

Ue Statistik u. Wahrscheinlichkeitsth. f. Inf. 107.251 W 2005 6 http://www.statistik.tuwien.ac.at/RISueb/	Di 12:00 – 18:00
	5.Blatt
Werner GURKER Tel.: 58801-10724 Spr.: Di u. Do 11-12 e-mail: W.Gurker@tuwien.ac.at	22. Nov. 2005

1. Es sei bekannt, daß bei n unabhängigen identischen Alternativversuchen insgesamt k „Erfolge“ vorgekommen sind.

(a) Mit welcher (bedingten) Wahrscheinlichkeit war ein bestimmter Versuch erfolgreich?

*(b) Mit welcher (bedingten) Wahrscheinlichkeit waren zwei bestimmte Versuche erfolgreich? (Vs.: $k \geq 2$)

2. Es wird eine nach P_{10} verteilte Anzahl von (österr.) 1-EURO-Münzen geworfen und X sei die Anzahl der geworfenen „Mozart“. Bestimmen Sie die Verteilung von X , d.h. bestimmen Sie $W\{X = k\}$ für $k \in \mathbb{N}_0$. (*Wie läßt sich das Resultat verallgemeinern?)

Hinweis: Verwenden Sie den Satz v. d. vollst. Wahrscheinlichkeit; bedingen Sie durch die Anzahl der Münzen.

3. Eine Komponente mit exponentialverteilter Lebensdauer, $X \sim Ex_\tau$, arbeitet laut Hersteller mit Wahrscheinlichkeit 0.9 länger als 500 Stunden.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit arbeitet eine derartige Komponente länger als 1000 Stunden; länger als 5000 Stunden?

(b) Bestimmen Sie den Parameter τ und zeichnen Sie die Verteilungsfunktion und die Dichte.

(c) Ermitteln Sie das p -Quantil, speziell den Median.

*(d) Zeigen Sie die folgende Eigenschaft für $X \sim Ex_\tau$:

$$W\{X > s + t \mid X > s\} = W\{X > t\}, \quad \forall s, t > 0$$

Was bedeutet diese Eigenschaft im Kontext des Beispiels?

4. Bestimmen Sie für die Dichte einer Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$:

(a) die Wendepunkte;

*(b) die Schnittpunkte der Wendetangenten mit der x -Achse.

5. Für eine normalverteilte sG, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, gelte: Der Median ist 89 und das 25%-Quantil ist 75.5.

(a) Bestimmen Sie μ und σ .

(b) Bestimmen Sie das 75%- und das 90%-Quantil.

(c) Berechnen Sie: $W\{X \leq 100\}$, $W\{X > 80\}$, $W\{|X - \mu| > 10\}$.

6. Bei einer Serviceeinrichtung wird man mit Wahrscheinlichkeit $1/4$ sofort bedient (d.h. keine Wartezeit), oder man hat eine nach Ex_{12} verteilte Wartezeit (Einheit: Minuten). Bestimmen Sie:
- (a) die Verteilungsfunktion der Wartezeit (+ Skizze/Zeichnung);
 - (b) den Median der Wartezeit;
 - (c) die Wahrscheinlichkeit noch mindestens weitere 10 Minuten warten zu müssen, wenn man bereits 10 Minuten gewartet hat.

Beispiel(teil)e mit (*) werden im Konversatorium behandelt.

Lösungen zum 5. Blatt

1. (a) Ist X die Anzahl der Erfolge (bei n Versuchen) und bezeichnet E_i das Ereignis, beim i -ten Versuch einen Erfolg zu erzielen, so gilt nach der Bayes'schen Formel:

$$\begin{aligned} W(E_i|X=k) &= \frac{W(X=k|E_i)W(E_i)}{W(X=k)} \\ &= \frac{\binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} p}{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}} = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} \\ &= \frac{(n-1)! k! (n-k)!}{(k-1)! (n-k)! n!} = \frac{k}{n} \end{aligned}$$

