1

Algebraische Signaloperationen:

Aus dem Signal

$$x_0(\tau) = \tau \cdot \varepsilon(\tau + 1)$$

wird das Signal

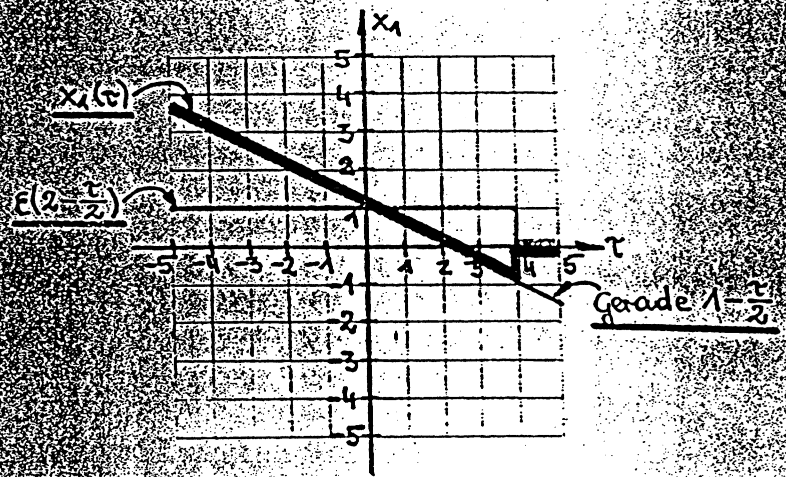
$$x_1(\tau) = x_0(1 - \tau / 2)$$

gewonnen. Skizzieren Sie den Verlauf von $x_1(\tau)$.

LÖSUNG:

$$\underline{\underline{x_1(\tau) = x_0\left(1-\frac{\tau}{2}\right)}} = \left(1-\frac{\tau}{2}\right)\varepsilon\left(1-\frac{\tau}{2}+1\right) = \underline{\underline{\left(1-\frac{\tau}{2}\right)\varepsilon\left(2-\frac{\tau}{2}\right)}}$$

Die Multiplikation mit dem Heaviside-Sprung schneidet jenen Funktionsteil ab für den das Argument des Heaviside-Sprungs negative Werte annimmt, d.h. $2-\frac{\tau'}{2} < 0$ ist. Daraus folgt die Bedingung $\tau' > 4$. $1-\frac{\tau}{2}$ stellt eine Geradengleichung dar.



$\varepsilon(2-\frac{\tau}{2})$ $\varepsilon(\frac{4-\tau}{2})$

$\varepsilon(\tau \leq 0)$ $\tau < 0$

$4-\tau<0$

$\tau > 4$ $4 < \tau$

$-\frac{1}{2}\tau+1 \rightarrow$ Gerad

Algebraische Signaloperationen 2:

Aus dem Signal

$$x_0(\tau) = sin(\pi \cdot \tau) \cdot \varepsilon(\tau + 1/2)$$

wird das Signal

$$x_1(\tau) = 2 \cdot x_0(2 \cdot \tau - 2)$$

gewonnen. Skizzieren Sie den Verlauf von $x_1(\tau)$.

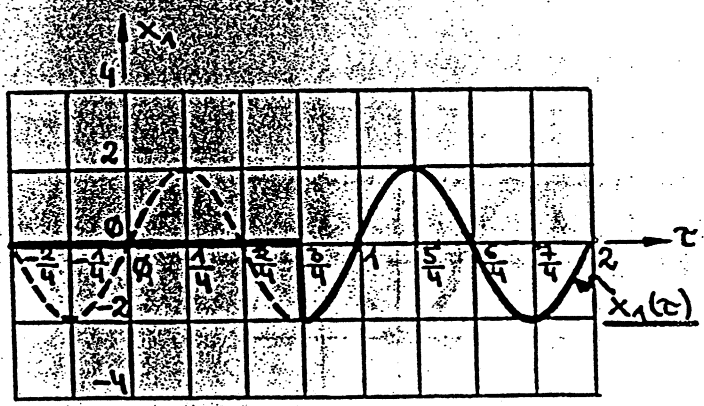
LÖSUNG:

$x_1(\tau) = 2x_0(2\tau-2) = 2\sin[\pi(2\tau-2)]\,\varepsilon(2\tau-2+\frac{1}{2}) = 2\sin(2\pi\tau-2\pi)\,\varepsilon(2\tau-\frac{3}{2})$

mit der Beziehung $\sin(\alpha-2\pi)=\sin(\alpha)$ folgt $\underline{\underline{x_1(\tau)=2\sin(2\pi\tau)\,\varepsilon(2\tau-\frac{3}{2})}}$.

Damit der Heaviside-Sprung eins liefert muß sein Argument größer als null sein, also $2\tau'-\frac{3}{2}>0$, d.h. $\tau'>\frac{3}{4}$.

$2\sin(2\pi\tau)$ stellt eine 1-periodische Sinusschwingung mit der Amplitude 2 dar.



Falsch – Ich glaube ich zumindest

Algebraische Signaloperationen 3:

Aus dem Signal

$$x_0(\tau) = \cos(\pi \cdot \tau) \cdot \varepsilon(\tau + 2)$$

wird das Signal

$$x_1(\tau) = x_0(2 \cdot \tau - 1)$$

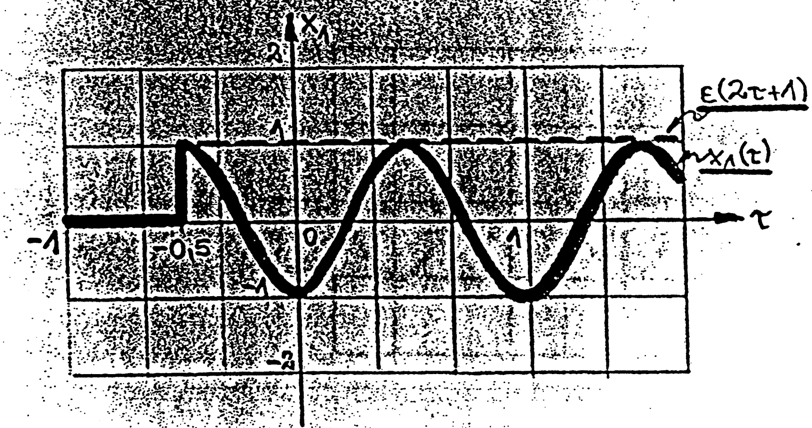
gewonnen. Skizzieren Sie den Verlauf von $x_1(\tau)$.

LÖSUNG:

$x_1(\tau) = x_0(2\tau-1) = \cos[\pi(2\tau-1)]\,\varepsilon(2\tau-1+2) = \cos(2\pi\tau-\pi)\,\varepsilon(2\tau+1)$

mit der Beziehung $\cos(\alpha-\pi) = -\cos(\alpha)$ folgt $\underline{\underline{x_1(\tau) = -\cos(2\pi\tau)\varepsilon(2\tau+1)}}$

Damit der Heaviside-Sprung eins liefert muß sein Argument größer als null sein, also $2\tau+1>0$, d.h. $\tau' > -\frac{1}{2}$. $-\cos(2\pi\tau)$ stellt eine 1-periodische Cosinusschwingung mit der Amplitude 1 dar.



4

Abgetastete Sprungantwort:

Berechnen Sie für ein LTI-System, dessen diskrete Impulsantwort mit

$$g^T(k) = 2^{-k} \quad , k = 1,2,...$$

bekannt ist, die abgetastete Sprungantwort.

LÖSUNG:

Zwischen der diskreten Impulsantwort und der abgetasteten Sprungantwort besteht der allg. Zusammenhang

$$\underline{h^T(k) = \sum_{k'=1}^{k} g^T(k')} \; .$$

Speziell mit $g^T(k) = 2^{-k}$ folgt

$$h^T(k) = \sum_{k'=1}^{k} 2^{-k'} = \sum_{k'=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k'} = \frac{1}{2} \sum_{k'=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k'-1}$$

was einer $\boxed{\text{geometrischen Reihe}}$ der Form

$$\sum_{k'=1}^{k} q^{k'-1}$$

mit $q = \frac{1}{2}$ entspricht. deren allg. Summe

$$\frac{1-q^k}{1-q}$$

ist. Wir erhalten schließlich das Endergebnis

$$\underline{\underline{h^T(k)}} = \frac{1}{2} \, \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\frac{1}{2}} \underline{\underline{= 1-\left(\frac{1}{2}\right)^k}} .$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1}{1-q} \qquad |q| < 1$$

$$\boxed{S_n = \sum_{n=0}^{k\to\infty} a_0 q^n = a_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q-1}}$$

5

Diskrete Impulsantwort:

Berechnen Sie für ein System mit der Stoßantwort = Impulsantwort

$g(\tau) = (1 - e^{-\tau}) \cdot \varepsilon(\tau)$

die diskrete Impulsantwort, wenn 5 Abtastungen je Bezugsdauer vorgenommen werden.

LÖSUNG:

Die diskrete Impulsantwort errechnet sich aus der Stoßantwort zu

$$g^T(k) = \int_{(k-1)\frac{T}{T_B}}^{k\frac{T}{T_B}} g(\tau')\,d\tau' = \int_{(k-1)\frac{T}{T_B}}^{k\frac{T}{T_B}} (1 - e^{-\tau'})\,d\tau' = \left(\tau' + e^{-\tau'}\right)\Big|_{(k-1)\frac{T}{T_B}}^{k\frac{T}{T_B}}$$

$$g^T(k) = k\frac{T}{T_B} - (k-1)\frac{T}{T_B} + e^{-k\frac{T}{T_B}} - e^{-(k-1)\frac{T}{T_B}} = \frac{T}{T_B} + e^{-k\frac{T}{T_B}}\left(1 - e^{\frac{T}{T_B}}\right)$$

mit $\frac{T}{T_B} = \frac{1}{5} = 0{,}2$ (5 Abtastungen je Bezugsdauer) folgt:

$$\underline{\underline{g^T(k) = 0{,}2 + e^{-0{,}2k}\left(1 - e^{0{,}2}\right) \approx 0{,}2 - 0{,}221\,e^{-0{,}2k}}}\,.$$

I

6

Diskrete Impulsantwort 2:

$\delta(\tau) = 1$ при $\tau = 0$

$\tau \neq 0 \Rightarrow \delta(\tau) = 0$

Ein LTI-System besitzt die Sprungantwort

$$h(\tau) = (1 + 0{,}5 \cdot e^{-2\cdot\tau}) \cdot \varepsilon(\tau) .$$

Berechnen Sie seine diskrete Impulsantwort, wenn 10 Abtastungen je Bezugsdauer vorgenommen werden.

LÖSUNG:

Die Stoßantwort erhält man durch verallgemeinerte Differentiation der Sprungantwort.

$$g(\tau) = \{h^{(1)}(\tau)\} + [\![h(\tau)]\!]\,\varepsilon^{(1)}(\tau)$$

bei $(\tau = 0) = 1{,}5$

Seite 53

$$g(\tau) = -e^{-2\tau}\varepsilon(\tau) + 1{,}5\,\delta(\tau)$$

Die diskrete Impulsantwort errechnet sich aus der Stoßantwort zu

$$g^T(k) = \int_{0-}^{T/T_B} g(kT/T_B - \tau')\,d\tau'$$

$$g^T(k) = \int_{(k-1)T/T_B}^{kT/T_B} -e^{-2\tau'}\,d\tau' + 1{,}5\int_{0-}^{T/T_B} \delta(kT/T_B - \tau')\,d\tau'$$

$$g^T(1) = \int_{0}^{T/T_B} -e^{-2\tau'}\,d\tau' + 1{,}5\int_{0-}^{T/T_B} \delta(T/T_B - \tau')\,d\tau'$$

$$g^T(1) = \frac{1}{2}e^{-2\tau'}\Big|_0^{T/T_B} + 1{,}5 = 0{,}5\left[e^{-2T/T_B} - 1\right] + 1{,}5$$

$$g^T(k) = \frac{1}{2}e^{-2\tau'}\Big|_{(k-1)T/T_B}^{kT/T_B} = \frac{1}{2}\left[e^{-2kT/T_B} - e^{-2(k-1)T/T_B}\right] \quad \text{für } k = 2,3,\ldots$$

Mit $\frac{T}{T_B} = \frac{1}{10} = 0{,}1$ (10 Abtastungen je Bezugsdauer) folgt

$$g^T(1) = 0{,}5\left[e^{-0{,}2} - 1\right] + 1{,}5 \approx 1{,}4 \quad \text{und}$$

$$g^T(k) = 0{,}5\left[e^{-0{,}2k} - e^{-0{,}2(k-1)}\right] \quad \text{für } k = 2,3,\ldots .$$

BEMERKUNG: Für $k = 2,3,\ldots$ ist der Dirac-Stoß nicht im Integrationsintervall enthalten.

Diskrete Impulsantwort 3:

Ein LTI-System besitzt die Sprungantwort

$$h(\tau)=(e^{-2\cdot\tau}-1)\cdot\varepsilon(\tau) \; .$$

Berechnen Sie seine diskrete Impulsantwort, wenn 10 Abtastungen je Bezugsdauer vorgenommen werden.

LÖSUNG:

Die Stoßantwort erhält man durch verallgemeinerte Differentiation der Sprungantwort.

$$g(\tau)=\{h^{(1)}(\tau)\}+[h(\tau)]\,\varepsilon^{(1)}(\tau)$$

$$g(\tau)=-2e^{-2\tau}\,\varepsilon(\tau)$$

Die diskrete Impulsantwort errechnet sich aus der Stoßantwort zu

$$g^T(k)=\int_{(k-1)\frac{T}{T_B}}^{k\frac{T}{T_B}} g(\tau')\,d\tau' = \int_{(k-1)\frac{T}{T_B}}^{k\frac{T}{T_B}} -2e^{-2\tau'}\,d\tau' = e^{-2\tau'}\Big|_{(k-1)\frac{T}{T_B}}^{k\frac{T}{T_B}}$$

$$g^T(k)=e^{-2k\frac{T}{T_B}}-e^{-2(k-1)\frac{T}{T_B}}$$

mit $\frac{T}{T_B}=\frac{1}{10}=0{,}1$ (10 Abtastungen je Bezugsdauer) folgt

$$g^T(k)=e^{-0{,}2k}-e^{-0{,}2(k-1)} \; .$$

Sprungantwort aus Stoßantwort:

Ein LTI-System besitzt die Stoßantwort

$$g(\tau) = 2\delta(\tau) - e^{-\tau/2}\,\varepsilon(\tau) - \delta(\tau-3)\ .$$

Berechnen und skizzieren Sie seine Sprungantwort.

LÖSUNG:

Die zur Stoßantwort

$$g(\tau) = 2\,\delta(\tau) - e^{-\frac{\tau}{2}}\,\varepsilon(\tau) - \delta(\tau-3)$$

gehörende Sprungantwort erhält man durch Integration zu

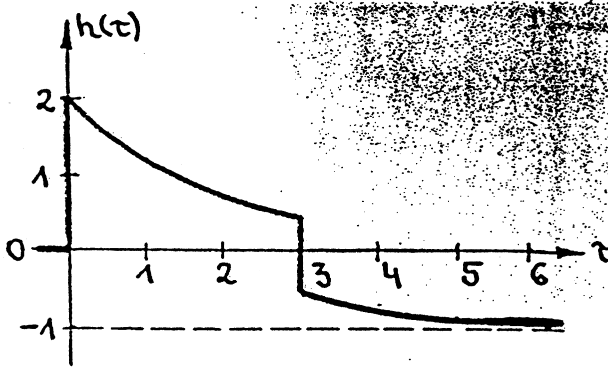
$$h(\tau) = \int_0^\tau g(\tau')\,d\tau' = \int_0^\tau \left[2\delta(\tau') - e^{-\frac{\tau'}{2}}\varepsilon(\tau') - \delta(\tau'-3)\right] d\tau'$$

$$h(\tau) = 2\int_0^\tau \delta(\tau')\,d\tau' - \int_0^\tau e^{-\frac{\tau'}{2}}\varepsilon(\tau')\,d\tau' - \int_0^\tau \delta(\tau'-3)\,d\tau'$$

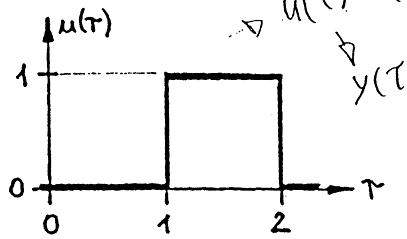
mit $\varepsilon(\tau) = \int_0^\tau \delta(\tau')\,d\tau'$ folgt

$$h(\tau) = 2\varepsilon(\tau) + 2e^{-\frac{\tau'}{2}}\varepsilon(\tau)\Big|_0^\tau - \varepsilon(\tau-3) = 2\varepsilon(\tau) + 2\left[e^{-\frac{\tau}{2}} - 1\right]\varepsilon(\tau) - \varepsilon(\tau-3).$$

$$\underline{\underline{h(\tau) = 2e^{-\frac{\tau}{2}}\,\varepsilon(\tau) - \varepsilon(\tau-3)}}$$



Vollständige Systemantwort:



u(τ) = ...
y(τ) = ...

Von einem linearen, zeitinvarianten System ist die Sprungantwort

$$h(\tau) = e^{-\tau} \cdot \varepsilon(\tau) + \varepsilon(\tau - 1)$$

bekannt.

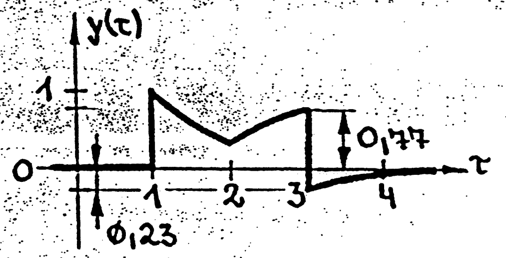
Berechnen Sie die Antwort $y(\tau)$ des Systems auf das skizzierte Eingangssignal.

