

Ue Statistik u. Wahrscheinlichkeitsth. f. Inf. 107.251 W 2005 6 http://www.statistik.tuwien.ac.at/RISueb/	Di 12:00 – 18:00
	7.Blatt
Werner GURKER Tel.: 58801-10724 Spr.: Di u. Do 11-12 e-mail: W.Gurker@tuwien.ac.at	6. Dez. 2005

- Die Anzahl N_t von „Ereignissen“ (z.B. Telefonanrufe, Aufträge an einen Drucker oder Server, etc.) im Zeitintervall $(0, t]$ sei eine nach $P_{\lambda t}$ verteilte sG und T_r sei die Zeitspanne bis zum Auftreten des r -ten Ereignisses.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von T_1 .

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $W\{T_1 > x\} = W\{N_x = 0\}$.

*(b) Bestimmen Sie die Verteilung von T_r für $r > 1$.

- X sei eine nach χ_n^2 verteilte sG; bestimmen Sie die Dichte von $Y = \sqrt{X/n}$. Verwenden Sie dazu den Transformationssatz für Dichten.

- Die sG X sei stetig uniform verteilt auf dem Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$: ermitteln Sie für $Y = \cos(X)$:

(a) die Verteilungsfunktion (+ Skizze/Zeichnung);

(b) die Dichtefunktion (+ Skizze/Zeichnung);

(c) den Mittelwert;

*(d) die Varianz.

- X sei eine stetige sG mit Dichte $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Ermitteln Sie einen allgemeinen Ausdruck für die Dichte von $Z = X^2$. Überprüfen Sie die Gültigkeit des Ausdrucks an Hand des Beispiels aus der Vorlesung mit $X \sim N(0, 1)$.

- (a) Wie kann man Beobachtungen einer stochastischen Größe mit der folgenden Dichte simulieren?

$$f(x) = \frac{\alpha x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}}, \quad x \geq x_0; \quad \alpha, x_0 > 0$$

Gehen Sie von (auf $(0, 1)$) uniform verteilten Zufallszahlen aus.

*(b) Implementieren Sie die obige Simulation als R-Funktion. Überprüfen Sie die Funktion graphisch, indem Sie ein (Dichte-) Histogramm von $n = 1000$ so erzeugten Zahlen mit der Dichte $f(x)$ überlagern. Nehmen Sie konkret (i) $\alpha = 1$, $x_0 = 0.5$ und (ii) $\alpha = 3$, $x_0 = 1$.

- (a) Die Methode der Inversion der Verteilungsfunktion zur Simulation von Beobachtungen von sGn läßt sich auch bei diskreten (oder gemischten) Größen anwenden. Dabei stützt man sich auf eine verallgemeinerte Definition der Inversen einer Verteilungsfunktion:

$$F^{-1}(u) := \inf\{x : F(x) \geq u\}, \quad 0 < u < 1$$

Erläutern Sie graphisch, was diese Definition bedeutet.

- (b) Ein Algorithmus zur Erzeugung von poissonverteilten Beobachtungen, $X \sim P_\mu$, lautet wie folgt:

- (1) Erzeuge eine (auf $(0, 1)$) uniform verteilte Zahl U ;
- (2) Setze $i = 0$, $\alpha = e^{-\mu}$, $F = \alpha$;
- (3) Wenn $U \leq F$, setze $X = i$, stop;
- (4) Setze $\alpha = \frac{\mu\alpha}{i+1}$, $F = F + \alpha$, $i = i + 1$;
- (5) Gehe zu (3).

Zeigen Sie, daß dieser Algorithmus tatsächlich Beobachtungen einer Poisson-verteilung mit dem Parameter (= Mittelwert) μ generiert.

- *(c) Wie oft wird (3) im Mittel zur Erzeugung *einer* Poisson-Beobachtung aufgerufen?

Beispiel(teil)e mit (*) werden im Konversatorium behandelt.

Lösungen zum 7. Blatt

1. (a) Die Verteilungsfunktion von T_1 bestimmt man wie folgt ($x > 0$):

$$F_{T_1}(x) = W\{T_1 \leq x\} = 1 - W\{T_1 > x\} = 1 - W\{N_x = 0\} = 1 - e^{-\lambda x}$$

Die Dichte bekommt man durch Ableiten:

$$f_{T_1}(x) = F'_{T_1}(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

Also gilt: $T_1 \sim Ex_{1/\lambda}$.