*(b) Eine ganz analoge Überlegung zeigt ($i \neq j$):

$$\begin{aligned} W(E_i \cap E_j|X=k) &= \frac{W(X=k|E_i \cap E_j)W(E_i \cap E_j)}{W(X=k)} \\ &= \frac{\binom{n-2}{k-2} p^{k-2} (1-p)^{n-k} p^2}{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}} = \frac{\binom{n-2}{k-2}}{\binom{n}{k}} \\ &= \frac{(n-2)! k! (n-k)!}{(k-2)! (n-k)! n!} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \end{aligned}$$

2. Ist Z die Anzahl der Münzen, so gilt nach dem Satz v. d. vollst. Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} W\{X=k\} &= \sum_{j=k}^{\infty} W\{X=k|Z=j\}W\{Z=j\} \\ &= \sum_{j=k}^{\infty} \binom{j}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^j \frac{10^j e^{-10}}{j!} \\ &= \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{2}\right)^k 10^k e^{-10} \sum_{j=k}^{\infty} \binom{j}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{j-k} \frac{10^{j-k}}{(j-k)!} \\ &= \frac{5^k e^{-10}}{k!} \underbrace{\sum_{j=k}^{\infty} \frac{5^{j-k}}{(j-k)!}}_{= e^5} = \frac{5^k e^{-5}}{k!}, \quad k=0,1,2,\dots \end{aligned}$$

D.h., daß X nach P_5 verteilt ist.

*Verallgemeinerung: Für $Z \sim P_\mu$ und $X|Z=j \sim B_{j,p}$ gilt:

$$X \sim P_{\mu p} : \quad W\{X=k\} = \frac{(\mu p)^k e^{-\mu p}}{k!}, \quad k=0,1,2,\dots$$

3. (a) Die Verteilungsfunktion von exponentialverteilten sGn lautet:

$$F(x) = W\{X \leq x\} = 1 - e^{-x/\tau}, \quad x > 0$$

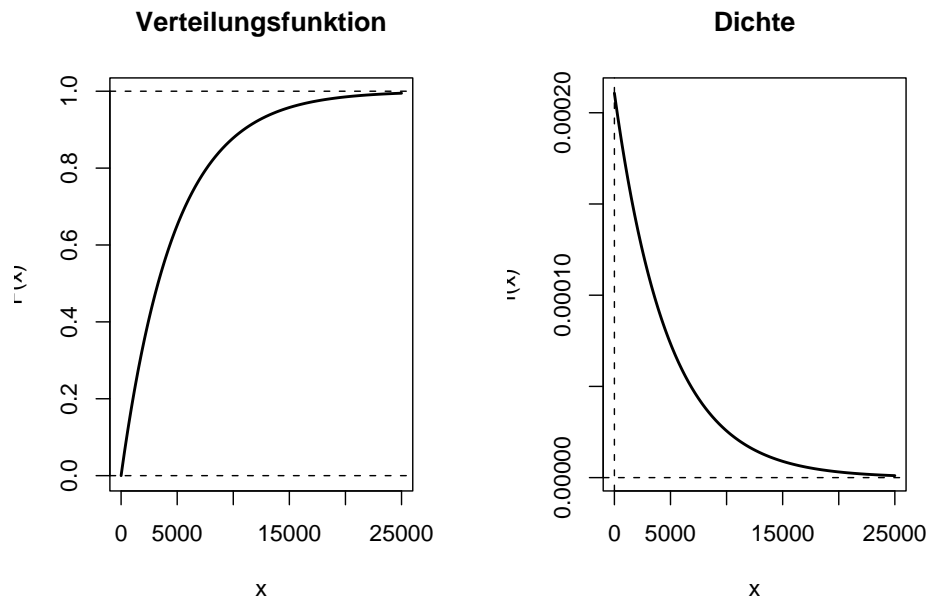
Daraus folgt:

$$W\{X > 1000\} = e^{-1000/\tau} = [e^{-500/\tau}]^2 = [W\{X > 500\}]^2 = 0.9^2 = 0.81$$

$$W\{X > 5000\} = [e^{-500/\tau}]^{10} = 0.9^{10} = 0.3487$$

- (b)

$$W\{X > 500\} = e^{-500/\tau} = 0.9 \implies \tau = -\frac{500}{\ln(0.9)} = 4745.6 \text{ [h]}$$