LÖSUNG:

Die (Nullzustands) Antwort des Systems auf den Eingang $u(\tau) = \varepsilon(\tau-1) - \varepsilon(\tau-2)$ folgt unmittelbar aus der Sprungantwort $h(\tau) = e^{-\tau}\varepsilon(\tau) + \varepsilon(\tau-1)$ über das Überlagerungsprinzip zu

$$y(\tau) = h(\tau-1) - h(\tau-2) = e^{-(\tau-1)}\varepsilon(\tau-1) + \varepsilon(\tau-2) - e^{-(\tau-2)}\varepsilon(\tau-2) - \varepsilon(\tau-3)$$

$$\underline{\underline{y(\tau) = e^{-(\tau-1)}\varepsilon(\tau-1) + \left[1 - e^{-(\tau-2)}\right]\varepsilon(\tau-2) - \varepsilon(\tau-3)}}.$$



10

Gerader und ungerader Anteil eines Signals:

Berechnen und skizzieren Sie den geraden und ungeraden Anteil des Signals

$$x(\tau) = Ae^{-\sigma\tau}\varepsilon(\tau).$$

LÖSUNG:

$$x(\tau) = Ae^{-\sigma\tau}\varepsilon(\tau)$$

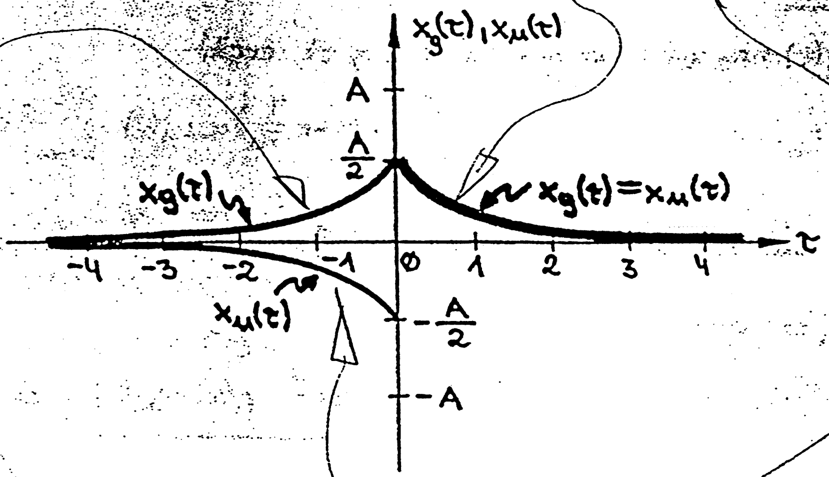
gerader Anteil: $\boxed{x_g(\tau) = \frac{1}{2}[x(\tau) + x(-\tau)]}$

$$x_g(\tau) = \frac{1}{2}A[e^{-\sigma\tau}\varepsilon(\tau) + e^{\sigma\tau}\varepsilon(-\tau)]$$

$$x_g(\tau) = \frac{A}{2}[e^{-\sigma\tau}\varepsilon(\tau) + e^{\sigma\tau}\varepsilon(-\tau)]$$

ungerader Anteil: $\boxed{x_u(\tau) = \frac{1}{2}[x(\tau) - x(-\tau)]}$

$$x_u(\tau) = \frac{A}{2}[e^{-\sigma\tau}\varepsilon(\tau) - e^{\sigma\tau}\varepsilon(-\tau)]$$



gerade F $\quad f(x) = f(-x)$

ungerade F $\quad f(x) = -f(-x)$

Linearität und Zeitinvarianz eines Systems:

Die Beziehung zwischen Eingangsgröße u und Ausgangsgröße y eines Systems ist mit

$$y(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\tau-nT/T_B\right)u(\tau)$$

gegeben.

Ist diese Beziehung und damit das System

(i) linear,

(ii) zeitinvariant ?

Begründen Sie jeweils vollständig.

LÖSUNG:

$$y(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\tau-n\frac{T}{T_B}\right)u(\tau)$$

(i) LINEARITÄT:

$\boxed{u(\tau)=\alpha_1 u_1(\tau)+\alpha_2 u_2(\tau)}$ eingesetzt in $y(\tau)$ ergibt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\tau-n\frac{T}{T_B}\right)\left[\alpha_1 u_1(\tau)+\alpha_2 u_2(\tau)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\tau-n\frac{T}{T_B}\right)\alpha_1 u_1(\tau)+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\tau-n\frac{T}{T_B}\right)\alpha_2 u_2(\tau)$$

Ist $y_1(\tau)$ die Antwort des Systems auf $u_1(\tau)$ und $y_2(\tau)$ die Antwort auf $u_2(\tau)$, so gilt

$$\alpha_1\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\tau-\frac{nT}{T_B}\right)u_1(\tau)+\alpha_2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\tau-\frac{nT}{T_B}\right)u_2(\tau)\overset{!}{=}y_1(\tau)+y_2(\tau)$$

, d.h. das System ist linear !

(ii) ZEITINVARIANZ:

Ein System ist zeitinvariant, wenn $u(\tau-\tau_0)$ den zeitverschobenen Ausgang $y(\tau-\tau_0)$ hervorruft und zwar für beliebiges τ_0, vorausgesetzt die Anfangsbedingungen werden ebenfalls zum Zeitpunkt τ_0 verschobe[n]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\tau-\tau_0-n\frac{T}{T_B}\right)u(\tau-\tau_0)=y(\tau-\tau_0)\overset{!}{\neq}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\tau-n\frac{T}{T_B}\right)u(\tau-\tau_0)$$

, d.h. das System ist zeitvariabel !

Duhamelsches Integral:

In Analogie zum Faltungsintegral, welches die Stoßantwort $g(\tau)$ eines Systems als bekannt voraussetzt, läßt sich die Systemantwort auf ein Eingangssignal $u(\tau)$ bei bekannter Sprungantwort $h(\tau)$ mit Hilfe des Integrals von Duhamel

$$y(\tau) = h(\tau)\, u(0-) + \int_{0-}^{\infty} h(\tau - \tau')\, u^{(1)}(\tau')\, d\tau'$$

berechnen. $u(\tau) = \varepsilon(\tau) \quad u'(\tau) = \delta(\tau)$

(*i*) Zeigen Sie, daß es sich bei $h(\tau)$ um die Sprungantwort des Systems handelt.
(*ii*) Leiten Sie das Duhamel-Integral aus dem Faltungsintegral ab.

LÖSUNG:

(i) Für den Eingang $u(\tau) = \varepsilon(\tau)$ erhält man durch verallgemeinerte Differentiation $u^{(1)}(\tau) = \{u^{(1)}(\tau)\} + [\![u(\tau)]\!]\varepsilon^{(1)}(\tau) = \delta(\tau)$ und damit

$$y(\tau) = h(\tau)\varepsilon(0-) + \int_{0-}^{\infty} h(\tau-\tau')\,\delta(\tau')\,d\tau' = h(\tau) \quad \text{q.e.d.}$$

(ii) Ausgehend vom Nullzustand des Systems folgt aus dem Faltungsintegral $y(\tau) = \int_{0-}^{\tau^+} g(\tau')\,u(\tau-\tau')\,d\tau'$ mit $g(\tau') = h^{(1)}(\tau')$:

$$y(\tau) = \int_{0-}^{\tau^+} g(\tau')\,u(\tau-\tau')\,d\tau' = \int_{0-}^{\tau^+} h^{(1)}(\tau')\,u(\tau-\tau')\,d\tau'.$$

Durch partielle Integration $\int v w' = v w - \int v' w$ mit $v = u(\tau-\tau')$, $v' = -u^{(1)}(\tau-\tau')$ und $w' = h^{(1)}(\tau')$, $w = h(\tau')$ erhält man

$$y(\tau) = h(\tau')\,u(\tau-\tau')\Big|_{0-}^{\tau^+} + \int_{0-}^{\tau^+} h(\tau')\,u^{(1)}(\tau-\tau')\,d\tau'$$

$$y(\tau) = h(\tau)\,u(\tau-\tau^+) - h(0-)\,u(\tau-0-) + \int_{0-}^{\tau^+} h(\tau')\,u^{(1)}(\tau-\tau')\,d\tau'$$

Der zweite Term verschwindet wegen $h(0-) = 0$ für kausale Systeme. Die Integration muß deshalb nach τ^+ erstreckt werden, um sicherzustellen, daß eventuell vorhandene Stöße bei τ berücksichtigt werden!

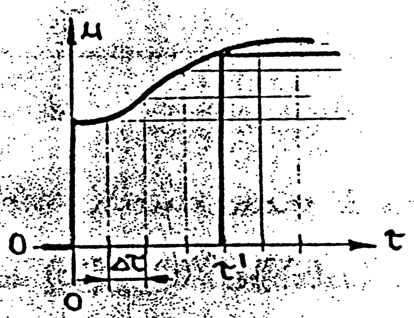
Substituiert man $\tau-\tau'$ durch τ' und τ' durch $\tau-\tau'$ so erhält man schließlich das <u>Endergebnis:</u>

$$\underline{\underline{y(\tau) = h(\tau)\,u(0-) + \int_{0-}^{\infty} h(\tau-\tau')\,u^{(1)}(\tau')\,d\tau'.}}$$

Die <u>obere Integrationsgrenze</u> kann <u>für kausale Systeme</u> von τ^+ <u>auf ∞ ausgedehnt</u> werden.

BEMERKUNGEN ZUM DUHAMEL INTEGRAL:

<u>1. Bedeutung und Interpretation:</u> Das Duhamel-Integral ergibt sich als



dem Grenzwert der Summe

$$y(\tau) \approx h(\tau)\,u(0) + \sum_{\tau'=0}^{\tau} \frac{du}{d\tau}\,\Delta\tau\, h(\tau-\tau')\,,$$

bei der eine beliebige Erregerfunktion durch Einheitssprünge (Heaviside-Sprünge) angenähert wird.

<u>2. Andere Schreibweisen:</u> $\underline{y(\tau) = h(\tau)\,u(0-) + \int_{0-}^{\tau} h(\tau')\,u^{(1)}(\tau-\tau')\,d\tau'}$

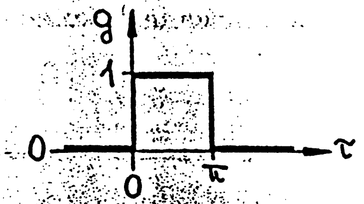
Mit der Differentiationsregel nach der oberen Grenze

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \varphi(x,z)\,dz = \varphi(x,x) + \int_0^x \frac{d\varphi(x,z)}{dx}\,dz$$ folgt

$$\underline{y(\tau) = \frac{d}{d\tau}\int_0^{\tau} u(\tau-\tau')\,y(\tau')\,d\tau'}$$

14

Nullzustandsantwort eines LTI-Systems:



Ein LTI-System besitzt die skizzierte Stoßantwort. Berechnen Sie seine Nullzustandsantwort auf das Eingangssignal $u(\tau)=\cos(\tau)\cdot\varepsilon(\tau)$.

F.

LÖSUNG:

$g(\tau)=\varepsilon(\tau)-\varepsilon(\tau-\pi)$; $u(\tau)=\cos(\tau)\varepsilon(\tau)$ eingesetzt ins Faltungsintegral liefert

$$y_{0z}(\tau)=\int_{0-}^{\infty} g(\tau-\tau')u(\tau')\,d\tau'=\int_{0-}^{\infty}[\varepsilon(\tau-\tau')-\varepsilon(\tau-\pi-\tau')]\cos(\tau')\varepsilon(\tau')\,d\tau'$$

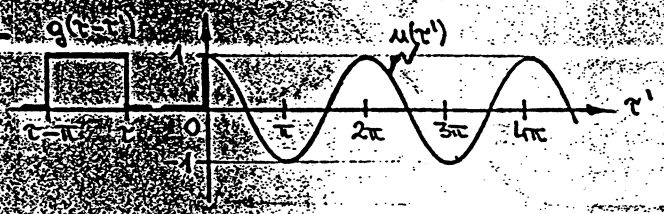
$$y_{0z}(\tau)=\int_{0-}^{\infty}\cos(\tau')\varepsilon(\tau-\tau')\varepsilon(\tau')\,d\tau'-\int_{0-}^{\infty}\cos(\tau')\varepsilon(\tau-\pi-\tau')\varepsilon(\tau')\,d\tau'$$

Das Produkt $\varepsilon(\tau-\tau')\varepsilon(\tau')$ bzw. $\varepsilon(\tau-\pi-\tau')\varepsilon(\tau')$ erzeugt eine Begrenzung des Integrationsintervalls und eine Zeitverschiebung.

$$y_{0z}(\tau)=\varepsilon(\tau)[\sin(\tau')]\Big|_0^{\tau}-\varepsilon(\tau-\pi)[\sin(\tau')]\Big|_0^{\tau-\pi}=\underline{\underline{\sin(\tau)\varepsilon(\tau)-\sin(\tau-\pi)\varepsilon(\tau-\pi)}}$$

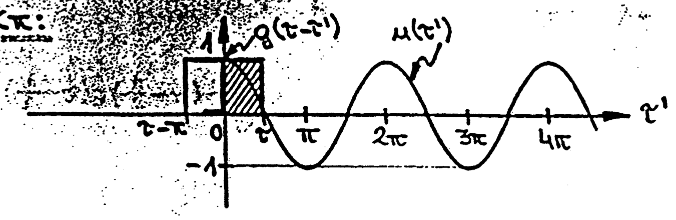
Andere Berechnungsmöglichkeit:

$\tau<0$:



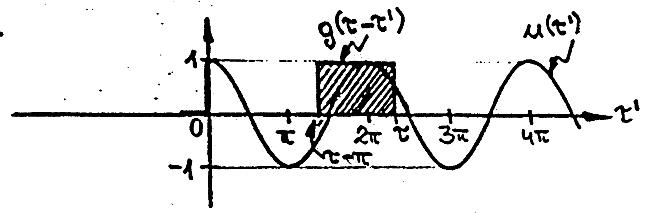
keine Überlappung von $g(\tau-\tau')$ und $u(\tau')$: $y_{0z}(\tau)=$

$0<\tau<\pi$:



$$y_{0z}(\tau)=\int_0^{\tau}1\cdot\cos(\tau')\,d\tau'=\sin(\tau)$$

$\tau>\pi$:



$$y_{0z}(\tau)=\int_{\tau-\pi}^{\tau}1\cdot\cos(\tau')\,d\tau'=\sin(\tau)-\text{si}$$

Alle drei zusammengefaßt ergibt $y_{0z}(\tau)=\sin(\tau)[\varepsilon(\tau)-\varepsilon(\tau-\pi)]+[\sin(\tau)-\sin(\tau-\pi$

$$\underline{\underline{y_{0z}(\tau)=\sin(\tau)\varepsilon(\tau)-\sin(\tau-\pi)\varepsilon(\tau-\pi)}}$$

I

15

Nullzustandsantwort eines LTI-Systems 2:

$\to h(\tau) \to \to y(\tau)$

Ein LTI-System besitzt die Stoßantwort $g(\tau)=\varepsilon(\tau)$. Berechnen und skizzieren Sie die Nullzustandsantwort auf das Eingangssignal $u(\tau)=rect(\tau)$. $= \varepsilon(\tau+\frac{1}{2}) - \varepsilon(\tau-\frac{1}{2}) \to y(\tau)$

LÖSUNG:

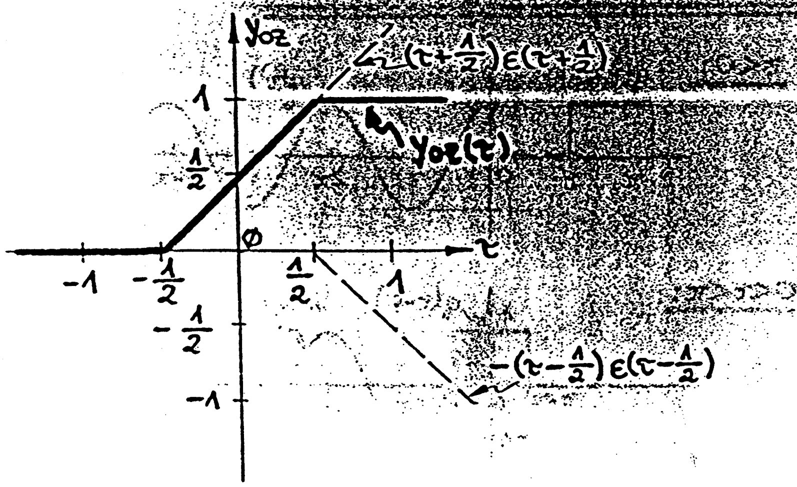
$g(\tau)=\varepsilon(\tau)$ entspricht der Stoßantwort eines idealen Integrators. Die Nullzustandsantwort auf das Eingangs=signal $u(\tau)=rect(\tau)=\varepsilon(\tau+\frac{1}{2})-\varepsilon(\tau-\frac{1}{2})$ wird am besten über das Superpositionsprinzip berechnet

$$h(\tau)=\int_{-\infty}^{\tau} g(\tau')\,d\tau' = \int_{-\infty}^{\tau} \varepsilon(\tau')\,d\tau' = \varepsilon(\tau)\int_0^{\tau} d\tau' = \varepsilon(\tau)\,\tau'\Big|_0^{\tau}$$

$\underline{h(\tau)=\tau\varepsilon(\tau)}$ ist die Sprungantwort eines idealen Integrators.

Aus dem Überlagerungssatz folgt schließlich

$$\underline{\underline{y_{oz}(\tau)=h(\tau+\tfrac{1}{2})-h(\tau-\tfrac{1}{2})=(\tau+\tfrac{1}{2})\varepsilon(\tau+\tfrac{1}{2})-(\tau-\tfrac{1}{2})\varepsilon(\tau-\tfrac{1}{2})}}$$



I

? 16

Nullzustandsantwort eines LTI-Systems 3:

F.

Ein LTI-System besitzt die Stoßantwort $g(\tau)=\delta(\tau-1)-\delta(\tau-2)$. Berechnen und skizzieren Sie die Nullzustandsantwort auf das Eingangssignal $u(\tau)=a\cdot cos(3\cdot\pi\cdot\tau)\cdot\varepsilon(\tau)$.