- *(b) Die Verteilungsfunktion von T_r lässt sich auf analoge Weise bestimmen:

$$F_{T_r}(x) = 1 - W\{T_r > x\} = 1 - W\{N_x \leq r - 1\} = 1 - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\lambda x)^k e^{-\lambda x}}{k!}$$

Die Dichte bekommt man durch Ableiten:

$$\begin{aligned} f_{T_r}(x) = F'_{T_r}(x) &= - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{k(\lambda x)^{k-1} \lambda e^{-\lambda x} - (\lambda x)^k \lambda e^{-\lambda x}}{k!} \\ &= \lambda \left[\sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\lambda x)^k e^{-\lambda x}}{k!} - \sum_{k=1}^{r-1} \frac{(\lambda x)^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!} \right] \\ &= \lambda \frac{(\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x}}{(r-1)!} \\ &= \frac{x^{r-1} \lambda^r e^{-\lambda x}}{(r-1)!}, \quad x > 0 \end{aligned}$$

T_r ist also gammaverteilt: $T_r \sim Gam(r, 1/\lambda)$.

Bem.: Eine Gammaverteilung der obigen Art (d.h., der erste Parameter ist eine natürliche Zahl) nennt man auch *Erlangverteilung*.

2. Die Umkehrabbildung von $y = \sqrt{x/n}$ ist gegeben durch $x = ny^2$; nach dem Transformationssatz für Dichten gilt:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(ny^2) \left| \frac{dx}{dy} \right| = \frac{(ny^2)^{n/2-1} e^{-ny^2/2}}{\Gamma(n/2) 2^{n/2}} \cdot (2ny) \\ &= \frac{2(n/2)^{n/2} y^{n-1} e^{-ny^2/2}}{\Gamma(n/2)}, \quad y > 0 \end{aligned}$$

Bem.: Dies ist die Dichte einer χ -Verteilung mit n Freiheitsgraden.

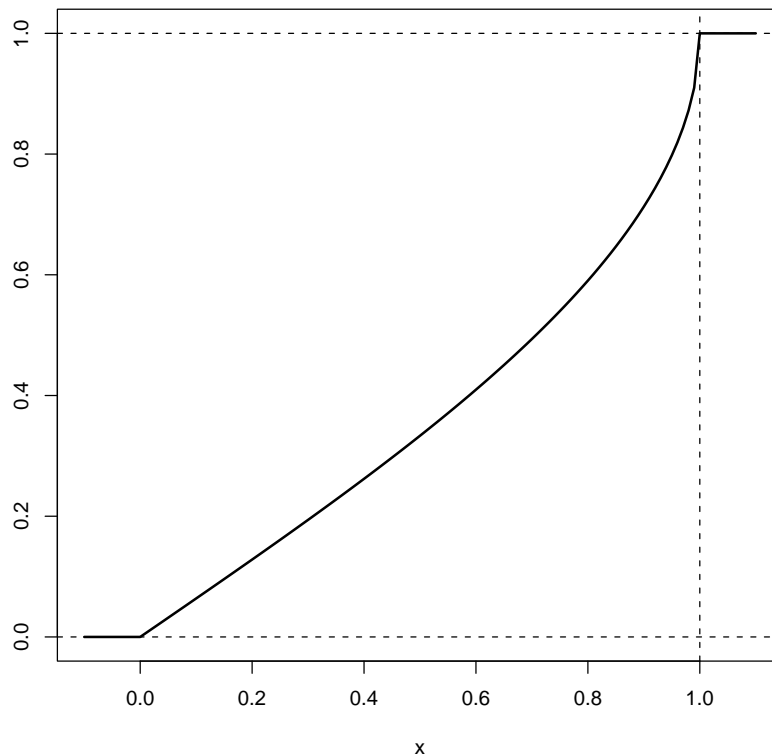
3. Die Verteilungsfunktion von X ist gegeben wie folgt:

$$F_X(x) = \frac{2x + \pi}{2\pi}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

(a) Verteilungsfunktion von $Y = \cos(X)$:

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= W\{\cos(X) \leq x\} = 1 - W\{\cos(X) > x\} \\ &= 1 - W\{-\arccos(x) \leq X \leq \arccos(x)\} \\ &= 1 - \left[\frac{2\arccos(x) + \pi}{2\pi} - \frac{-2\arccos(x) + \pi}{2\pi} \right] \\ &= 1 - \frac{2\arccos(x)}{\pi}, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

VF von $Y = \cos(X)$

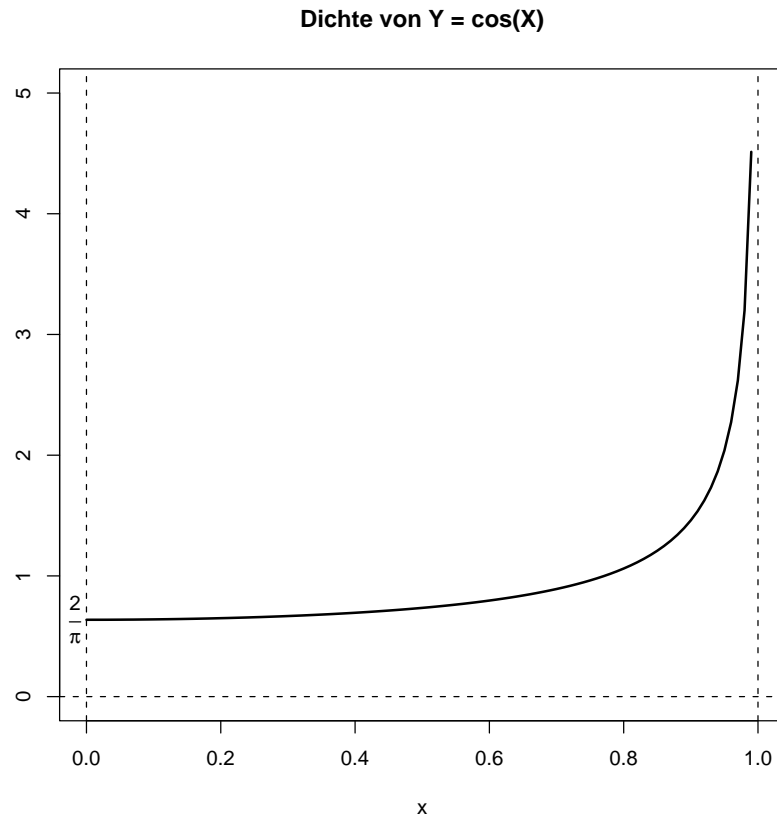


(b) Die Dichte ergibt sich durch Ableiten:

$$f_Y(x) = F'_Y(x) = \frac{2}{\pi \sqrt{1-x^2}}, \quad 0 \leq x < 1$$

(c) Den Erwartungswert von Y berechnet man am einfachsten mit dem Satz vom unbewußten Statistiker ($f_X(x) = 1/\pi$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$):

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x) \frac{1}{\pi} dx = \frac{\sin(x)}{\pi} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$$



*(d) Für die Berechnung der Varianz nutzt man die Beziehung:

$$2 \cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y^2) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(x) \frac{1}{\pi} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2x)}{2\pi} dx \\ &= \left. \frac{x + \sin(2x)/2}{2\pi} \right|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2} \\ \implies \text{Var}(Y) &= \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} = \frac{\pi^2 - 8}{2\pi^2} \end{aligned}$$

4. Zunächst ermittelt man die Verteilungsfunktion von $Z = X^2$:

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= W\{Z \leq x\} = W\{X^2 \leq x\} \\ &= W\{-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}\} \\ &= F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}), \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

Die Dichte ergibt sich durch Ableiten:

$$f_Z(x) = F'_Z(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} [f_X(\sqrt{x}) + f_X(-\sqrt{x})], \quad x > 0$$

Beispiel: $X \sim N(0, 1)$

$$\begin{aligned} f_Z(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x/2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x/2} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x/2} = \frac{x^{1/2-1} e^{-x/2}}{\sqrt{\pi} 2^{1/2}}, \quad x > 0 \end{aligned}$$

Dies ist die Dichte einer χ_1^2 -Verteilung.