- (c) Das p -Quantil x_p ist die Lösung von $F(x_p) = p$:

$$1 - e^{-x_p/\tau} = p \implies x_p = -\tau \ln(1 - p)$$

Für den Median ($p = 0.5$) ergibt sich:

$$\tilde{x} = x_{0.5} = -\tau \ln(0.5) = 0.6931\tau = 3289.4 \text{ [h]}$$

- *(d) Dies sieht man wie folgt:

$$\begin{aligned} W\{X > s+t | X > s\} &= \frac{W\{X > s+t, X > s\}}{W\{X > s\}} = \frac{W\{X > s+t\}}{W\{X > s\}} \\ &= \frac{e^{-(s+t)/\tau}}{e^{-s/\tau}} = e^{-t/\tau} = W\{X > t\} \end{aligned}$$

Interpretation: Das bedeutet in Worten, daß eine derartige Komponente nicht altert (sich aber auch nicht verjüngt); in jedem Moment, zu dem sie noch funktioniert, ist sie so gut wie neu. Diese Eigenschaft („Gedächtnislosigkeit“) ist charakteristisch für die Exponentialverteilung (d.h., sie ist die einzige nichtnegative und stetige Verteilung mit dieser Eigenschaft); umgekehrt kann man daher auch sagen, daß die Lebensdauer von Komponenten, die einer Alterung oder Abnutzung unterliegen, nicht exponentiell verteilt sein kann.

4. (a) Es genügt, die Dichte $\varphi(x)$ der $N(0,1)$ -Verteilung zu analysieren; ihre Ableitungen sind gegeben wie folgt:

$$\varphi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi'(x) = -\frac{xe^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi''(x) = \frac{e^{-x^2/2}(x^2 - 1)}{\sqrt{2\pi}}$$

Die Wendepunkte liegen an den Stellen mit $\varphi''(x) = 0$, d.h. an den Stellen $x = \mp 1$; φ hat dort den Wert $e^{-1/2}/\sqrt{2\pi}$:

$$\text{Wendepunkte: } P_1 = \left(-1, \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}}\right), \quad P_2 = \left(1, \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}}\right)$$

Für eine $N(\mu, \sigma^2)$ -Verteilung gilt:

$$\text{Wendepunkte: } P_1 = \left(\mu - \sigma, \frac{e^{-1/2}}{\sigma \sqrt{2\pi}}\right), \quad P_2 = \left(\mu + \sigma, \frac{e^{-1/2}}{\sigma \sqrt{2\pi}}\right)$$

- *(b) Für die Ableitung von $\varphi(x)$ an den Wendepunkten gilt:

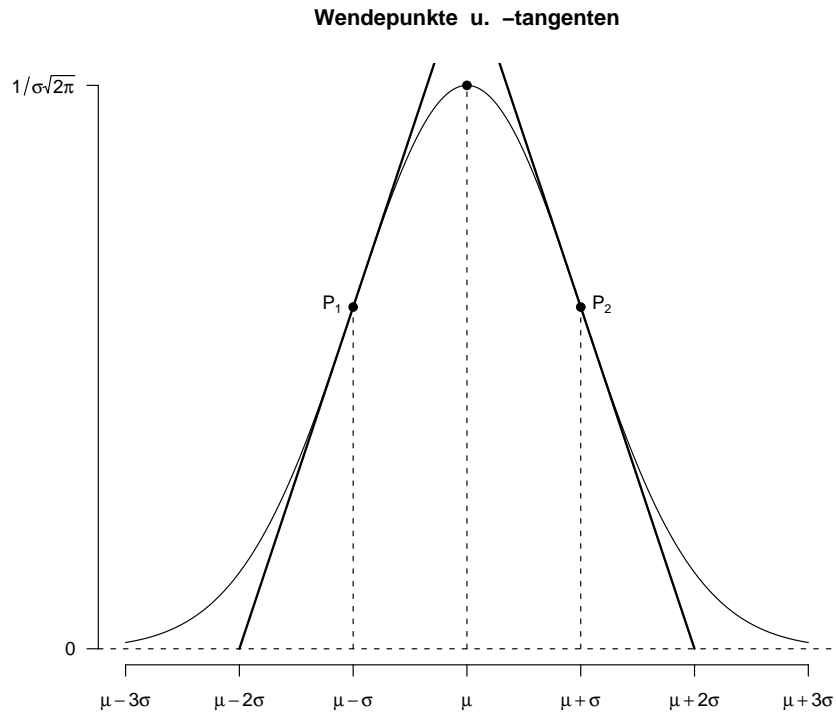
$$\varphi'(\mp 1) = \pm \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