LÖSUNG:

$g(\tau)=\delta(\tau-1)-\delta(\tau-2)\quad,\quad u(\tau)=a\cos(3\pi\tau)\,\varepsilon(\tau)$

Die Nullzustandsantwort folgt aus dem Faltungsintegral:

$$y_{oz}(\tau)=\int_{0-}^{\infty}g(\tau-\tau')\,u(\tau')\,d\tau'=\int_{0-}^{\infty}[\delta(\tau-1-\tau')-\delta(\tau-2-\tau')]\,a\cos(3\pi\tau')\,\varepsilon(\tau')\,d\tau'$$

$$y_{oz}(\tau)=a\int_{0-}^{\infty}\delta(\tau-1-\tau')\cos(3\pi\tau')\,\varepsilon(\tau')\,d\tau'-a\int_{0-}^{\infty}\delta(\tau-2-\tau')\cos(3\pi\tau')\,\varepsilon(\tau')\,d\tau'$$

$\tau-1-\tau'>0$

$\tau-1>\tau'$

Süß?

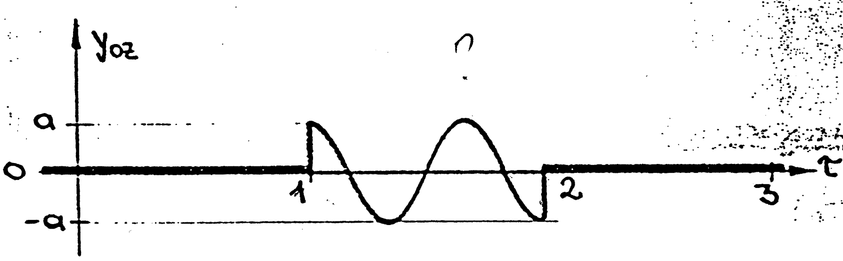
$$y_{oz}(\tau)=a\cos(3\pi[\tau-1])\,\varepsilon(\tau-1)-a\cos(3\pi[\tau-2])\,\varepsilon(\tau-2)$$

$$\underline{y_{oz}(\tau)=a\cos(3\pi\tau-3\pi)\,\varepsilon(\tau-1)-a\cos(3\pi\tau-6\pi)\,\varepsilon(\tau-2)}$$

mit $\underline{\cos(\alpha-3\pi)}=-\cos(\alpha)$ und $\cos(\beta-6\pi)=\cos(\beta)$ folgt

$$\underline{\underline{y_{oz}(\tau)=a[-\cos(3\pi\tau)\,\varepsilon(\tau-1)-\cos(3\pi\tau)\,\varepsilon(\tau-2)]}}$$

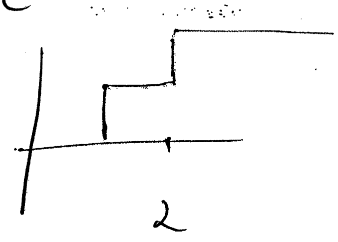
Kosinusschwingung mit Periodendauer $\frac{2}{3}$



$y_{oz}(\tau)-a\cdot\cos(3\pi\tau)\cdot[\varepsilon(\tau-1)+\varepsilon(\tau-2)]$

$\cos(x)$

$-0+2\pi$



Nullzustandsantwort eines LTI-Systems 4: F.

Ein LTI-System besitzt die Sprungantwort $h(\tau)=\varepsilon(\tau-\tau_0)$, $\tau_0>0$. Berechnen und skizzieren Sie die Nullzustandsantwort auf das Eingangssignal $u(\tau)=a\cdot \cos(2\cdot\tau)\cdot\varepsilon(\tau)$.

$h(\tau) \Rightarrow \varepsilon(\ldots)$

LÖSUNG:

Die Stoßantwort wird aus der Sprungantwort $h(\tau)=\varepsilon(\tau-\tau_0),\ \tau_0>0$ durch verallgemeinerte Differentiation gewonnen.

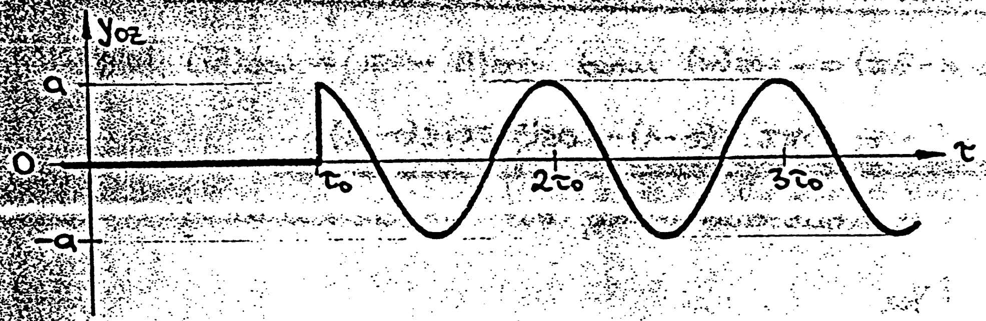
$$g(\tau)=\{h^{(1)}(\tau)\}+[\![h(\tau)]\!]\,\varepsilon^{(1)}(\tau)=\delta(\tau-\tau_0)\quad,\ \tau_0>0$$ $\Rightarrow$ Fragen

Die Nullzustandsantwort folgt aus dem Faltungsintegral zu

$$y_{0z}(\tau)=\int\limits_{0-}^{\infty} g(\tau-\tau')\,u(\tau')\,d\tau'=\int\limits_{0-}^{\infty}\delta(\tau-\tau_0-\tau')\,a\cos(2\tau')\,\varepsilon(\tau')\,d\tau'$$

$$\underline{\underline{y_{0z}(\tau)}}=a\int\limits_{0-}^{\infty}\cos(2\tau')\,\delta(\tau-\tau_0-\tau')\,\varepsilon(\tau')\,d\tau'=\underline{\underline{a\cos(2[\tau-\tau_0])\,\varepsilon(\tau-\tau_0)}}.$$

<u>Annahme für die Skizze</u> : $\underline{\tau_0=\pi}$



<u>andere Lösungsmöglichkeit (z.B. über Laplace-Transformation):</u>

$$h(\tau)=\varepsilon(\tau-\tau_0)\ \circ\!\!-\!\!\bullet\ H(s)=\frac{e^{-s\tau_0}}{s}\ \longrightarrow\ G(s)=sH(s)=e^{-s\tau_0}$$

$$u(\tau)=a\cos(2\tau)\,\varepsilon(\tau)\ \circ\!\!-\!\!\bullet\ a\frac{s}{s^2+4}=U(s)$$

$$Y_{0z}(s)=G(s)\,U(s)=e^{-s\tau_0}\,a\frac{s}{s^2+4}\ \bullet\!\!-\!\!\circ\ \underline{y_{0z}(\tau)=a\cos(2[\tau-\tau_0])\,\varepsilon(\tau-\tau_0)}$$

1
10

Nullzustandsantwort eines LTI-Systems 5:

F. ! $a\tau' = \tau''$ $d\tau' = d\frac{\tau''}{a}$ $\tau' = \frac{\tau''}{a}$

Von einem linearen zeitinvarianten System ist die Sprungantwort

$h(\tau) = \varepsilon(a \cdot \tau - b)$, a und $b > 0$,

bekannt. Berechnen Sie seine Nullzustandsantwort auf das Eingangssignal

$u(\tau) = 0{,}5 \cdot e^{-\tau} \cdot \sin(\upsilon \cdot \tau) \cdot \varepsilon(\tau)$.

LÖSUNG:

Die Stoßantwort wird aus der Sprungantwort $h(\tau) = \varepsilon(a\tau - b)$ durch verallgemeinerte Differentiation gewonnen, wobei besonders auf die innere Ableitung zu achten ist:

$\underline{g(\tau) = a\delta(a\tau - b)}$ mit $a, b > 0$.

Einsetzen der Stoßantwort und des Eingangssignals $u(\tau) = 0{,}5 e^{-\tau} \sin(\nu\tau)\varepsilon(\tau)$ ins Faltungsintegral ergibt

$$y_{0z}(\tau) = \int_{0-}^{\infty} g(\tau - \tau')\, u(\tau')\, d\tau' = \int_{0-}^{\infty} a\delta(a\tau - b - a\tau')\, 0{,}5 e^{-\tau'} \sin(\nu\tau')\, \varepsilon(\tau')\, d\tau' .$$

Durch die Substitution $\tau'' = a\tau'$ mit $\frac{d\tau''}{d\tau'} = a$ bzw. $d\tau' = \frac{d\tau''}{a}$ erhält man

$$y_{0z}(\tau) = \int_{0-}^{\infty} \cancel{a}\delta(a\tau - b - \tau'')\, 0{,}5 e^{-\frac{\tau''}{a}} \sin\left(\frac{\nu\tau''}{a}\right) \varepsilon\left(\frac{\tau''}{a}\right) \frac{d\tau''}{\cancel{a}}$$

$$y_{0z}(\tau) = 0{,}5 \int_{0-}^{\infty} \delta(a\tau - b - \tau'')\, e^{-\frac{\tau''}{a}} \sin\left(\frac{\nu\tau''}{a}\right) \varepsilon\left(\frac{\tau''}{a}\right) d\tau'' .$$

Mit Hilfe der Siebeigenschaft des Dirac-Stoßes

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\, f(a - \tau)\, d\tau = \int_{0+}^{\infty} \delta(\tau)\, f(a - \tau)\, d\tau = f(a),$$

die jenen Funktionswert liefert bei dem das Argument des Dirac-Stoßes null wird (in unserem Fall $a\tau - b - \tau'' = 0 \rightarrow \tau'' = a\tau - b$), folgt schließlich das Endergebnis

$$\underline{\underline{y_{0z}(\tau) = 0{,}5 e^{-(\tau - \frac{b}{a})} \sin\left(\nu\left[\tau - \frac{b}{a}\right]\right) \varepsilon\left(\tau - \frac{b}{a}\right)}} .$$

19

Nullzustandsantwort eines LTI-Systems 6:

F.

Von einem linearen zeitinvarianten System ist die Sprungantwort

$$h(\tau) = \varepsilon(\tau - 1) - \varepsilon(\tau - 2)$$

bekannt. Berechnen Sie seine Nullzustandsantwort auf das Eingangssignal

$$u(\tau) = a \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot \upsilon \cdot \tau) \cdot \varepsilon(\tau) \ .$$

LÖSUNG:

Die Stoßantwort des Systems erhält man durch verallgemeinerte Differentiation der Sprungantwort $h(\tau) = \varepsilon(\tau-1) - \varepsilon(\tau-2)$.

$$\underline{g(\tau) = \delta(\tau-1) - \delta(\tau-2)}$$

Die Nullzustandsantwort folgt aus dem Faltungsintegral mit der Stoßantwort $g(\tau)$ und dem Eingang $u(\tau) = a\cos(2\pi\upsilon\tau)\,\varepsilon(\tau)$.

$$y_{0z}(\tau) = \int_{0-}^{\infty} g(\tau-\tau')\,u(\tau')\,d\tau' = \int_{0-}^{\infty} [\delta(\tau-1-\tau') - \delta(\tau-2-\tau')]\,a\cos(2\pi\upsilon\tau')\,\varepsilon(\tau')\,d\tau'$$

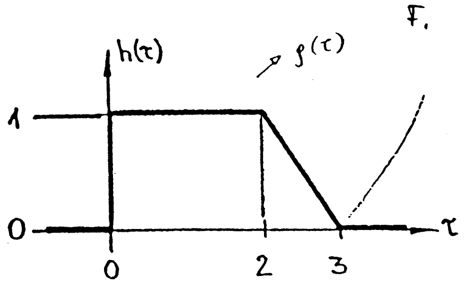
$$y_{0z}(\tau) = a\int_{0-}^{\infty} \delta(\tau-1-\tau')\cos(2\pi\upsilon\tau')\,\varepsilon(\tau')\,d\tau' - a\int_{0-}^{\infty} \delta(\tau-2-\tau')\cos(2\pi\upsilon\tau')\,\varepsilon(\tau')\,d\tau'$$

$$\underline{\underline{y_{0z}(\tau) = a\cos(2\pi\upsilon[\tau-1])\,\varepsilon(\tau-1) - a\cos(2\pi\upsilon[\tau-2])\,\varepsilon(\tau-2)}}$$

bzw.

$$\underline{\underline{y_{0z}(\tau) = a[\cos(2\pi\upsilon[\tau-1])\,\varepsilon(\tau-1) - \cos(2\pi\upsilon[\tau-2])\,\varepsilon(\tau-2)]}}$$

Nullzustandsantwort eines LTI-Systems 7:



Ein LTI-System ist durch die angegebene Sprungantwort charakterisiert. Berechnen Sie die Nullzustandsantwort auf das Eingangssignal

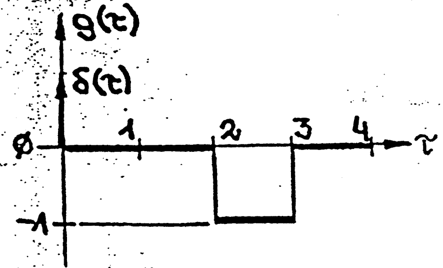
$$u(\tau)=\cos(\pi\cdot\tau)\cdot\varepsilon(\tau)$$

***

LÖSUNG:

$$h(\tau)=\varepsilon(\tau)-(\tau-2)\,\varepsilon(\tau-2)+(\tau-3)\,\varepsilon(\tau-3)$$

Die Stoßantwort folgt aus der Sprungantwort durch verallgemeinerte Differentiation:



$$g(\tau)=\{h^{(1)}(\tau)\}+[\![h(\tau)]\!]\,\varepsilon^{(1)}(\tau)$$

$$\underline{g(\tau)=\delta(\tau)-\varepsilon(\tau-2)+\varepsilon(\tau-3)}$$

herrührend von Unstetigkeit bei $\tau=0$

Die Nullzustandsantwort folgt aus dem Faltungsintegral mit der Stoßantwort $g(\tau)$ und dem Eingang $u(\tau)=\cos(\pi\tau)\,\varepsilon(\tau)$:

$$y_{0z}(\tau)=\int_{0-}^{\infty} g(\tau-\tau')\,u(\tau')\,d\tau'=\int_{0-}^{\infty}[\delta(\tau-\tau')-\varepsilon(\tau-2-\tau')+\varepsilon(\tau-3-\tau')]\cos(\pi\tau')\,\varepsilon(\tau')\,d\tau'$$

$$y_{0z}(\tau)=\int_{0-}^{\infty}\delta(\tau-\tau')\,\varepsilon(\tau')\cos(\pi\tau')\,d\tau'-\int_{0-}^{\infty}\varepsilon(\tau-2-\tau')\,\varepsilon(\tau')\cos(\pi\tau')\,d\tau'+\int_{0-}^{\infty}\varepsilon(\tau-3-\tau')\,\varepsilon(\tau')\cos(\pi\tau')$$

$$y_{0z}(\tau)=\cos(\pi\tau)\,\varepsilon(\tau)-\left[\int_{0}^{\tau-2}\cos(\pi\tau')\,d\tau'\right]\varepsilon(\tau-2)+\left[\int_{0}^{\tau-3}\cos(\pi\tau')\,d\tau'\right]\varepsilon(\tau-3)$$

$$y_{0z}(\tau)=\cos(\pi\tau)\,\varepsilon(\tau)-\frac{1}{\pi}\sin(\pi\tau')\,\varepsilon(\tau-2)\Big|_{0}^{\tau-2}+\frac{1}{\pi}\sin(\pi\tau')\,\varepsilon(\tau-3)\Big|_{0}^{\tau-3}$$

$$y_{0z}(\tau)=\cos(\pi\tau)\,\varepsilon(\tau)-\frac{1}{\pi}\sin(\pi[\tau-2])\,\varepsilon(\tau-2)+\frac{1}{\pi}\sin(\pi[\tau-3])\,\varepsilon(\tau-3)$$

$$\underline{\underline{y_{0z}(\tau)=\cos(\pi\tau)\,\varepsilon(\tau)+\frac{1}{\pi}[-\sin(\pi[\tau-2])\,\varepsilon(\tau-2)+\sin(\pi[\tau-3])\,\varepsilon(\tau-3)]}}$$

bzw.

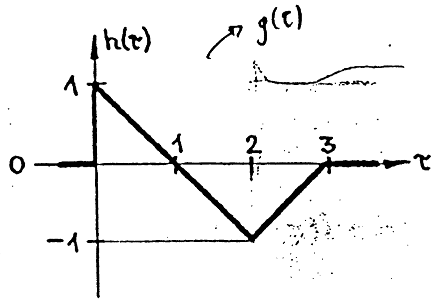
$$\underline{\underline{y_{0z}(\tau)=\cos(\pi\tau)\,\varepsilon(\tau)+\frac{1}{\pi}[-\sin(\pi\tau)\,\varepsilon(\tau-2)-\sin(\pi\tau)\,\varepsilon(\tau-3)]}}\,.$$

I

21

Nullzustandsantwort eines LTI-Systems 8:

F.