5. (a) Bei Verwendung der Methode „Inversion der Verteilungsfunktion“ bestimmt man zunächst die Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \int_{x_0}^x \frac{\alpha x_0^\alpha}{u^{\alpha+1}} du = -\frac{x_0^\alpha}{u^\alpha} \Big|_{x_0}^x = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^\alpha, \quad x \geq x_0$$

$F(x)$ läßt sich einfach invertieren:

$$F^{-1}(u) = x_0 (1 - u)^{-1/\alpha}, \quad 0 < u < 1$$

Ist u eine (auf $(0, 1)$) uniform verteilte Zufallszahl, so ist $F^{-1}(u)$ eine nach $f(x)$ verteilte Zufallszahl:

$$u \longmapsto x_0 (1 - u)^{-1/\alpha}$$

Bemerkungen:

- (1) Wegen $U \sim U_{(0,1)} \Rightarrow 1 - U \sim U_{(0,1)}$ kann man anstelle von $1 - u$ im obigen Ausdruck auch u nehmen.
 - (2) Eine Verteilung mit der obigen Dichte nennt man *Pareto-Verteilung*; sie wird u.a. bei der Modellierung von CPU-Zeiten von beliebigen Prozessen, der Größe von Web-Files auf Internet-Servern oder der „Nachdenkzeit“ von Web-Browsern angewendet.
- *(b) Die folgenden R-Funktionen berechnen die Werte der Dichte bzw. erzeugen Zufallszahlen einer Pareto-Verteilung:

```
dpareto <- function(x,x0,alpha) {
  alpha*(x0^alpha)/x^(alpha+1) }

rpareto <- function(n,x0,alpha) {
  r.u <- runif(n)
  x0*r.u^(-1/alpha) }
```

Der Mittelwert einer Parateo-Verteilung existiert nur für $\alpha > 1$:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{x_0}^{\infty} x \frac{\alpha x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} dx = \int_{x_0}^{\infty} \frac{\alpha x_0^\alpha}{x^\alpha} dx < \infty \quad \text{für } \alpha > 1$$

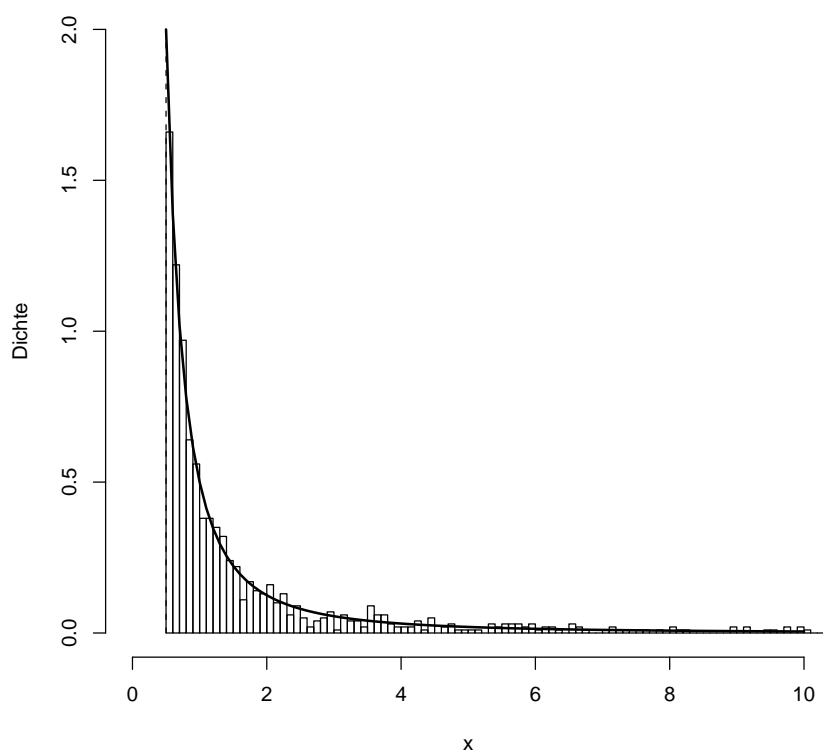
Die Varianz existiert nur für $\alpha > 2$:

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{x_0}^{\infty} x^2 \frac{\alpha x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} dx = \int_{x_0}^{\infty} \frac{\alpha x_0^\alpha}{x^{\alpha-1}} dx < \infty \quad \text{für } \alpha > 2$$