Die Wendetangenten sind also gegeben wie folgt:

$$P_1 : \quad g_1(x) = \frac{e^{-1/2}(x+2)}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{allg.:} \quad g_1(x) = \frac{e^{-1/2}(x - \mu + 2\sigma)}{\sigma^2 \sqrt{2\pi}}$$

$$P_2 : \quad g_2(x) = \frac{e^{-1/2}(2-x)}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{allg.:} \quad g_2(x) = \frac{e^{-1/2}(\mu + 2\sigma - x)}{\sigma^2 \sqrt{2\pi}}$$

Die Wendetangenten schneiden die x -Achse an den Stellen $\mu \mp 2\sigma$.



5. (a) Bei einer Normalverteilung ist der Median gleich (dem Mittelwert) μ ; für das p -Quantil x_p einer Normalverteilung gilt ($u_p = p$ -Quantil der $N(0, 1)$):

$$F(x_p) = W\{X \leq x_p\} = \Phi\left(\frac{x_p - \mu}{\sigma}\right) = p$$

$$\implies \frac{x_p - \mu}{\sigma} = u_p \implies x_p = \mu + u_p \sigma$$

Der Parameter σ (Standardabweichung; Streuung) ergibt sich also zu:

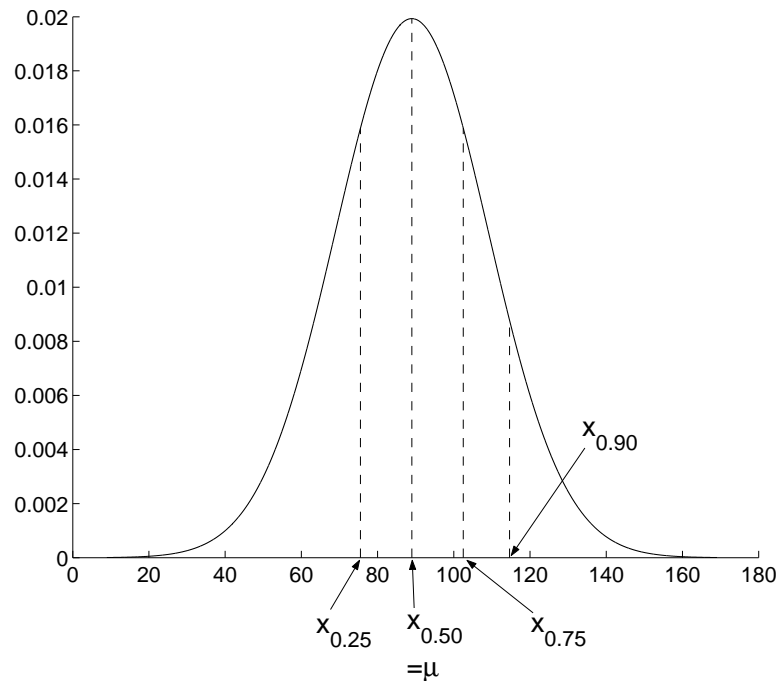
$$x_{0.25} = \mu + u_{0.25} \sigma \implies \sigma = \frac{x_{0.25} - \mu}{u_{0.25}} = \frac{75.5 - 89}{-0.6745} = 20.02$$

(Tabelle: $u_{0.25} = -u_{0.75} = -0.6745$)

- (b) 75%-Quantil: $x_{0.75} = \mu + u_{0.75} \sigma = 102.5$

Bem.: Aus Symmetriegründen gilt hier $x_{0.75} = \mu + (\mu - 75.5) = 102.5$.