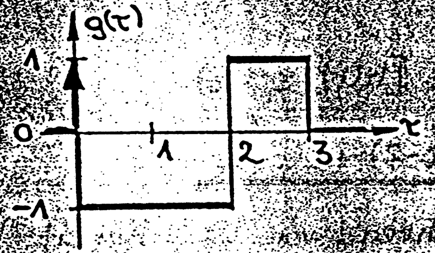
Ein LTI-System ist durch die angegebene Sprungantwort charakterisiert. Berechnen Sie die Nullzustandsantwort auf das Eingangssignal

$$u(\tau)=e^{-\tau}\cdot\varepsilon(\tau)\;.$$

LÖSUNG:

$h(\tau) = (-\tau+1)\,[\varepsilon(\tau)-\varepsilon(\tau-2)] + (\tau-3)\,[\varepsilon(\tau-2)-\varepsilon(\tau-3)]$

Die Stoßantwort folgt aus der Sprungantwort durch verallgemeinerte Differentiation. $[h]\,\varepsilon^{(1)}$, $h(0-)=0$, $h(0+)=1$ $\quad [h(0+)-h(0-)]\cdot\varepsilon^{(1)}(\tau)$ $\quad [1-0]\cdot\delta(\tau)$



$$\underline{g(\tau)=\delta(\tau)-\varepsilon(\tau)+2\varepsilon(\tau-2)-\varepsilon(\tau-3)}$$

herrührend von Unstetigkeit bei $\tau=0$

Die Nullzustandsantwort folgt aus dem Faltungsintegral mit der Stoßantwort $g(\tau)$ und dem Eingang $u(\tau)=e^{-\tau}\varepsilon(\tau)$.

$$y_{oz}(\tau)=\int_{0-}^{\infty} g(\tau-\tau')\,u(\tau')\,d\tau'=\int_{0-}^{\infty}[\delta(\tau-\tau')-\varepsilon(\tau-\tau')+2\varepsilon(\tau-2-\tau')-\varepsilon(\tau-3-\tau')]\,e^{-\tau'}\varepsilon(\tau')\,d\tau'$$

$$y_{oz}(\tau)=\int_{0-}^{\infty}\delta(\tau-\tau')\,\varepsilon(\tau')\,e^{-\tau'}d\tau'-\int_{0-}^{\infty}\varepsilon(\tau-\tau')\,\varepsilon(\tau')\,e^{-\tau'}d\tau'+2\int_{0-}^{\infty}\varepsilon(\tau-2-\tau')\,\varepsilon(\tau')\,e^{-\tau'}d\tau'$$
$$-\int_{0-}^{\infty}\varepsilon(\tau-3-\tau')\,\varepsilon(\tau')\,e^{-\tau'}d\tau'$$

$$y_{oz}(\tau)=e^{-\tau}\varepsilon(\tau)-\varepsilon(\tau)\int_0^{\tau}e^{-\tau'}d\tau'+2\varepsilon(\tau-2)\int_0^{\tau-2}e^{-\tau'}d\tau'-\varepsilon(\tau-3)\int_0^{\tau-3}e^{-\tau'}d\tau'$$

$$y_{oz}(\tau)=e^{-\tau}\varepsilon(\tau)+e^{-\tau'}\varepsilon(\tau)\Big|_0^{\tau}-2e^{-\tau'}\varepsilon(\tau-2)\Big|_0^{\tau-2}+e^{-\tau'}\varepsilon(\tau-3)\Big|_0^{\tau-3}$$

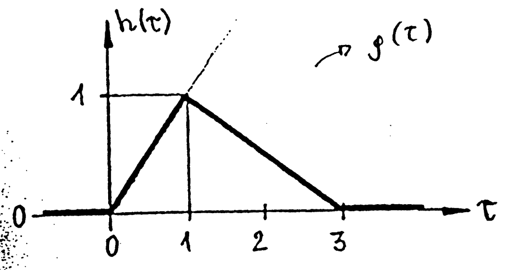
$$y_{oz}(\tau)=e^{-\tau}\varepsilon(\tau)+[e^{-\tau}-1]\,\varepsilon(\tau)-2[e^{-(\tau-2)}-1]\,\varepsilon(\tau-2)+[e^{-(\tau-3)}-1]\,\varepsilon(\tau-3)$$

$$\underline{\underline{y_{oz}(\tau)=[2e^{-\tau}-1]\,\varepsilon(\tau)+2[1-e^{-(\tau-2)}]\,\varepsilon(\tau-2)+[e^{-(\tau-3)}-1]\,\varepsilon(\tau-3)\;.}}$$

Nullzustandsantwort eines LTI-Systems 9:

27

F.



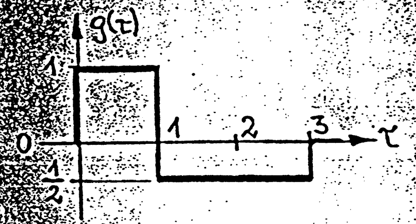
Angegeben ist die Sprungantwort eines LTI-Systems. Berechnen Sie die Nullzustandsantwort auf das Eingangssignal

$$u(\tau) = 2 \cdot e^{-\tau} \cdot \varepsilon(\tau)\ .$$

LÖSUNG:

$$h(\tau) = \tau\,\varepsilon(\tau) - \tfrac{3}{2}(\tau-1)\,\varepsilon(\tau-1) + \tfrac{1}{2}(\tau-3)\,\varepsilon(\tau-3)$$

Die Stoßantwort folgt aus der Sprungantwort durch verallgemeinerte Differentiation:



$$\underline{g(\tau) = \varepsilon(\tau) - \tfrac{3}{2}\,\varepsilon(\tau-1) + \tfrac{1}{2}\,\varepsilon(\tau-3)}$$

Die Nullzustandsantwort folgt aus dem Faltungsintegral mit der Stoßantwort $g(\tau)$ und dem Eingang $u(\tau) = 2e^{-\tau}\varepsilon(\tau)$.

$$y_{oz}(\tau) = \int_{0-}^{\infty} g(\tau-\tau')\,u(\tau')\,d\tau' = \int_{0-}^{\infty} \left[\varepsilon(\tau-\tau') - \tfrac{3}{2}\,\varepsilon(\tau-1-\tau') + \tfrac{1}{2}\,\varepsilon(\tau-3-\tau')\right] 2e^{-\tau'}\varepsilon(\tau')\,d\tau'$$

$$y_{oz}(\tau) = 2\int_{0-}^{\infty} \varepsilon(\tau-\tau')\varepsilon(\tau')e^{-\tau'}d\tau' - 3\int_{0-}^{\infty} \varepsilon(\tau-1-\tau')\varepsilon(\tau')e^{-\tau'}d\tau' + \int_{0-}^{\infty} \varepsilon(\tau-3-\tau')\varepsilon(\tau')e^{-\tau'}d\tau'$$

$$y_{oz}(\tau) = 2\left[\int_0^{\tau} e^{-\tau'}d\tau'\right]\varepsilon(\tau) - 3\left[\int_0^{\tau-1} e^{-\tau'}d\tau'\right]\varepsilon(\tau-1) + \left[\int_0^{\tau-3} e^{-\tau'}d\tau'\right]\varepsilon(\tau-3)$$

$$y_{oz}(\tau) = -2e^{-\tau'}\varepsilon(\tau)\Big|_0^{\tau} + 3e^{-\tau'}\varepsilon(\tau-1)\Big|_0^{\tau-1} - e^{-\tau'}\varepsilon(\tau-3)\Big|_0^{\tau-3}$$

$$\underline{\underline{y_{oz}(\tau) = 2\left[1-e^{-\tau}\right]\varepsilon(\tau) + 3\left[e^{-(\tau-1)}-1\right]\varepsilon(\tau-1) + \left[1-e^{-(\tau-3)}\right]\varepsilon(\tau-3)}}$$

Nullzustandsantwort eines LTI-Systems 10:

Von einem linearen zeitinvarianten System ist die Stoßantwort

$$g(\tau) = 2e^{-\tau}\,\varepsilon(\tau)$$

bekannt. Berechnen Sie seine Nullzustandsantwort auf das Eingangssignal

$$u(\tau) = 3\tau\,\varepsilon(\tau)\ .$$

LÖSUNG:

Die Nullzustandsantwort folgt unmittelbar aus dem Faltungsintegral mit der Stoßantwort $g(\tau) = 2e^{-\tau}\varepsilon(\tau)$ und dem Eingang $u(\tau) = 3\tau\varepsilon(\tau)$ zu

$$y_{0z}(\tau) = \int_{0-}^{\infty} g(\tau-\tau')u(\tau')\,d\tau' = \int_{0-}^{\infty} [2e^{-(\tau-\tau')}\varepsilon(\tau-\tau')]\,3\tau'\varepsilon(\tau')\,d\tau'$$

$$y_{0z}(\tau) = 6\left[\int_0^{\tau} \tau' e^{-(\tau-\tau')}\,d\tau'\right]\varepsilon(\tau).$$

Durch partielle Integration

$$\int uv' = uv - \int u'v$$

mit $u = \tau'$, $u' = 1$ und $v' = e^{-(\tau-\tau')}$, $v = e^{-(\tau-\tau')}$ folgt

$$y_{0z}(\tau) = 6\varepsilon(\tau)\left\{[\tau' e^{-(\tau-\tau')}]\Big|_0^{\tau} - \int_0^{\tau} e^{-(\tau-\tau')}\,d\tau'\right\}$$

$$\underline{\underline{y_{0z}(\tau)}} = 6\left\{\tau - e^{-(\tau-\tau')}\Big|_0^{\tau}\right\}\varepsilon(\tau) = \underline{\underline{6[\tau - 1 + e^{-\tau}]\,\varepsilon(\tau).}}$$

Kapitel II

1

Eingeschwungener Ausgang eines Systems:

Es ist der eingeschwungene Ausgang eines Systems gesucht, das durch die Differentialgleichung

$$y^{(3)} + 2 \cdot y^{(2)} + 4 \cdot y^{(1)} = 2 \cdot u^{(1)} + u \;\;, \;\; u(\tau) = cos(3 \cdot \tau)$$

beschrieben wird. Stellen Sie das Ergebnis in der Form

$$y(\tau) = \hat{y} \cdot \cos(v \cdot \tau + \varphi_y) \;\;, \;\; \hat{y} > 0$$

dar.

LÖSUNG:

Die Übertragungsfunktion kann direkt aus der System-DGL abgelesen werden.

$$G(s) = \frac{2s+1}{s^3+2s^2+4s}$$

Wenn das System stabil ist, so gilt $y_{st}(\tau) = y_p(\tau)$.

Stabilitätsuntersuchung:

$$G(s) = 2\frac{s+0{,}5}{s(s^2+2s+4)} = \cancel{2\frac{s+0{,}5}{s(s^2+2s+4)}}$$

Die Übertragungsfunktion besitzt den einfachen Pol $p_1 = \emptyset$ auf der imaginären Achse und die beiden konjugiert komplexen Pole $p_{2,3} = -1 \pm j\sqrt{3}$.

Da p_1 einfach ist und $Re(p_{2,3}) < \emptyset$ ist, handelt es sich um ein (grenz)stabiles System.

Stationäre Lösung = Partikuläre Lösung:

Der Eingang $u(\tau) = \cos(3\tau)$ kann durch die lineare Operation

$u(\tau) = L(e^{s\tau}) = Re\left(e^{s\tau}\Big|_{s=j3}\right)$ dargestellt werden.

Die partikuläre Lösung lautet dann

$$y_p(\tau) = L\left[G(s)e^{s\tau}\right] = Re\left[G(j3)e^{j3\tau}\right] = |G(j3)|\, e^{j\{3\tau + arc[G(j3)]\}}$$

Mit $G(j3) = \dfrac{j6+1}{-j27-18+j12} = \dfrac{1+j6}{-18-j15} = \emptyset{,}2596\, e^{-j2{,}43}$ folgt schließlich

$$\underline{\underline{y_{st}(\tau) = y_p(\tau) = \hat{y}\cos(v\tau + \varphi_y) = \emptyset{,}2596\cos(3\tau - 2{,}43)}} \;.$$

Eingeschwungener Ausgang eines Systems 2:

2

Ermitteln Sie für ein System mit der Differentialgleichung

$$y^{(2)}+3\cdot y^{(1)}+4\cdot y=u^{(2)}-2\cdot u^{(1)}+u$$

die stationäre Lösung zur Eingangsfunktion

$$u(\tau)=cos\left(\frac{\tau}{2}\right)$$

in der Form

$$y_{st}(\tau)=\hat{y}\cdot\cos(v\tau+\varphi_y)\ ,\ \hat{y}>0$$

LÖSUNG:

Die Übertragungsfunktion kann direkt aus der System-DGL abgelesen werden: $G(s)=\frac{s^2-2s+1}{s^2+3s+4}=\frac{(s-1)^2}{s^2+3s+4}$

Wenn das System stabil ist, so gilt $y_{st}(\tau)=y_p(\tau)$.

Stabilitätsuntersuchung:

Die beiden konjugiert komplexen Pole der Übertragungsfunktion ergeben sich aus den Nullstellen des Nennerpolynoms zu

$p_{1,2}=-1{,}5\pm j\sqrt{1{,}75}$.

$Re(p_{1,2})<0$, d.h. das System ist stabil.

Stationäre Lösung = Partikuläre Lösung:

Der Eingang $u(\tau)=\cos(\frac{\tau}{2})$ kann durch die lineare Operation $u(\tau)=L(e^{s\tau})=Re(e^{s\tau}|_{s=j0{,}5})$ dargestellt werden.

Die partikuläre Lösung lautet dann

$$y_p(\tau)=L[G(s)e^{s\tau}]=Re[G(j0{,}5)\,e^{j0{,}5\tau}]\overset{Re}{=}|G(j0{,}5)|e^{j[0{,}5\tau+arc[G(j0{,}5)]}$$

Mit $G(j0{,}5)=\frac{-0{,}25-j+1}{-0{,}25+j1{,}5+4}=\frac{0{,}75-j}{3{,}75+j1{,}5}=0{,}3095e^{-j1{,}3078}$ folgt schließlic

$$y_{st}(\tau)=y_p(\tau)=\hat{y}\cos(v\tau+\varphi_y)=0{,}3095\cos(\frac{\tau}{2}-1{,}3078)\ .$$

Eingeschwungener Ausgang eines Systems 3:

3

Ermitteln Sie für ein System mit der Differentialgleichung

$$y^{(3)} + 4 \cdot y^{(2)} + 6 \cdot y^{(1)} = 2 \cdot u^{(1)} + u$$

die stationäre Lösung zur Eingangsfunktion

$$u(\tau) = 2 \cdot cos(3 \cdot \tau)$$

in der Form

$$y_{st}(\tau) = \hat{y} \cdot \cos(v\tau + \varphi_y) \ , \ \hat{y} > 0 \ .$$

LÖSUNG:

Die Übertragungsfunktion kann direkt aus der System-DGL abgelesen werden.

$$\underline{G(s)} = \frac{2s+1}{s^3+4s^2+6s} = \frac{2s+1}{s(s^2+4s+6)} = \underline{2\,\frac{s+0{,}5}{s(s^2+4s+6)}}$$

Wenn das System stabil ist, so gilt $y_{st}(\tau) = y_p(\tau)$.

Stabilitätsuntersuchung:

Die Übertragungsfunktion besitzt den einfachen Pol $p_1 = 0$ auf der imaginären Achse und das konjugiert komplexe Polpaar $p_{2,3} = -2 \pm j\sqrt{2}$.

Da p_1 einfach ist und $Re(p_{2,3}) < 0$ ist, handelt es sich um ein stabiles System.

Stationäre Lösung = Partikuläre Lösung:

Der Eingang $u(\tau) = 2\cos(3\tau)$ kann durch die lineare Operation $u(\tau) = 2L(e^{s\tau}) = 2Re\left(e^{s\tau}\Big|_{s=j3}\right)$ dargestellt werden.

Die partikuläre Lösung lautet dann

$$y_p(\tau) = 2L[G(s)e^{s\tau}] = 2Re[\,G(j3)\,e^{j3\tau}] = 2|G(j3)|\,e^{j[3\tau + \arc[G(j3)]]} \ .$$

Mit $G(j3) = \dfrac{j6+1}{-j27-36+j18} = \dfrac{1+j6}{-36-j9} = 0{,}1639\,e^{-j1{,}9809}$ folgt schließlich

$$\underline{y_{st}(\tau) = y_p(\tau) = \hat{y}\cos(v\tau + \varphi_y) = 0{,}3278\cos(3\tau - 1{,}9809)} \ .$$

Eingeschwungener Ausgang eines Systems 4:

4

Ermitteln Sie für ein System mit der Differentialgleichung

$$y^{(3)} + 3 \cdot y^{(2)} + 6 \cdot y^{(1)} + 2 \cdot y = u^{(1)} - 3 \cdot u$$

die stationäre Lösung zur Eingangsfunktion

$$u(\tau) = cos(2 \cdot \tau)$$

in der Form

$$y_{st}(\tau) = \hat{y} \cdot \cos(\upsilon\tau + \varphi_y) \quad , \hat{y} \geq 0 \ .$$

LÖSUNG:

Die Übertragungsfunktion kann direkt aus der System-DGL abgelesen werden.

$$G(s) = \frac{s-3}{s^3+3s^2+6s+2}$$

Wenn das System stabil ist, so gilt $y_{st}(\tau) = y_p(\tau)$.

Stabilitätsuntersuchung:

Die Übertragungsfunktion besitzt den einfachen Pol $p_1 \approx -0{,}4039$ und die beiden konjugiert komplexen Pole $p_{2,3} \approx -1{,}298 \pm j1{,}807$.

Da alle drei Pole einen negativen Realteil besitzen ist das System stabil.

Stationäre Lösung = Partikuläre Lösung:

Der Eingang $u(\tau) = \cos(2\tau)$ kann durch die lineare Operation $u(\tau) = L(e^{s\tau}) = Re(e^{s\tau}|_{s=j2})$ dargestellt werden.

Die partikuläre Lösung lautet dann

$$y_p(\tau) = L[G(s)\,e^{s\tau}] = Re[\,G(j2)\,e^{j2\tau}] = |G(j2)|\,e^{j[2\tau + arc(G(j2))]} \ .$$

Mit $G(j2) = \frac{j2-3}{-j8-12+j12+2} = \frac{-3+j2}{-10+j4} = 0{,}3348\,e^{-j0{,}2075}$ folgt schließlich

$$y_{st}(\tau) = y_p(\tau) = \hat{y}\cos(\upsilon\tau + \varphi_y) = 0{,}3348\cos(2\tau - 0{,}2075) \ .$$

5

Eingeschwungener Ausgang eines Systems 5:

Ermitteln Sie für ein System mit der Differentialgleichung

$$y^{(2)} + 6 \cdot y^{(1)} + 4 \cdot y = u^{(2)} - 2 \cdot u^{(1)} + u$$

die stationäre Lösung zur Eingangsfunktion

$$u(\tau) = cos\left(\frac{\tau}{2}\right)$$

in der Form

$$y_a(\tau) = \hat{y} \cdot \cos(\upsilon\tau + \varphi_y) \;, \; \hat{y} > 0 \;.$$

LÖSUNG:

Die Übertragungsfunktion kann direkt aus der System-DGL abgelesen werden. $G(s) = \frac{s^2-2s+1}{s^2+6s+4} = \frac{(s-1)^2}{(s+3-\sqrt{5})(s+3+\sqrt{5})}$

Wenn das System stabil ist, so gilt $y_{st}(\tau) = y_p(\tau)$.