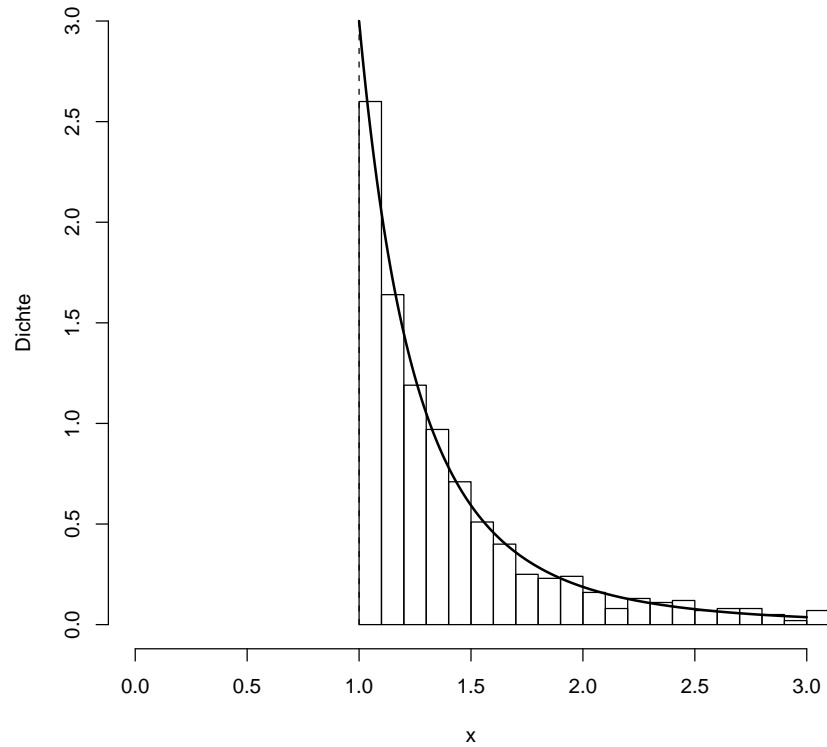
Dies wirkt sich u.a. dahingehend aus, daß für $\alpha \leq 2$ sehr große Werte mit positiver Wahrscheinlichkeit vorkommen können. Dieses Phänomen läßt sich auch bei den oben angeführten Beispielen beobachten, da bei diesen Anwendungen α meist deutlich kleiner als 2 ist (z.B. liegt bei der Nachdenkzeit eines Web-Browsers α typischerweise zwischen 0.6 und 0.9).

Im ersten Fall (mit $\alpha = 1$ und $x_0 = 0.5$) war die größte Zufallszahl etwa 460; aus diesem Grund wird die Darstellung auf den Bereich $[x_0, x_0 \cdot 0.05^{-1/\alpha}]$ eingeschränkt ($x_0 \cdot 0.05^{-1/\alpha}$ ist das 95%-Quantil der Verteilung; vgl. (a)). Solche „Ausreißer“ gibt es im zweiten Fall (mit $\alpha = 3$ und $x_0 = 1$) nicht.

$$(\alpha, x_0) = (1, 0.5)$$



$$(\alpha, x_0) = (3, 1)$$



Bem.: Die Abbildungen wurden mit den folgenden R-Commands erstellt:

```
alpha <- 1; x0 <- 0.5 # 1. Abb.
#alpha <- 3; x0 <- 1 # 2. Abb.
n <- 1000
delta <- 0.95
x <- rpareto(n,x0,alpha)
h <- hist(x, breaks=seq(x0,max(x)+1,by=0.1), prob=TRUE, plot=FALSE)
ylim <- range(0, h$density, alpha/x0)
hist(x, breaks=seq(x0,max(x)+1,by=0.1), prob=TRUE,
      xlim=c(0,ceiling(x0*(1-delta)^(-1/alpha))), ylim=ylim, ylab="Dichte",
      main=substitute(group("(",list(alpha,x[0]),")")==group("(",list(a,b),")"),
      list(a=alpha,b=x0)))
x1 <- seq(x0, ceiling(x0*(1-delta)^(-1/alpha)), by=0.1)
lines(x1, dpareto(x1,x0,alpha), lty=1, lwd=2)
lines(c(x0,x0), c(0,alpha/x0), lty=2)
```

