cafe aufhalten?

6. Auf einer Kreislinie werden zufällig zwei Punkte, P_1 und P_2 , ausgewählt. (Wie läßt sich das praktisch realisieren?) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Sehne $\overline{P_1P_2}$ länger als der Radius des Kreises?

Lösungen zum 1. Blatt

1. (a) A ; (b) $(A \cap C) \cup B$; (c) $A \cap B$; (d) A ; (e) \emptyset
 2. (a) (1) $\{x : 0 < x < 3\}$; (2) $\{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < 4\}$
 (b) (1) $\{x : x = 2\}$; (2) \emptyset ; (3) $\{(x, y) : x = 0, y = 0\}$

$$3. Q(A_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{(1/3)^4 - 1}{(1/3) - 1} = \frac{80}{81}$$

$$Q(A_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - (1/3)} = 1$$

$$Q(A_3) = \frac{2}{3} \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = \frac{2}{3} \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^x = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - (1/9)} = \frac{3}{4}$$

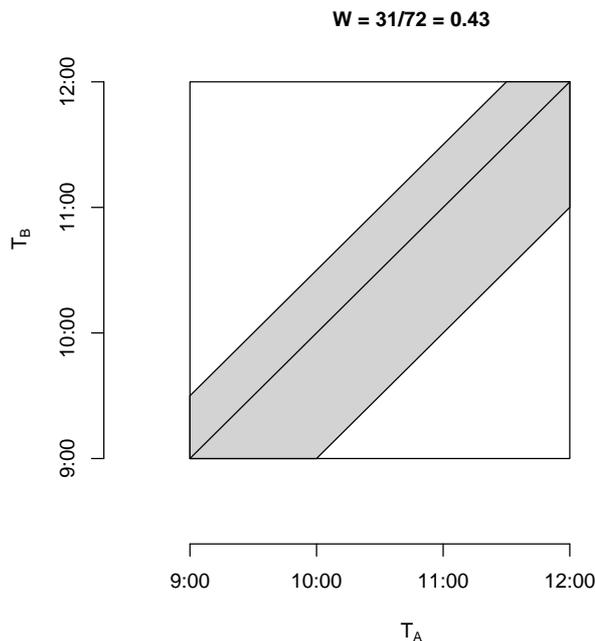
4. Bildet man die Summe $67 + 95 + 116$, zählt man die Haushalte, die alle drei Produkte verwenden, insgesamt dreimal. Die Zahl der Haushalte, die zumindest zwei Produkte verwenden, beträgt somit $67 + 95 + 116 - 2 \times 53 = 172$. Laut Angabe gibt es aber 190 derartige Haushalte; die Zahlen können daher nicht stimmen.

Bem.: Allgemeiner gilt für Mengen A_i , $i = 1, 2, \dots, n$, das folgende In- und Exklusionsgesetz:

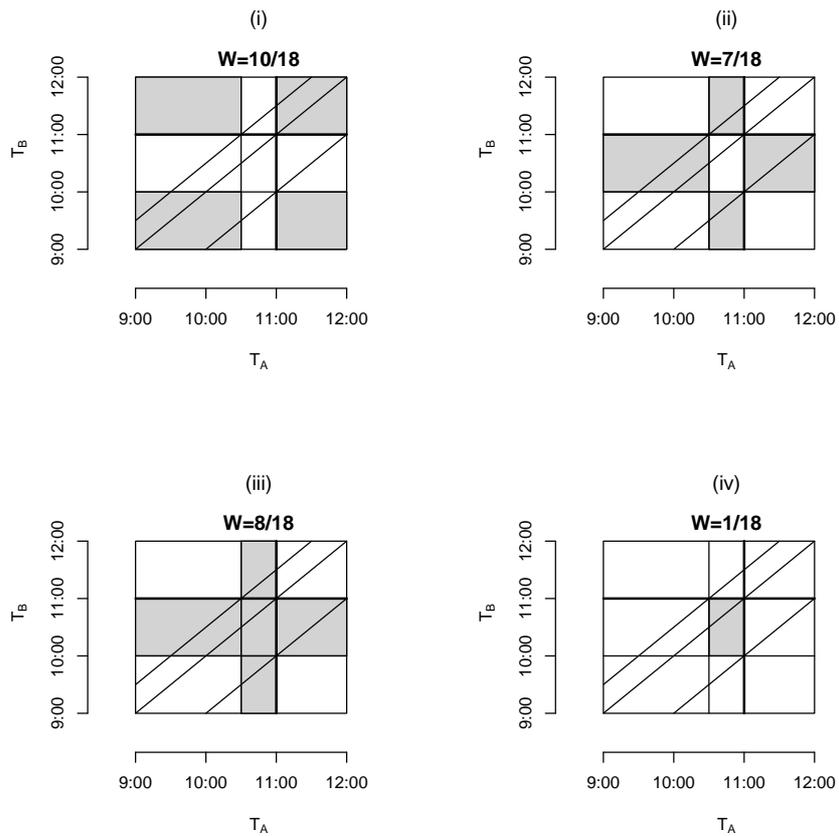
$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|T|-1} \left| \bigcap_{i \in T} A_i \right|$$

5. (a) Sie begegnen einander, wenn ihr Ankunftszeitpunkt (T_A, T_B) in den grau unterlegten Bereich fällt; die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt:

$$W = \frac{|\text{günstiger Bereich}|}{|\text{möglicher Bereich}|} = 1 - \frac{2 + 25/8}{9} = \frac{31}{72} \doteq 0.431$$



(b) Die „günstigen“ Bereiche sind in der folgenden Abbildung grau unterlegt.



6. Fällt P_1 in den Punkt A , dann ist die Sehne genau dann kürzer als der Radius, wenn P_2 in den Kreisbogen BAC fällt; die Länge des letzteren beträgt $1/3$ des Kreisumfangs. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $1 - 1/3 = 2/3$.