Stabilitätsuntersuchung:

Die Übertragungsfunktion besitzt die beiden einfachen Pole $p_1 = -3+\sqrt{5} \approx -0{,}7639$ und $p_2 = -3-\sqrt{5} \approx -5{,}236$.

Wegen $p_1 < 0$ und $p_2 < 0$ liegen beide Pole in der abgeschlossenen linken Halbebene im Pol/Nullstellen-Diagramm, d.h. das System ist stabil.

Stationäre Lösung = Partikuläre Lösung:

Der Eingang $u(\tau) = \cos(\frac{\tau}{2})$ kann durch die lineare Operation $u(\tau) = L(e^{s\tau}) = Re(e^{s\tau}|_{s=j0{,}5})$ dargestellt werden.

Die partikuläre Lösung lautet dann

$$y_p(\tau) = L(G(s)e^{s\tau}) = Re[G(j0{,}5)e^{j0{,}5\tau}] = |G(j0{,}5)|e^{j[0{,}5\tau + arc[G(j0{,}5)]]}$$

Mit $G(j0{,}5) = \frac{-0{,}25-j+1}{-0{,}25+j3+4} = \frac{0{,}75-j}{3{,}75+j3} = 0{,}26\,e^{-j1{,}1602}$ folgt schließlich

$$y_{st}(\tau) = y_p(\tau) = \hat{y}\cos(\nu\tau + \varphi_y) = 0{,}26\cos(\tfrac{\tau}{2} - 1{,}1602) \;.$$

Eingeschwungener Zustand eines Systems:

Ermitteln Sie für ein System mit der Differentialgleichung

$$y^{(3)} + y^{(1)} + y = u$$

die stationäre Lösung zur Eingangsfunktion

$$u(\tau) = a + b\cos(n\tau) \;.$$

$G(s) = \frac{1}{s^3 + \quad 1}$

LÖSUNG:

Die Übertragungsfunktion kann direkt aus der System-DGL abgelesen werden.

Wenn das System stabil ist, so gilt $y_{st}(\tau) = y_p(\tau)$.

Stabilitätsuntersuchung:

Die Übertragungsfunktion besitzt den einfachen Pol $p_1 \approx -0{,}682$ und die beiden konjugiert komplexen Pole $p_{2,3} \approx 0{,}341 \pm j1{,}161$. Da $Re(p_{2,3}) > 0$ ist liegen die konjugiert komplexen Pole in der rechten Halbebene, d.h. das System ist instabil!

2) 7

Eingeschwungener Zustand eines Systems 2:

Ermitteln Sie für ein System mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{2s+3}{s^2+5s+6}$$

die stationäre Lösung zur Eingangsfunktion

$$u(\tau) = 4 + \cos(\tau) \quad .$$

LÖSUNG: $G(s) = \frac{2s+3}{s^2+5s+6} = 2\frac{s+1{,}5}{(s+2)(s+3)}$

Wenn das System stabil ist, so gilt $y_{st}(\tau) = y_p(\tau)$.

Stabilitätsuntersuchung:

Die Übertragungsfunktion besitzt die beiden einfachen Pole $p_1 = -2$ und $p_2 = -3$. Da $p_1 < 0$ und $p_2 < 0$ ist, handelt es sich um ein stabiles System.

Stationäre Lösung = Partikuläre Lösung:

Der Eingang $u_1(\tau) = 4\varepsilon(\tau)$ kann durch die lineare Operation $u_1(\tau) = 4L_1(e^{s\tau}) = 4e^{s\tau}\Big|_{s=0}$ für $\tau > 0$ dargestellt werden.

Die partikuläre Lösung lautet dann $y_{p1}(\tau) = 4L_1[G(s)e^{s\tau}] = 4G(0) = 2$, $\tau > 0$

Der Eingang $u_2(\tau) = \cos(\tau)$ kann durch die lineare Operation $u_2(\tau) = L_2(e^{s\tau}) = \mathrm{Re}[e^{s\tau}\big|_{s=j}]$ dargestellt werden.

Die zugehörige partikuläre Lösung lautet dann ?

$$y_{p2}(\tau) = L_2[G(s)e^{s\tau}] = \mathrm{Re}[G(j)\, e^{j\tau}] = |G(j)| \,\mathrm{Re}\, e^{j[\tau + \mathrm{arc}[G(j)]]} \;.$$

nicht gleich

Mit $G(j) = \frac{j2+3}{-1+j5+6} = \frac{3+j2}{5+j5} = 0{,}5099\, e^{-j0{,}197}$ folgt schließlich

$$y_{p2}(\tau) = 0{,}5099 \cos(\tau - 0{,}197).$$

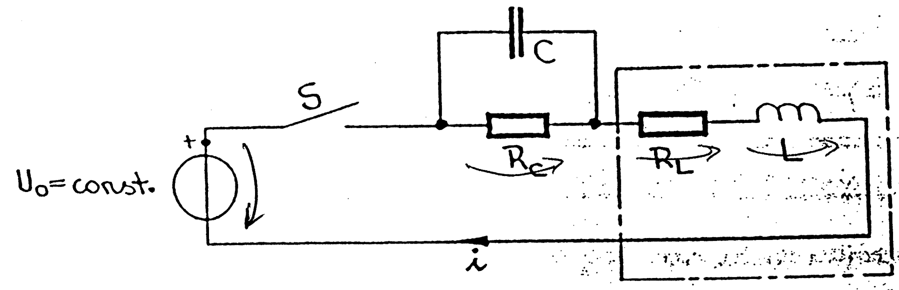
Die Systemantwort auf das Signal $u(\tau) = u_1(\tau) + u_2(\tau) = 4 + \cos(\tau)$ ergibt sich unmittelbar aus dem Überlagerungsprinzip:

$$\underline{\underline{y_p(\tau) = y_{p1}(\tau) + y_{p2}(\tau) = y_{st}(\tau) = 2 + 0{,}5099\cos(\tau - 0{,}197).}}$$

II

8/1

Einschaltvorgang eines Relais:



In der skizzierten Schaltung sind R_L und L Widerstand bzw. Induktivität einer Relaisspule. Um den Dauerstrom niedrig zu halten und trotzdem kleine Ansprechzeiten zu erreichen wird der Begrenzungswiderstand R_C mit einem Kondensator der Kapazität C überbrückt. Geben Sie die Differentialgleichung und die zugehörigen Anfangsbedingungen für den Zeitverlauf $i(t)$ des Stromes an.

LÖSUNG:

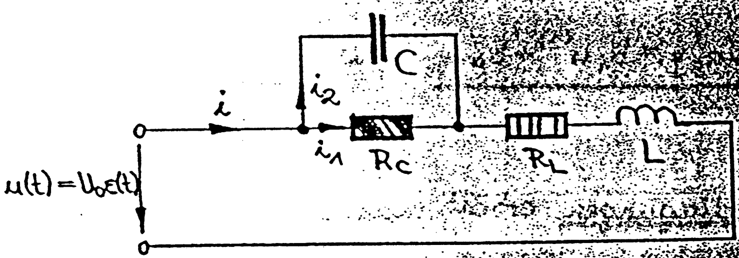


Abb. 1

Die Kirchhoffsche Knoten- und Maschenregel ergibt mit den Bezugssinnen nach Abb. 1 das Differentialgleichungssystem

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) \qquad (1)$$

$$u(t) = R_C i_1(t) + R_L i(t) + L\frac{di}{dt} \qquad (2) \qquad U_{R_C} = U_C$$

$$R_C i_1(t) = \frac{1}{C}\int i_2\,dt \qquad (3) \qquad \frac{di_1}{dt} R_C = \frac{i_2}{C}$$

$$\boxed{i_2 = R_C C \cdot \frac{di_1}{dt}}$$

Elimination der zwei unbekannten Größen $i_1(t)$ und $i_2(t)$:

aus (3) folgt $i_1(t) = \frac{1}{R_C C}\int i_2\,dt$ in

$$(1):\quad i(t) = \frac{1}{R_C C}\int i_2\,dt + i_2(t) \qquad (1)'$$

$$(2):\quad u(t) = \frac{1}{C}\int i_2\,dt + R_L i(t) + L\frac{di}{dt} \qquad (2)'$$

Differentiation von Gl. (2)' nach der Zeit liefert

$$\frac{du}{dt} = \frac{i_2(t)}{C} + R_L\frac{di}{dt} + L\frac{d^2i}{dt^2}\;.\quad i_2(t) = C\frac{du}{dt} - R_L C\frac{di}{dt} - LC\frac{d^2i}{dt^2} \qquad (2)''$$

(2)'' in Gl. (1)': $i(t) = \frac{u(t)}{R_C} - \frac{R_L}{R_C} i(t) - \frac{L}{R_C}\frac{di}{dt} + C\frac{du}{dt} - R_L C \frac{di}{dt} - LC\frac{d^2i}{dt^2}$

$$LC\frac{d^2i}{dt^2} + \left(\frac{L}{R_C} + R_L C\right)\frac{di}{dt} + \left(1 + \frac{R_L}{R_C}\right) i = C\frac{du}{dt} + \frac{u}{R_C}$$

Die Differentialgleichung für den Spulenstrom in nichtbezogener Form lautet somit

$$\underline{\frac{d^2i}{dt^2} + \left(\frac{1}{R_C C} + \frac{R_L}{L}\right)\frac{di}{dt} + \left(1 + \frac{R_L}{R_C}\right)\frac{1}{LC} i = \frac{1}{L}\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}\frac{u}{R_C}}\ .$$

Einführung normierter Größen $i = I_B y$, $u(t) = U_B u$, $t = T_B \tau$ und einsetzen

in die Differentialgleichung ergibt

$$\frac{I_B}{T_B^2}\frac{d^2y}{d\tau^2} + \left(\frac{1}{R_C C} + \frac{R_L}{L}\right)\frac{I_B}{T_B}\frac{dy}{d\tau} + \left(1 + \frac{R_L}{R_C}\right)\frac{I_B}{LC} y = \frac{U_B}{T_B}\frac{1}{L}\frac{du}{d\tau} + \frac{1}{LC}\frac{U_B}{R_C} u$$

bzw. a_0 b_0 $a_0 = b_0$

$$\underline{\underline{y^{(2)} + \left(\frac{1}{R_C C} + \frac{R_L}{L}\right) T_B y^{(1)} + \left(1 + \frac{R_L}{R_C}\right)\frac{T_B^2}{LC} y = \frac{U_B}{I_B}\frac{T_B}{L} u^{(1)} + \frac{T_B^2}{LC}\frac{U_B}{I_B}\frac{u}{R_C}}}\ .$$

?

Durch passende Wahl der Bezugswerte $T_B^2 = \frac{\cancel{1}}{LC}$, $U_B = U_0$, $\frac{U_B}{I_B} = R_C + R_L$

folgt schließlich die Standardform

$$\underline{y^{(2)} + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_1 u^{(1)} + b_0 u} \quad \text{mit} \quad \underline{a_1 = \frac{1}{R_C}\sqrt{\frac{L}{C}} + R_L\sqrt{\frac{C}{L}}},\ \underline{a_0 = \left(1 + \frac{R_L}{R_C}\right)}$$

$$\underline{b_1 = \sqrt{LC}\,\frac{R_C + R_L}{L}},\ \underline{b_0 = \left(1 + \frac{R_L}{R_C}\right)}$$

Die Anfangsbedingungen erhält man durch die elektrotechnischen

Plausibilitätsbetrachtungen, daß der Spulenstrom und die

Kondensatorspannung zum Schaltzeitpunkt stetig sein müssen!

$u_C(\emptyset-) = u_C(\emptyset+)$; $\underline{\underline{i(\emptyset-) = i(\emptyset+)}}$ sind beide null, daraus folgt $\underline{y(\emptyset-) = y(\emptyset+) = \emptyset}$.

$\frac{\Delta i}{\Delta t}$

$$\underline{\underline{\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=\emptyset+}}} = \frac{u_L(\emptyset+)}{L} = \frac{U_0 - u_C(\emptyset+) - R_L i(\emptyset+)}{L} = \underline{\underline{\frac{U_0}{L}}} \longrightarrow \frac{I_B}{T_B} y^{(1)}\Big|_{\tau=\emptyset+} = \frac{u(\emptyset+)U_B}{L} = \frac{u(\emptyset+)}{L}$$

$\Rightarrow U_L = L\frac{di}{dt}$ $\quad \underline{\underline{y^{(1)} = \frac{U_B}{I_B}\frac{T_B}{L}}}$, $U_B = U_0$

Durch einsetzen der verallgemeinerten Ableitungen in die DGL

und anschließendem Koeffizientenvergleich ergibt

$$\{y^{(2)}\} + [\![y^{(1)}]\!]\varepsilon^{(1)} + [\![y]\!]\varepsilon^{(2)} + a_1\{y^{(1)}\} + a_1[\![y]\!]\varepsilon^{(1)} + a_0\{y\} = b_1\{u^{(1)}\} + b_1[\![u]\!]\varepsilon^{(1)} + b_0\{$$

$[\![y]\!] = \emptyset \longrightarrow \underline{y(\emptyset+) = y(\emptyset-) = \emptyset}$ $\quad U_B = U_0$

$[\![y^{(1)}]\!] + a_1[\![y]\!] = b_1[\![u]\!] \longrightarrow y^{(1)}(\emptyset+) = b_1[\![u]\!] - a_1[\![y]\!] + y^{(1)}(\emptyset-)$

$$y^{(1)}(\emptyset+) = \frac{T_B}{L}\frac{U_B}{I_B} - \left(\frac{1}{R_C C} + \frac{R_L}{L}\right) T_B\, \emptyset + \emptyset \longrightarrow \underline{y^{(1)}(\emptyset+) = \frac{U_B}{I_B}\frac{T_B}{L}}\ .$$

PID-Regler:

Die Übertragungsfunktion $G(s) = (1+s)(10+1/s)$ beschreibt einen idealen PID-Regler. Berechnen und zeichnen Sie dessen Sprungantwort.

LÖSUNG:

$$G(s) = (1+s)\left(10+\frac{1}{s}\right) = 10 + 10s + \frac{1}{s} + 1 = 10s + 11 + \frac{1}{s}$$

Mit Hilfe der Laplace-Transformationskorrespondenzen nach Tab. 4.1

Zeile 1: $\delta(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\ 1$

Zeile 2: $\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{s}$

Zeile 4: $\tau\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{s^2}$

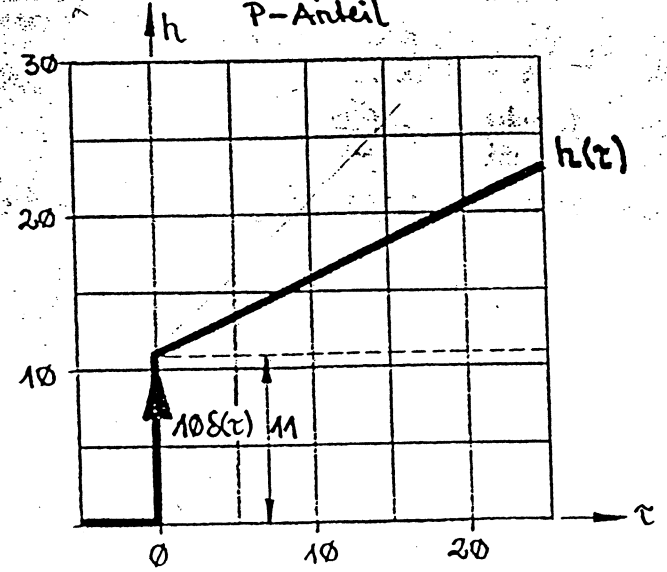
ergibt sich für die Rücktransformierte von

$$H(s) = \frac{G(s)}{s} = 10 + \frac{11}{s} + \frac{1}{s^2}$$

im Zeitbereich die Sprungantwort

$$\underline{\underline{h(\tau) = 10\,\delta(\tau) + 11\,\varepsilon(\tau) + \tau\,\varepsilon(\tau)}}$$

D-Anteil P-Anteil I-Anteil



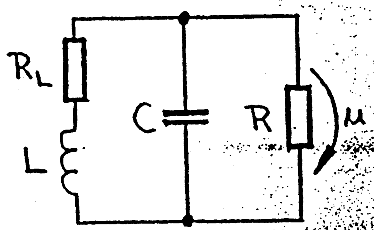
$s^2 + a_1 s + a_0 = 0$

II

10

$p_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}$

RLC-Parallelschwingkreis:



In der skizzierten Schaltung bedeutet das Element R einen Ersatzwiderstand, der auch negative Werte annehmen kann.

(i) Wählen Sie die Spannung u als Zustandsgröße und geben Sie dafür die Differentialgleichung an.

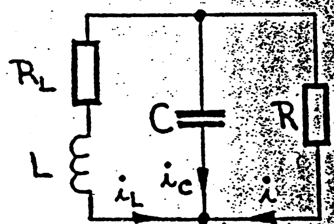
(ii) Schreiben Sie die Differentialgleichung in der bezogenen Standardform mit $T_B = \sqrt{LC}$ als Bezugsdauer.

(iii) Berechnen Sie allgemein die Wurzeln des zugeordneten charakteristischen Polynoms.