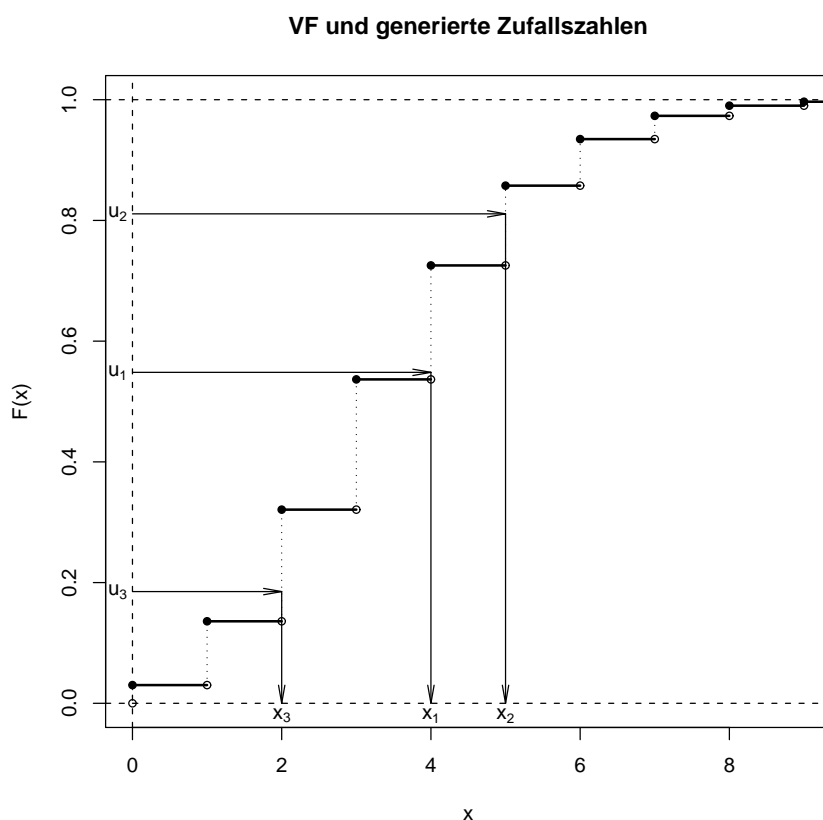
Sie finden diese Zeilen (und die beiden obigen Funktionen) unter **b75.r** auf der Übungs-Homepage.

6. (a) Mit $X \sim p_X(x)$, $x \in \mathbb{Z}$, und $U \sim U_{(0,1)}$ gilt nach Definition von $F_X^{-1}(u)$:

$$\begin{aligned} W\{F_X^{-1}(U) = k\} &= W\{F_X(k-1) < U \leq F_X(k)\} \\ &= F_X(k) - F_X(k-1) \\ &= W\{X = k\}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Um eine Beobachtung von X zu generieren, nimmt man also die kleinste ganze Zahl k , sodaß $F_X(k) \geq u$, für eine vorher generierte uniform verteilte

Zufallszahl u . Dies ist exemplarisch in der folgenden Abbildung für eine $P_{3.5}$ -Verteilung und 3 generierte Zufallszahlen dargestellt. (Hier lauten die Zahlen, in der Reihenfolge ihrer Erzeugung, 4, 5, 2.)



- (b) Der angegebene Algorithmus realisiert die obige Prozedur für eine poisson-verteilte sG. Zur schnelleren Berechnung von F_X wird dabei eine Rekursion verwendet (Rekursionsanfang: $W\{X = 0\} = e^{-\mu}$):

$$W\{X = i + 1\} = \frac{\mu^{i+1} e^{-\mu}}{(i + 1)!} = \frac{\mu}{i + 1} \cdot \frac{\mu^i e^{-\mu}}{i!} = \frac{\mu}{i + 1} W\{X = i\}$$

- *(c) Allgemein wird Schritt (3) genau dann k Mal aufgerufen, wenn U zwischen $F_X(k - 2)$ und $F_X(k - 1)$ liegt; die Wahrscheinlichkeit dafür ist $p_X(k - 1)$. Der Erwartungswert für die Anzahl Y der Aufrufe von (3) ist also:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=1}^{\infty} k p_X(k - 1) = \sum_{k=0}^{\infty} (k + 1) p_X(k) \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} k p_X(k)}_{=\mathbb{E}(X)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} p_X(k)}_{=1} = \mathbb{E}(X) + 1 \end{aligned}$$

Für eine P_{μ} -Verteilung gilt: $\mathbb{E}(Y) = \mu + 1$.