90%-Quantil: $x_{0.90} = \mu + \underbrace{u_{0.90}}_{1.2816} \sigma = 114.65$



- (c) Die Wahrscheinlichkeiten werden durch Standardisierung auf die Standardnormalverteilung zurückgeführt (Φ = Verteilungsfunktion der $N(0, 1)$):

$$W\{X \leq 100\} = \Phi\left(\frac{100 - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(0.5496) = 0.7087$$

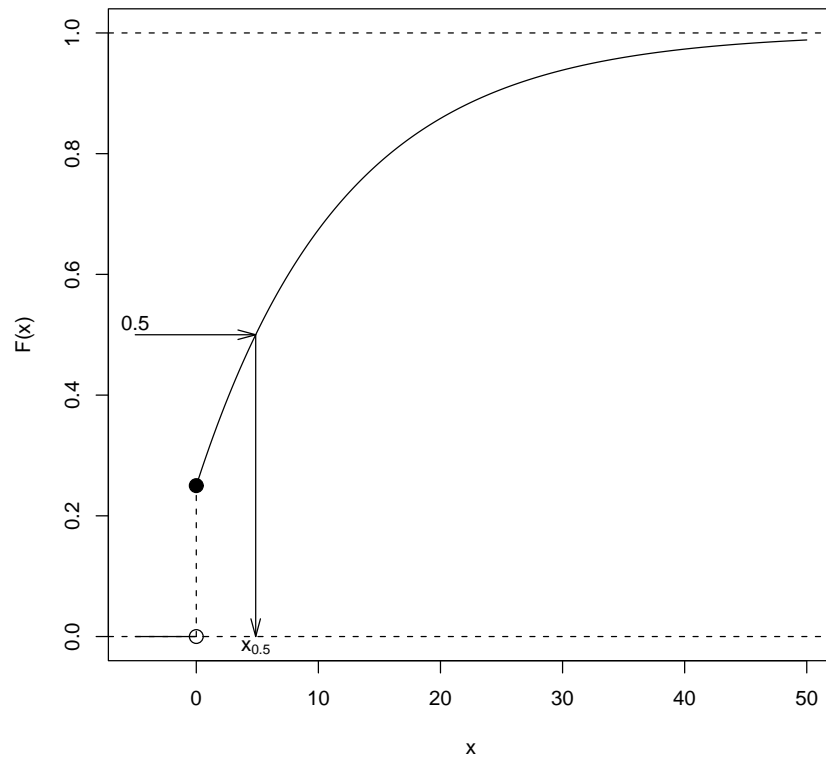
$$\begin{aligned} W\{X > 80\} &= 1 - W\{X \leq 80\} = 1 - \Phi\left(\frac{80 - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(-0.4497) = \\ &= 1 - [1 - \Phi(0.4497)] = \Phi(0.4497) = 0.6735 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W\{|X - \mu| > 10\} &= 1 - W\{|X - \mu| \leq 10\} \\ &= 1 - W\{\mu - 10 \leq X \leq \mu + 10\} = \\ &= 1 - \left[\Phi\left(\frac{\mu + 10 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - 10 - \mu}{\sigma}\right) \right] = \\ &= 1 - \left[\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-10}{\sigma}\right) \right] = 2 \left[1 - \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) \right] = \\ &= 2 [1 - \Phi(0.4996)] = 2 [1 - 0.6913] = 0.6173 \end{aligned}$$

Bem.: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

6. (a) Die Wartezeit hat eine gemischte Verteilung; ihre Verteilungsfunktion ist gegeben wie folgt:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - \frac{3}{4} e^{-x/12} & x \geq 0 \end{cases}$$



(b)

$$F(x_{0.5}) = \frac{1}{2} \implies x_{0.5} = -12 \ln\left(\frac{2}{3}\right) = 4.87 \text{ [Min]}$$

(c)

$$W\{X > 20 | X > 10\} = \frac{W\{X > 20\}}{W\{X > 10\}} = \frac{e^{-20/12}}{e^{-10/12}} = e^{-5/6} = 0.435$$

Bem.: Im Gegensatz zu **Bsp 5.3** gilt hier:

$$W\{X > 10\} = \frac{3}{4} e^{-5/6} < e^{-5/6}$$

D.h., (die Verteilung von) X hat ein „Gedächtnis“.