(iv) Welche Bedingungen müssen die Parameterwerte R, R_L, L und C erfüllen, damit die Spannung u eine freie stationäre Schwingung ausführt? (Grenzstabilität)

LÖSUNG:

(i)



Die Kirchhoffsche Knoten- und Maschenregel liefert:

$i + i_C + i_L = 0 \quad (1) \qquad u = R_L i_L + L\frac{di_L}{dt} \quad (3)$

$i_C = C\frac{du}{dt} \quad (2) \qquad i = \frac{u}{R} \quad (4)$

(2) in (1): $i + C\frac{du}{dt} + i_L = 0 \longrightarrow i_L = -i - C\frac{du}{dt} \quad (1)'$

(1)' in (3): $u = -R_L i - R_L C\frac{du}{dt} - L\frac{di}{dt} - LC\frac{d^2u}{dt^2} \quad (3)'$

(4) in (3)': $u = -\frac{R_L}{R}u - R_L C\frac{du}{dt} - \frac{L}{R}\frac{du}{dt} - LC\frac{d^2u}{dt^2}$

Umgeformt ergibt dies die DGL: $LC\frac{d^2u}{dt^2} + \left[R_L C + \frac{L}{R}\right]\frac{du}{dt} + \left[1 + \frac{R_L}{R}\right]u = 0$

bzw. nach Division durch LC: $\frac{d^2u}{dt^2} + \left[\frac{R_L}{L} + \frac{1}{RC}\right]\frac{du}{dt} + \left[1 + \frac{R_L}{R}\right]\frac{1}{LC}u = 0$

(ii) Normierung mit $y = U_B^{-1}u(t)$; $t = T_B\tau$:

$\frac{\cancel{U_B}}{T_B^2}y^{(2)} + \left[\frac{R_L}{L} + \frac{1}{RC}\right]\frac{\cancel{U_B}}{T_B}y^{(1)} + \left[1 + \frac{R_L}{R}\right]\frac{\cancel{U_B}}{LC}y = 0$ mit der angeg. Normierung

$T_B = \sqrt{LC}$ folgt $y^{(2)} + \left[R_L\sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\right]y^{(1)} + \left[1 + \frac{R_L}{R}\right]y = 0$

(iii) $P(s) = s^2 + \underbrace{\left[R_L\sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\right]}_{=a_1}s + \underbrace{\left[1 + \frac{R_L}{R}\right]}_{=a_0} \stackrel{!}{=} 0 \longrightarrow p_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}$

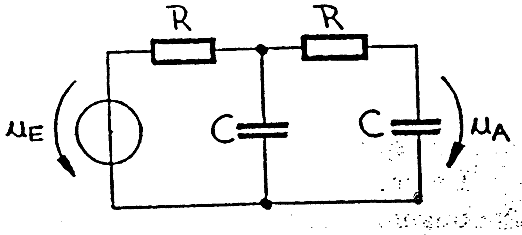
$\to \mathrm{Re}(p_{1,2})$

(iv) Grenzstabilität: $\mathrm{Re}(p_{1,2}) = -\frac{1}{2}\left[R_L\sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\right] \stackrel{!}{=} 0$

Realteil

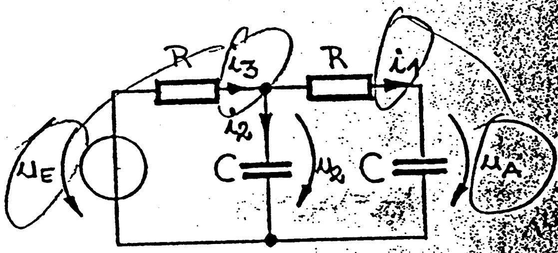
$R = -\frac{1}{R_L}\frac{L}{C}$

RC-Kette (zweigliedrig):



In der dargestellten Schaltung ist u_E die Eingangsgröße und u_A die Ausgangsgröße. Bestimmen Sie die zugehörige Übertragungsfunktion $G(s)$ (Bezugsgrößen $U_{EB} = U_{AB}$, $T_B = RC$).

LÖSUNG:



$U_{EB} = U_{AB} = U_B$

$T_B = RC$

Die Schaltung wird am besten vom Ausgang zum Eingang aufgelöst.

$$i_1 = C\frac{du_A}{dt}$$

$$u_2 = Ri_1 + u_A = RC\frac{du_A}{dt} + u_A$$

$$i_2 = C\frac{du_2}{dt} = RC^2\frac{d^2u_A}{dt^2} + C\frac{du_A}{dt}$$

$$i_3 = i_1 + i_2 = C\frac{du_A}{dt} + RC^2\frac{d^2u_A}{dt^2} + C\frac{du_A}{dt} = RC^2\frac{d^2u_A}{dt^2} + 2C\frac{du_A}{dt}$$

$$u_E = Ri_3 + u_2 = R^2C^2\frac{d^2u_A}{dt^2} + 2RC\frac{du_A}{dt} + RC\frac{du_A}{dt} + u_A = R^2C^2\frac{d^2u_A}{dt^2} + 3RC\frac{du_A}{dt} + u_A$$

Die Differentialgleichung in nichtbezogener Form lautet somit

$$R^2C^2\frac{d^2u_A}{dt^2} + 3RC\frac{du_A}{dt} + u_A = u_E$$

Einführung normierter Größen $u_A = U_B y$, $u_E = U_B u$, $t = T_B\tau$ und einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

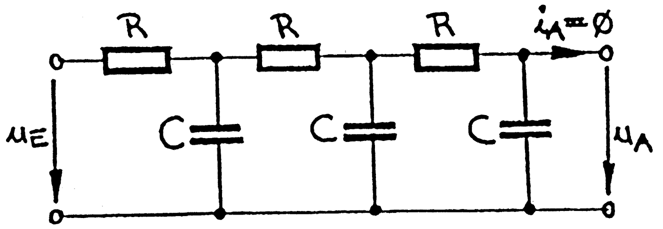
$$\left(\frac{RC}{T_B}\right)^2 \cancel{U_B}\, y^{(2)} + 3\left(\frac{RC}{T_B}\right)\cancel{U_B}\, y^{(1)} + \cancel{U_B}\, y = \cancel{U_B}\, u$$

bzw. mit der angegebenen Normierung $T_B = RC$ folgt

$$y^{(2)} + 3y^{(1)} + y = u.$$

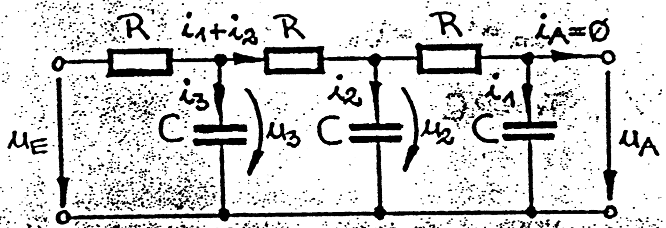
Die Übertragungsfunktion kann direkt aus der System-DGL abgelesen werden zu $G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 1}$.

RC-Kette (dreigliedrig):



In der dargestellten Schaltung ist u_E die Eingangsgröße und u_A die Ausgangsgröße.
Bestimmen Sie die zugehörige Übertragungsfunktion $G(s)$ (Bezugsgrößen $U_{EB} = U_{AB}$, $T_B = R \cdot C$).

LÖSUNG:



$U_{EB} = U_{AB} = U_B$

$T_B = RC$

Die Schaltung wird am besten vom Ausgang zum Eingang aufgelöst.

$$i_1 = C\frac{du_A}{dt} \quad , \quad u_2 = Ri_1 + u_A = RC\frac{du_A}{dt} + u_A \quad , \quad i_2 = C\frac{du_2}{dt} = RC^2\frac{d^2u_A}{dt^2} + C\frac{du_A}{dt}$$

$$u_3 = R(i_1+i_2) + u_2 = RC\frac{du_A}{dt} + R^2C^2\frac{d^2u_A}{dt^2} + RC\frac{du_A}{dt} + RC\frac{du_A}{dt} + u_A$$

$$u_3 = R^2C^2\frac{d^2u_A}{dt^2} + 3RC\frac{du_A}{dt} + u_A \quad , \quad i_3 = C\frac{du_3}{dt} = R^2C^3\frac{d^3u_A}{dt^3} + 3RC^2\frac{d^2u_A}{dt^2} + C\frac{du_A}{dt}$$

$$u_E = R(i_1+i_2+i_3) + u_3 = RC\frac{du_A}{dt} + R^2C^2\frac{d^2u_A}{dt^2} + RC\frac{du_A}{dt} + R^3C^3\frac{d^3u_A}{dt^3} + 3R^2C^2\frac{d^2u_A}{dt^2} + RC\frac{du_A}{dt}$$
$$+ R^2C^2\frac{d^2u_A}{dt^2} + 3RC\frac{du_A}{dt} + u_A$$

Die Differentialgleichung in nichtbezogener Form lautet somit

$$R^3C^3\frac{d^3u_A}{dt^3} + 5R^2C^2\frac{d^2u_A}{dt^2} + 6RC\frac{du_A}{dt} + u_A = u_E \quad .$$

Einführung bezogener Größen $u_A = U_B y$, $u_E = U_B u$, $t = T_B \tau$ ergibt

$$\frac{R^3C^3}{T_B^3}y^{(3)} + 5\frac{R^2C^2}{T_B^2}y^{(2)} + 6\frac{RC}{T_B}y^{(1)} + y = u$$

bzw. mit der angegebenen Normierung $T_B = RC$ folgt

$$\underline{y^{(3)} + 5y^{(2)} + 6y^{(1)} + y = u} \quad .$$

Die Übertragungsfunktion kann direkt aus der System-DGL abgelesen werden zu $\underline{\underline{G(s) = \frac{1}{s^3+5s^2+6s+1}}}$.

Sprungantwort:

Berechnen Sie die Sprungantwort des Systems mit der Differentialgleichung

$$y^{(2)} + 4 \cdot y^{(1)} + 3 \cdot y = u \ .$$

$u(\tau) = \varepsilon(\tau)$ $H(s) = \frac{G(s)}{s}$

LÖSUNG:

Die Übertragungsfunktion kann unmittelbar aus der System-DGL abgelesen werden.

$$G(s) = \frac{1}{s^2+4s+3}$$

Die Pole des Systems ergeben sich aus den Nullstellen des Nennerpolynoms der Übertragungsfunktion zu $p_1 = -1$; $p_2 = -3$, d.h. das System ist stabil.

Die homogene Lösung lautet $y_h(\tau) = c_1 e^{p_1\tau} + c_2 e^{p_2\tau} = c_1 e^{-\tau} + c_2 e^{-3\tau}$.

Die partikuläre Lösung lautet $y_p(\tau) = G(0) = \frac{1}{3}$.

Die Gesamtlösung lautet $y(\tau) = y_p(\tau) + y_h(\tau) = c_1 e^{-\tau} + c_2 e^{-3\tau} + \frac{1}{3}$.

$u(0-) = 0$ und $u^{(1)}(0-) = 0$ sind die bekannten Anfangsbedingungen. Da das System keine Nullstelle besitzt folgt daraus sofort $y(0-) = 0$ und $y^{(1)}(0-) = 0$ zur Bestimmung der unbekannten Konstanten c_1 und c_2.

$$\left.\begin{aligned} y(0-):&\quad c_1 + c_2 + \frac{1}{3} = 0 \\ y^{(1)}(0-):&\quad -c_1 - 3c_2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \underline{c_1 = -0{,}5} \quad \underline{c_2 = \frac{1}{6}}$$

Die allgemeine Lösung ist also $h(\tau) = [-\frac{1}{2} e^{-\tau} + \frac{1}{6} e^{-3\tau} + \frac{1}{3}]\,\varepsilon(\tau)$.

Andere Lösungsmöglichkeit über Laplace-Transformation:

$$H(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{1}{s(s^2+4s+3)} = \frac{1}{s(s+1)(s+3)} = \frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{s+1} + \frac{r_3}{s+3}$$

$$r_1 = sH(s)\Big|_{s=0} = \frac{1}{3} \qquad r_2 = (s+1)\,H(s)\Big|_{s=-1} = -\frac{1}{2} \qquad r_3 = (s+3)\,H(s)\Big|_{s=-3} = \frac{1}{6}$$

$$H(s) = \frac{1}{3}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{6}\frac{1}{s+3} \bullet\!\!-\!\!\circ\, h(\tau) = [-\frac{1}{2}e^{-\tau} + \frac{1}{6}e^{-3\tau} + \frac{1}{3}]\,\varepsilon(\tau)$$

Sprungantwort 2:

Berechnen Sie die Sprungantwort des Systems mit der Differentialgleichung

$$y^{(1)} + 2 \cdot y = 0{,}5 \cdot u^{(1)} + 3 \cdot u \;.$$

$H(s) = \frac{G(s)}{s}$

LÖSUNG:

Die Übertragungsfunktion kann aus der System-DGL abgelesen werden. $G(s) = \frac{0{,}5s+3}{s+2} = \frac{1}{2}\,\frac{s+6}{s+2}$

Das System besitzt einen einfachen Pol $p_1 = -2$, d.h. das System ist stabil.

Die homogene Lösung lautet $y_h(\tau) = c_1 e^{p_1 \tau} = c_1 e^{-2\tau}$.

Die partikuläre Lösung lautet $y_p(\tau) = G(0) = \frac{3}{2}$.

Die Gesamtlösung lautet $y(\tau) = y_h(\tau) + y_p(\tau) = c_1 e^{-2\tau} + \frac{3}{2}$.

$u(0-) = 0$ ist die bekannte Anfangsbedingung. Aus $G(s)$ folgt die DGL $y^{(1)} + 2y = 0{,}5u^{(1)} + 3u$. Einsetzen der verallg. Ableitungen $y^{(1)} = \{y^{(1)}\} + [\![y]\!]\varepsilon^{(1)}$ bzw. $u^{(1)} = \{u^{(1)}\} + [\![u]\!]\varepsilon^{(1)}$ liefert $\{y^{(1)}\} + [\![y]\!]\varepsilon^{(1)}(\tau) + 2\{y\} = 0{,}5\{u^{(1)}\} + 0{,}5[\![y]\!]\varepsilon^{(1)}(\tau) + 3$

Die Terme mit $\varepsilon^{(1)}(\tau)$ müssen die gleichen Koeffizienten besitzen, daraus folgt $[\![y]\!] = 0{,}5\,[\![u]\!]$ und schließlich $y(0+) = 0{,}5\,u(0+) = 0{,}5$.

Anpassen der Lösung an die Anfangsbedingung ergibt

$y(0+) = 0{,}5 = c_1 + 1{,}5$ bzw. $c_1 = -1$.

Die vollständige Lösung ist also $h(\tau) = [\frac{3}{2} - e^{-2\tau}]\,\varepsilon(\tau)$.

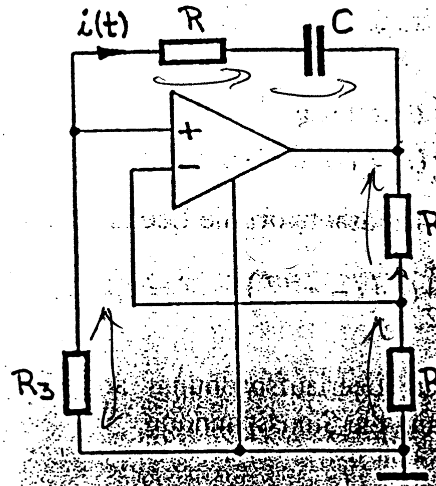
Die wahrscheinlich beste Lösungsmethode ist über die Laplace-Transformation. $H(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{0{,}5s+3}{s(s+2)} = \frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{s+2}$

$r_1 = sH(s)\Big|_{s=0} = \frac{0{,}5s+3}{s+2}\Big|_{s=0} = \frac{3}{2}$ $\quad r_2 = (s+2)H(s)\Big|_{s=-2} = \frac{0{,}5s+3}{s}\Big|_{s=-2} = -1$

$H(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\; h(\tau) = [\frac{3}{2} - e^{-2\tau}]\,\varepsilon(\tau)$

Stabilität:

$i(t) \cdot R_3 = i_x \cdot R_2$ $\boxed{i_+ = \dfrac{i(t)\,R_3}{R_2}}$



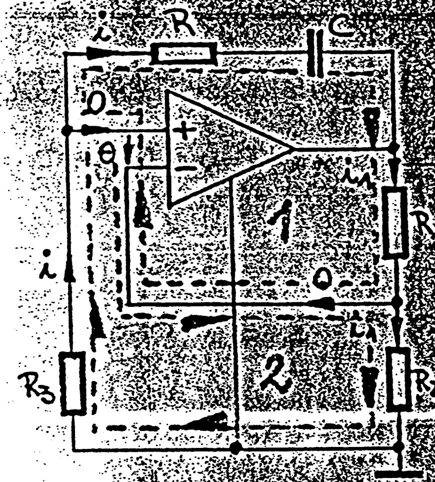
Wie lautet die Differentialgleichung für den Strom *i* als Ausgangsgröße in bezogener Form ? Setzen Sie ideales Verhalten des Operationsverstärkers voraus.

(*i*) Untersuchen sie das System auf Stabilität.

(*ii*) Berechnen Sie den zeitlichen Verlauf des Stromes $i(t)$.

$y(\tau) = y_h(\tau) = c_1 e^{p_1 \tau}$ $i(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{T_B}}$

LÖSUNG:



Die Kirchhoffsche Knoten- und Maschenregel liefert mit den Bezugssinnen aus Abb. 1 das folgende Differentialgleichungssystem:

Masche 1: $Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt + R_1 i_1 = 0$ (1)

Masche 2: $R_2 i_1 + R_3 i = 0$ (2)

aus (2) folgt $i_1 = -\frac{R_3}{R_2} i$ in (1)

$Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt - \frac{R_1}{R_2} R_3 i = 0$ (1)'

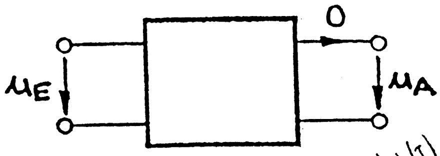
Differentiation von (1)' und umformen liefert $\left(R - \frac{R_1}{R_2} R_3\right)\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$.

Einführen bezogener Größen $i = I_B y$, $t = T_B \tau$ ergibt $y^{(1)} + \frac{T_B}{\left(R - \frac{R_1}{R_2}R_3\right)C}\, y = 0$.

(i) Das char. Polynom $P(s) = s + \frac{T_B}{\left(R - \frac{R_1}{R_2}R_3\right)C}$ besitzt den einfachen Pol $p_1 = -\frac{T_B}{\left(R - \frac{R_1}{R_2}R_3\right)C}$. Das System ist stabil, wenn der Pol des Systems in der (abgeschlossenen) linken Halbebene im Pol/Nullstellen-Diagramm liegt, d.h. $p_1 < 0$ ist. $-\frac{T_B}{\left(R - \frac{R_1}{R_2}R_3\right)C} < 0 \longrightarrow R > \frac{R_1}{R_2} R_3$ sein, damit das System stabil ist.

(ii) $y(\tau) = y_h(\tau) = c_1 e^{p_1 \tau} = c_1 e^{-\frac{T_B}{\left(R - \frac{R_1}{R_2}R_3\right)C}\tau}$ mit der Normierung $T_B = \left(R - \frac{R_1}{R_2}R_3\right)C$ folgt $y(\tau) = c_1 e^{-\tau}$ bzw. in nichtbez. Form $i(t) = c\, e^{-\frac{t}{T_B}}$. Einbringen der Anfangsbedingung $i(0) = I_0$ ergibt schließlich $i(t) = I_0 e^{-t/T_B}$ für $t > 0$.

Stationärer Ausgang eines Übertragungsglieds:



Ein Übertragungsglied liefert zur Eingangsspannung

$$u_E = \begin{cases} 0 \text{ für } t < 0, \\ U_0 = const. \text{ für } t \geq 0 \end{cases} \Big\} \text{ Sprung}$$

als Nullzustandsantwort die Leerlaufspannung

$$G(s) \circ\!\!-\!\!\bullet\, g(\tau) \leftarrow g(\tau) = \frac{d}{d\tau} h(\tau) \leftarrow \text{Sprung=antwort } h(\tau) \leftarrow u_A = \frac{1}{2} U_0 \left(1 - e^{-t/T}\right), \quad T = 0{,}12\,ms.$$

Berechnen Sie damit die stationäre Schwingung der Leerlaufspannung am Ausgang (Amplitude, Frequenz, Nullphasenwinkel), wenn am Eingang die Sinusspannung

$u_E = 5V\cos(\omega t)$ ↳ in der Form

mit einer Frequenz von $f = 1kHz$ liegt. $y_{st}(\tau) = \hat{y}\cos(\nu\tau + \varphi_y)$

bzw. $y_{st}(t) = \ldots$

LÖSUNG:

Bezogene Größen: $U_{EB} = U_{AB} = U_0$, $\tau = \frac{t}{T}$, $2\pi f T = \nu = 0{,}24\pi$

$$h(\tau) = \frac{1}{2}(1 - e^{-\tau})\varepsilon(\tau) \rightarrow g(\tau) = \frac{1}{2}e^{-\tau}\varepsilon(\tau)$$

Mit Hilfe von Tab. 4.1 Zeile 6: $e^{-a\tau}\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+a}$ folgt

$G(s) \circ\!\!-\!\!\bullet\, g(\tau)$ $\quad \underline{G(s) = \mathcal{L}[g(\tau)] = \frac{1}{2}\frac{1}{s+1}}$.

$$\underline{u(\tau) = \frac{5V}{U_0}\cos(\nu\tau)}$$

stabil? Da das System stabil ist, entspricht die partikuläre Lösung der stationären Ausgangsschwingung.

$y_p(\tau) = \ldots$

$$\underline{y_{st}(\tau) = y_p(\tau) = Re\left[\frac{5V}{U_0}\frac{1}{2}\frac{1}{s+1}e^{s\tau}\Big|_{s=j\nu}\right]}$$

$$\underline{y_{st}(\tau)} = \frac{2{,}5V}{U_0} Re\left[\frac{1}{1+j\nu}e^{j\nu\tau}\right] = \underline{\frac{1{,}996V}{U_0} e^{j(\nu\tau - 0{,}646)}}$$

$$[\cos\nu\tau + j\sin\nu\tau] \cdot \frac{1}{1+j\nu}$$

Das Endergebnis lautet somit

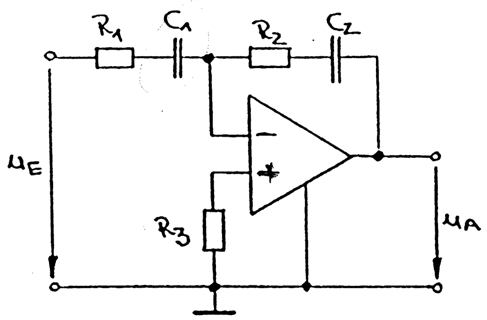
$$\underline{\underline{u_A(t) = 1{,}996V\cos(2\pi 1kHz\,t - 0{,}646)}}.$$

$$\frac{\cos\nu\tau}{1+j\nu} \qquad - \frac{\nu\sin\nu\tau}{1+\nu^2}$$

$$\frac{1-j\nu}{1+\nu^2}$$

Systemdifferentialgleichung:

$\frac{U_A(s)}{U_E(s)} = G(s)$ über DG schreiben.



u_E ist die Eingangsgröße, die Ausgangsgröße u_A des Übertragungsgliedes mit einem idealen Operationsverstärker. Bestimmen Sie für allgemeine Bezugswerte die Koeffizienten der System-Differentialgleichung in der Standardform.

LÖSUNG:

Direktes Rechnen im Laplace-Bereich (Beste Möglichkeit)!

$$U_E(s) = \left[R_1 + \frac{1}{sC_1}\right] I(s)$$

$$U_A(s) = -\left[R_2 + \frac{1}{sC_2}\right] I(s)$$

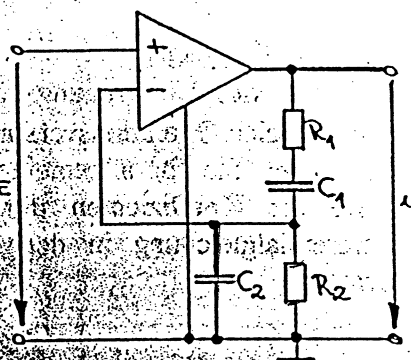
$$G(s) = \frac{U_A(s)}{U_E(s)} = -\frac{R_2 + \frac{1}{sC_2}}{R_1 + \frac{1}{sC_1}} = -\frac{sC_1R_2 + \frac{C_1}{C_2}}{sC_1R_1 + 1}$$

daraus folgt unmittelbar die Differentialgleichung

$$R_1C_1 y^{(1)} + y = -R_2C_1 u^{(1)} - \frac{C_1}{C_2} u \qquad \text{bzw. mit } T_B$$

$$\boxed{y^{(1)} + \frac{T_B}{R_1C_1} y = -\frac{R_2}{R_1} u^{(1)} - \frac{T_B}{R_1C_2} u}.$$

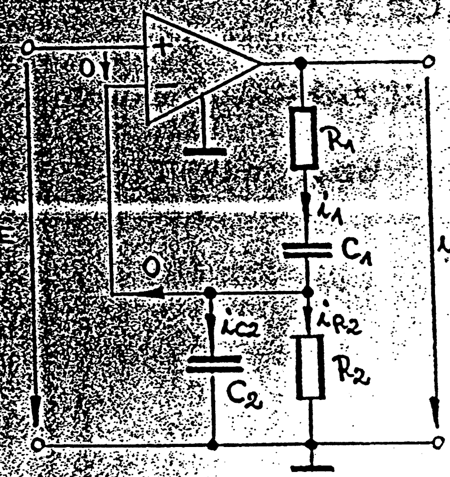
Systemdifferentialgleichung 2:



u_E ist die Eingangsgröße, die Ausgangsgröße u_A des Übertragungsgliedes mit einem idealen Operationsverstärker.

(i) Bestimmen Sie für allgemeine Bezugswerte ($U_B = U_{EB} = U_{AB}$, T_B) die System-DGL in Standardform und deren Koeffizienten.
(ii) Durch welche Parallelschaltung von idealen Differentiatoren, Integratoren und Verstärkern ist dieses System darstellbar ?
(iii) Skizzieren Sie das zugehörige Strukturbild.

LÖSUNG:



(i) Die Kirchhoffsche Knoten- und Maschenregel liefert:

$$i_{C2} = C_2 \frac{du_E}{dt} \quad (1) \qquad i_{R2} = \frac{u_E}{R_2} \quad (2)$$

$$i_1 = i_{C2} + i_{R2} = C_2 \frac{du_E}{dt} + \frac{u_E}{R_2} \quad (3)$$

$$u_A = u_E + R_1 i_1 + \frac{1}{C_1}\int i_1 dt \quad (4)$$

(3) in (4) liefert

$$u_A = u_E + R_1 C_2 \frac{du_E}{dt} + \frac{R_1}{R_2} u_E + \frac{1}{C_1}\int \left[C_2 \frac{du_E}{dt} + \frac{u_E}{R_2}\right] dt$$

$$u_A = u_E + R_1 C_2 \frac{du_E}{dt} + \frac{R_1}{R_2} u_E + \frac{C_2}{C_1}\int \frac{du_E}{\cancel{dt}} \cancel{dt} + \frac{1}{R_2 C_1}\int u_E dt$$

$$u_A = \left(1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}\right) u_E + R_1 C_2 \frac{du_E}{dt} + \frac{1}{R_2 C_1}\int u_E dt \quad (4)'$$

Differentiation von (4)' ergibt die System-DGL in nichtbezogener Form

$$\frac{du_A}{dt} = \left(1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}\right) \frac{du_E}{dt} + R_1 C_2 \frac{d^2 u_E}{dt^2} + \frac{u_E}{R_2 C_1} \qquad \text{bzw.}$$

$$\underline{\underline{\frac{du_A}{dt} = R_1 C_2 \frac{d^2 u_E}{dt^2} + \left(1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}\right) \frac{du_E}{dt} + \frac{u_E}{R_2 C_1}}}$$

Durch einsetzen bezogener Größen $u_A = U_B y$, $u_E = U_B u$, $t = T_B \tau$

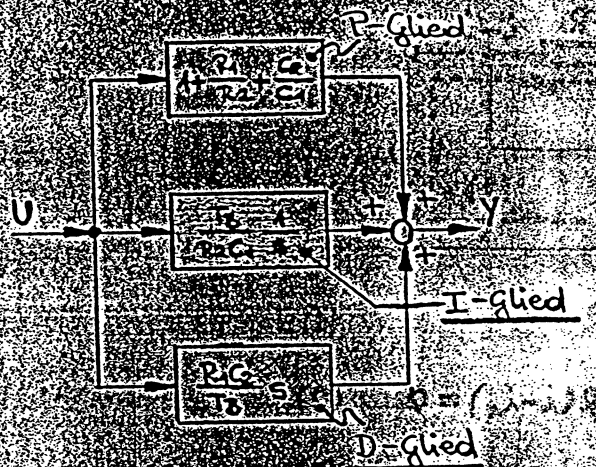
in die Differentialgleichung erhalten wir

$$y^{(1)} = \frac{R_1 C_2}{T_B} u^{(2)} + \left(1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}\right) u^{(1)} + \frac{T_B}{R_2 C_1} u .$$

(ii) Die Übertragungsfunktion kann direkt aus der System-DGL abgelesen werden zu

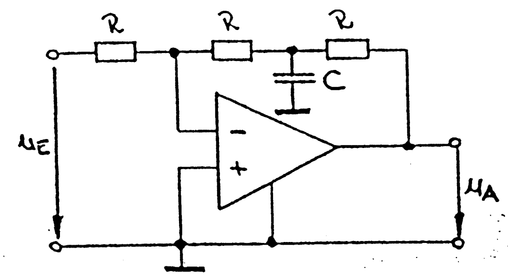
$$\underline{\underline{G(s)}} = \frac{\frac{R_1C_2}{T_B}s^2 + \left(1+\frac{R_1}{R_2}+\frac{C_2}{C_1}\right)s + \frac{T_B}{R_2C_1}}{s} = \underbrace{\frac{R_1C_2}{T_B}s}_{\text{D-Anteil}} + \underbrace{\left(1+\frac{R_1}{R_2}+\frac{C_2}{C_1}\right)}_{\text{P-Anteil}} + \underbrace{\frac{T_B}{R_2C_1}\frac{1}{s}}_{\text{I-Anteil}}$$

(iii) Strukturdiagramm (im Laplace-Bereich):



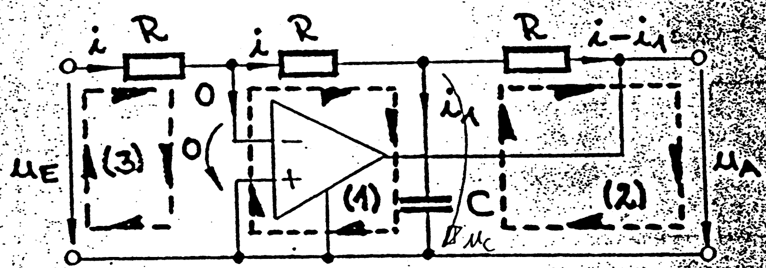
Seite 166 Buch

Systemdifferentialgleichung 3:



u_E ist die Eingangsgröße, die Ausgangsgröße u_A des Übertragungsgliedes mit einem idealen Operationsverstärker. Bestimmen Sie für allgemeine Bezugswerte die System-Differerentialgleichung in Standardform und deren Koeffizienten.

LÖSUNG:



Masche (1): $Ri+\frac{1}{C}\int i_1 dt=\emptyset$ (1)

Masche (2): $u_A-\frac{1}{C}\int i_1 dt + R(i-i_1)=\emptyset$ (2)

Masche (3): $i=\frac{u_E}{R}$ (3)

aus (1) folgt $\frac{1}{C}\int i_1 dt = -Ri \rightarrow i_1 = -RC\frac{di}{dt}$ in (2):

$u_A + Ri + Ri + R^2C\frac{di}{dt} = \emptyset \rightarrow u_A + 2Ri + R^2C\frac{di}{dt} = \emptyset$

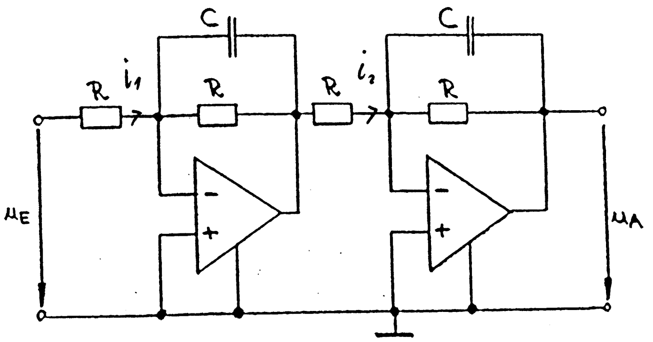
mit (3) ergibt sich $u_A + 2u_E + RC\frac{du_E}{dt} = \emptyset \rightarrow \underline{u_A = -RC\frac{du_E}{dt} - 2u_E}$.

Die Differentialgleichung in bezogener Form ergibt sich mit der Normierung $u_A = U_B y$, $u_E = U_B u$, $t = T_B \tau$:

$\underline{\underline{y = -\frac{RC}{T_B}u^{(1)} - 2u}}$.

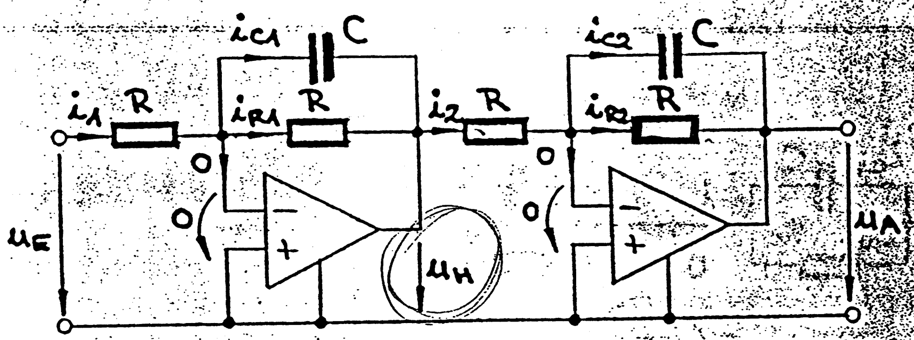
Wird zusätzlich $\underline{T_B = RC}$ gewählt, so vereinfacht sich die System-DGL noch zu $\underline{\underline{y = -u^{(1)} - 2u}}$.

Systemdifferentialgleichung 4:



u_E ist die Eingangsgröße, die Ausgangsgröße u_A des Übertragungsgliedes mit einem idealen Operationsverstärker. Bestimmen Sie für allgemeine Bezugswerte die System-Differerentialgleichung in Standardform und deren Koeffizienten.

LÖSUNG:



Die Schaltung wird am besten vom Ausgang zum Eingang aufgelöst.

$$i_{C2} = -C\frac{du_A}{dt}, \quad i_{R2} = -\frac{u_A}{R}, \quad i_2 = i_{C2} + i_{R2} = -C\frac{du_A}{dt} - \frac{u_A}{R}$$

$$u_H = Ri_2 = -RC\frac{du_A}{dt} - u_A$$

$$i_{C1} = -C\frac{du_H}{dt}, \quad i_{R1} = -\frac{u_H}{R}, \quad i_1 = i_{C1} + i_{R1} = -C\frac{du_H}{dt} - \frac{u_H}{R}$$

$$u_E = Ri_1 = -RC\frac{du_H}{dt} - u_H = (RC)^2\frac{d^2u_A}{dt^2} + RC\frac{du_A}{dt} + RC\frac{du_A}{dt} + u_A$$

$$\underline{(RC)^2\frac{d^2u_A}{dt^2} + 2RC\frac{du_A}{dt} + u_A = u_E}$$

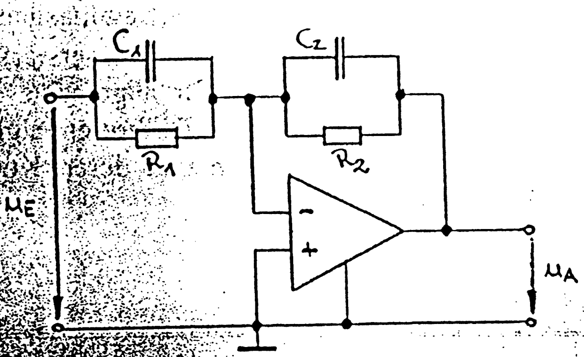
Normierung: $\underline{u_A = U_B y}$, $\underline{u_E = U_B u}$, $\underline{t = T_B \tau}$

$$\underline{\underline{\left(\frac{RC}{T_B}\right)^2 y^{(2)} + 2\frac{RC}{T_B}y^{(1)} + y = u}}$$

Wird $\underline{T_B = RC}$ gewählt so vereinfacht sich die System-DGL noch zu

$$\underline{\underline{y^{(2)} + 2y^{(1)} + y = u}}\,.$$

Systemdifferentialgleichung 5:

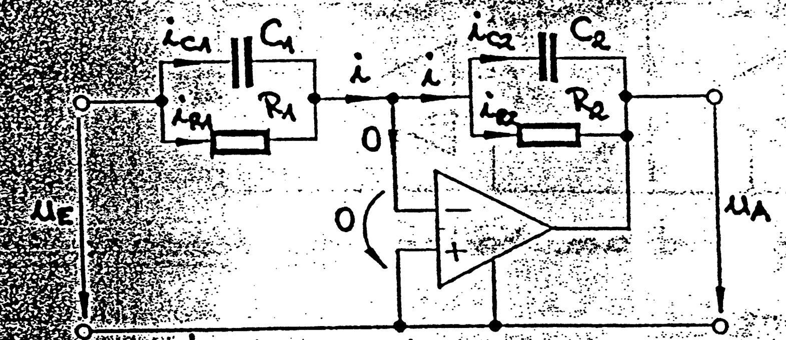


u_E ist die Eingangsgröße, die Ausgangsgröße u_A des Übertragungsgliedes mit einem idealen Operationsverstärker. Bestimmen Sie für

$$R_1 = 10k\Omega \quad ; \quad R_2 = 100k\Omega$$
$$C_1 = 1\mu F \quad ; \quad C_2 = 2\mu F$$
$$U_{EB} = U_{AB} \quad ; \quad T_B = 100ms$$

die System-Differerentialgleichung in bezogener Standardform und deren Koeffizienten.

LÖSUNG:



$$i_{C1} = C_1 \frac{du_E}{dt}, \quad i_{R1} = \frac{u_E}{R_1}, \quad i = i_{C1} + i_{R1} = C_1 \frac{du_E}{dt} + \frac{u_E}{R_1}$$

$$i_{C2} = -C_2 \frac{du_A}{dt}, \quad i_{R2} = -\frac{u_A}{R_2}, \quad i = i_{C1} + i_{R1} = -C_2 \frac{du_A}{dt} - \frac{u_A}{R_2}$$

$$C_2 \frac{du_A}{dt} + \frac{u_A}{R_2} = -C_1 \frac{du_E}{dt} - \frac{u_E}{R_1}$$

$$\frac{du_A}{dt} + \frac{1}{R_2 C_2} u_A = -\frac{C_1}{C_2} \frac{du_E}{dt} - \frac{1}{R_1 C_2} u_E$$

Normierung: $u_A = U_B y$, $u_E = U_B u$, $t = T_B \tau$

$$\frac{1}{T_B} y^{(1)} + \frac{1}{R_2 C_2} y = -\frac{C_1}{C_2} \frac{1}{T_B} u^{(1)} - \frac{1}{R_1 C_2} u$$

$$y^{(1)} + \frac{T_B}{R_2 C_2} y = -\frac{C_1}{C_2} u^{(1)} - \frac{T_B}{R_1 C_2} u$$

dies entspricht einer Differentialgleichung der Form

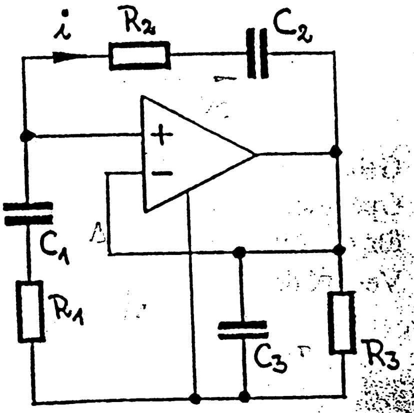
$y^{(1)} + a_0 y = b_1 u^{(1)} + b_0 u$. Mit den geg. Werten folgt

$$a_0 = \frac{T_B}{R_2 C_2} = 0{,}5 \qquad b_1 = -\frac{C_1}{C_2} = -0{,}5 \qquad b_0 = -\frac{T_B}{R_1 C_2} = -5.$$

$$y^{(1)} + 0{,}5 y = -0{,}5 u^{(1)} - 5u$$

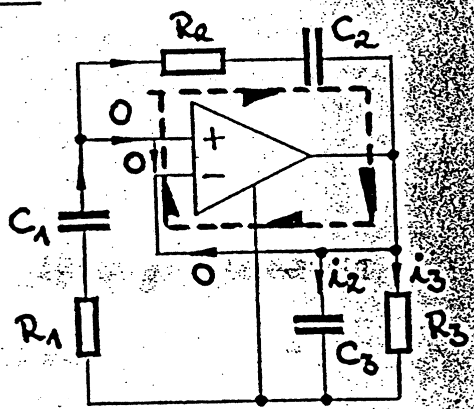
23a

Systemdifferentialgleichung 7:



Wie lautet die Differentialgleichung für den Strom i als Ausgangsgröße in bezogener Form ? Setzen Sie ideales Verhalten des Operationsverstärkers voraus.

LÖSUNG:



Die eingezeichnete Masche liefert sofort die gesuchte Differentialgleichung für den Strom i.

$$R_2 i + \frac{1}{C_2}\int i\,dt = 0 \rightarrow \underline{\frac{di}{dt} + \frac{1}{R_2C_2}\, i = 0}$$

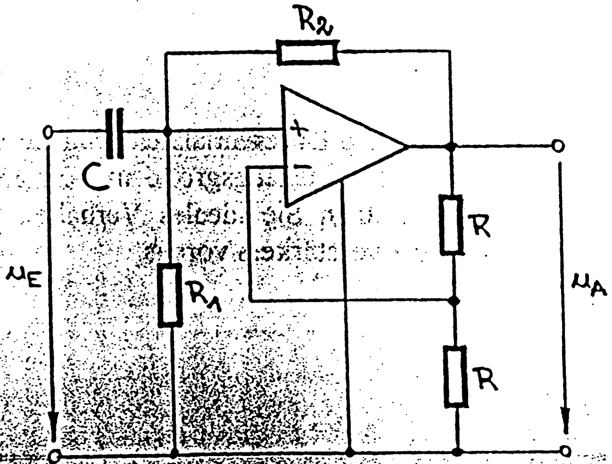
Einführung bezogener Größen $i = I_B y$; $t = T_B \tau$ ergibt schließlich die System-DGL in bezogener Form.

$$\underline{y^{(1)} + \frac{T_B}{R_2C_2}\, y = 0}$$

Mit der zweckmäßigen Normierung $T_B = RC$ vereinfacht sich das Ergebnis noch auf

$$\underline{\underline{y^{(1)} + y = 0}}\,.$$

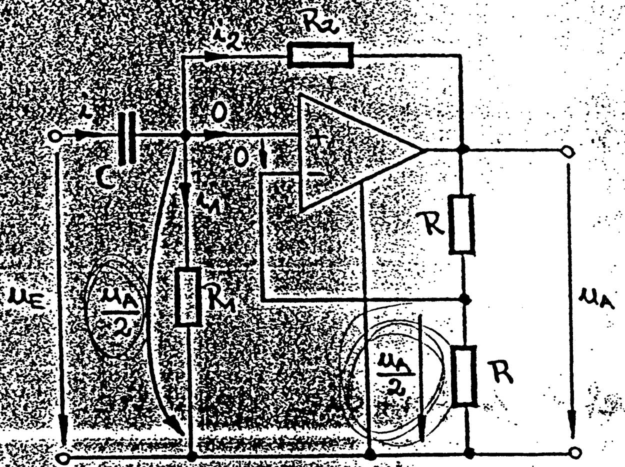
Systemdifferentialgleichung 6:



Spg.-teiler!!

Geben Sie für die Schaltung mit einem idealen Operationsverstärker die Differentialgleichung für die Ausgangsspannung u_A bei allgemeinem Verlauf der Eingangsspannung u_E an.

LÖSUNG:



Die Schaltung wird am besten vom Ausgang zum Eingang aufgelöst.

$$i_1 = \frac{u_A/2}{R_1} = \frac{u_A}{2R_1}, \quad i_2 = \frac{u_A/2 - u_A}{R_2} = -\frac{u_A}{2R_2}, \quad i = i_1 + i_2 = \frac{u_A}{2R_1} - \frac{u_A}{2R_2} = \frac{u_A}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$u_E = \frac{1}{C}\int i\,dt + \frac{u_A}{2} = \frac{1}{C}\int \frac{u_A}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) dt + \frac{u_A}{2}$$

Durch Differentiation erhält man die System-DGL in nichtbezogener Form:

$$\frac{du_A}{dt} + \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\frac{1}{C}\, u_A = 2\,\frac{du_E}{dt}$$

Einführen bezogener Größen $u_A = U_{AB}\, y$, $u_E = U_{EB}\, u$, $t = T_B \tau$, $U_{EB} = U_{AB} = U_B$

$$y^{(1)} + \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\frac{T_B}{C}\, y = 2u^{(1)}$$

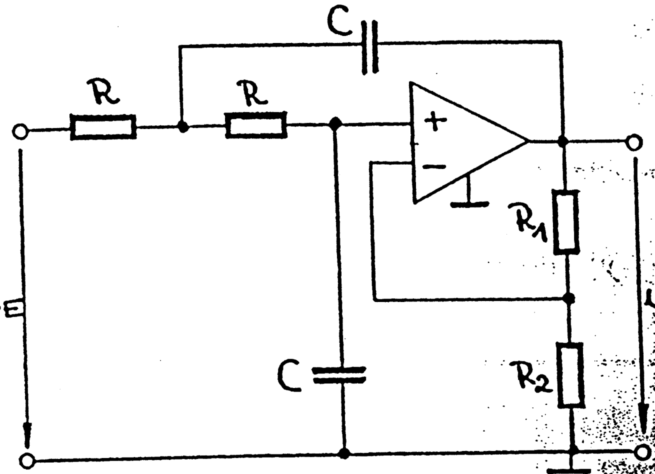
dies entspricht einer Standart-Differentialgleichung der Form

$y^{(1)} + a_0 y = b_1 u^{(1)}$ mit den Koeffizienten $a_0 = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\frac{T_B}{C}$

und $b_1 = 2$.

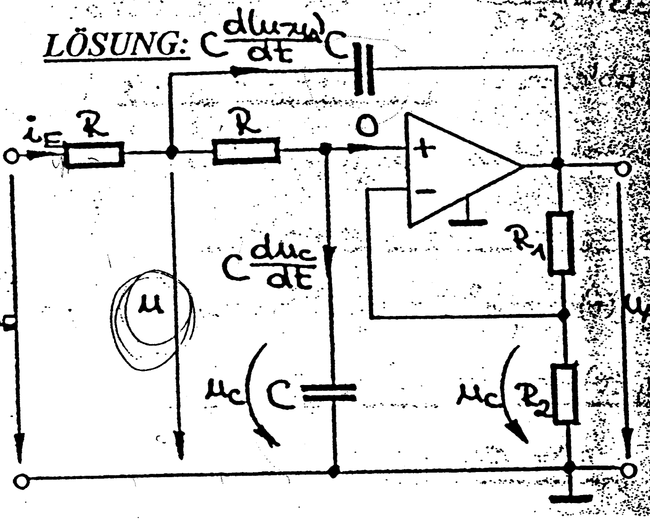
Systemdifferentialgleichung 8:

Spg Teiler!



Geben Sie die Differentialgleichung der Schaltung für u_A in bezogener Form an. Setzen Sie dazu ideales Verhalten des Operationsverstärkers voraus.

LÖSUNG:



Die Schaltung wird am besten vom Ausgang zum Eingang aufgelöst.

$$u_E = R i_E + u = RC\left[\frac{d(u-u_A)}{dt} + \frac{du_C}{dt}\right] + u = RC\left[\frac{du}{dt} - \frac{du_A}{dt} + \frac{du_C}{dt}\right] + u$$

$$u_E = RC\left[RC\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{du_C}{dt} - \frac{du_A}{dt} + \frac{du_C}{dt}\right] + RC\frac{du_C}{dt} + u_C$$

$$(RC)^2\frac{d^2u_C}{dt^2} + 3RC\frac{du_C}{dt} - RC\frac{du_A}{dt} + u_C = u_E$$

$$(RC)^2\frac{R_2}{R_1+R_2}\frac{d^2u_A}{dt^2} + 3RC\frac{R_2}{R_1+R_2}\frac{du_A}{dt} - RC\frac{du_A}{dt} + \frac{R_2}{R_1+R_2}u_A = u_E$$

$$(RC)^2\frac{d^2u_A}{dt^2} + RC\left(3 - \frac{R_1+R_2}{R_2}\right)\frac{du_A}{dt} + u_A = \frac{R_1+R_2}{R_2}u_E$$

$$\underline{\underline{(RC)^2\frac{d^2u_A}{dt^2} + RC\left(2 - \frac{R_1}{R_2}\right)\frac{du_A}{dt} + u_A = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)u_E}}$$

Normierung: $T_B = RC$, $t = T_B\tau$, $u_A = U_{AB}\,y$, $u_E = U_{EB}\,u$

$$\underline{\underline{y^{(2)} + \left(2 - \frac{R_1}{R_2}\right)y^{(1)} + y = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)\frac{U_{EB}}{U_{AB}}u}}$$

mit $\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)\frac{U_{EB}}{U_{AB}} = 1$ folgt $\underline{\underline{y^{(2)} + \left(2 - \frac{R_1}{R_2}\right)y^{(1)} + y = u}}$.

System-Differentialgleichung aus Übertragungsfunktion:

Von einem System ist die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{3 \cdot s + 2}{s^2 + 2}$$

bekannt. Stellen Sie die zugehörige System-Differentialgleichung auf und bestimmen Sie deren Lösung für

$$\tau > 0: \; u(\tau) = \varepsilon(\tau) \; ; \; y(0+) = 1/2 \; ; \; y^{(1)}(0+) = 0 \; .$$

LÖSUNG:

Aus der Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{3s+2}{s^2+2}$ läßt sich unmittelbar die Systemdifferentialgleichung ablesen: $y^{(2)} + 2y = 3u^{(1)} + 2u$

Die Übertragungsfunktion besitzt das konjugiert komplexe Polpaar $p_{1,2} = \pm j\sqrt{2}$, d.h. das System ist grenzstabil.

Die homogene Lösung lautet $y_h(\tau) = c_1 e^{p_1 \tau} + c_2 e^{p_2 \tau} = c_1 e^{j\sqrt{2}\tau} + c_2 e^{-j\sqrt{2}\tau}$,

$y_h(\tau) = a_1 \cos(\sqrt{2}\tau) + a_2 \sin(\sqrt{2}\tau)$.

Die partikuläre Lösung lautet $y_p(\tau) = G(0) = 1$. ? 2.

Die Gesamtlösung lautet $y(\tau) = y_h(\tau) + y_p(\tau) = a_1 \cos(\sqrt{2}\tau) + a_2 \sin(\sqrt{2}\tau) + 1$.

Die Anpassung der Lösung an die Anfangsbedingungen liefert für die Konstanten

$y(0+) = \frac{1}{2} = a_1 + 1 \rightarrow a_1 = -\frac{1}{2}$

$y^{(1)}(0+) = \sqrt{2} a_2 = 0 \rightarrow a_2 = 0$

Die vollständige Lösung lautet somit $y(\tau) = [1 - \frac{1}{2}\cos(\sqrt{2}\tau)]\,\varepsilon(\tau)$.

nicht vergessen

System-Differentialgleichung aus Übertragungsfunktion 2:

Von einem System ist die Übertragungsfunktion

$$G(s)=\frac{1-s}{2+s}$$

bekannt. Stellen Sie die zugehörige System-Differentialgleichung auf und bestimmen Sie deren Lösung für

$$\tau>0: \quad u(\tau)=2\cdot e^{-3\cdot\tau}\cdot\varepsilon(\tau) \quad ; \quad y(0+)=2.$$

LÖSUNG:

Aus der Übertragungsfunktion $G(s)=\frac{1-s}{2+s}$ läßt sich unmittelbar die System-DGL ablesen. $y^{(1)}+2y=-u^{(1)}+u$

Die Übertragungsfunktion besitzt den einfachen Pol $p_1=-2$, d.h. das System ist stabil.

Die homogene Lösung lautet $y_h(\tau)=c_1 e^{-2\tau}$.

Der Eingang $u(\tau)=2e^{-3\tau}$ läßt sich durch die lineare Operation $u(\tau)=2L(e^{s\tau})=2e^{s\tau}\big|_{s=-3}$ darstellen.

Die partikuläre Lösung lautet $y_p(\tau)=2L[G(s)e^{s\tau}]=2\frac{1-s}{2+s}e^{s\tau}\Big|_{s=-3}=-8e^{-3\tau}$

Die Gesamtlösung lautet $y(\tau)=y_h(\tau)+y_p(\tau)=c_1e^{-2\tau}-8e^{-3\tau}, \tau\geq 0$.

Anpassung der Lösung an die Anfangsbedingung $y(0+)=2$ liefert für die Konstante

$$y(0+)=2=c_1-8 \rightarrow c_1=10.$$

Die vollständige Lösung lautet somit

$$y(\tau)=[10e^{-2\tau}-8e^{-3\tau}]\varepsilon(\tau).$$

System-Differentialgleichung aus Übertragungsfunktion 3:

Von einem System ist die Übertragungsfunktion

$$G(s)=\frac{1}{3\cdot s+1}$$

bekannt. Stellen Sie die zugehörige System-Differentialgleichung auf und bestimmen Sie deren Lösung für

$$\tau>0:\quad u(\tau)=\tau\cdot\varepsilon(\tau)\;;\; y(0+)=0$$

LÖSUNG:

Aus der Übertragungsfunktion $G(s)=\frac{1}{3s+1}$ läßt sich unmittelbar die System-DGL ablesen. $3y^{(1)}+y=u$

Die Übertragungsfunktion besitzt den einfachen Pol $p_1=-\frac{1}{3}$, d.h. das System ist stabil.

Die homogene Lösung lautet $y_h(\tau)=c_1 e^{-\frac{\tau}{3}}$.

Der Eingang $u(\tau)=\tau$ läßt sich durch die lineare Operation $u(\tau)=L(e^{s\tau})=\left[\frac{d}{ds}(e^{s\tau})\right]\Big|_{s=\emptyset}$ darstellen.

Die partikuläre Lösung lautet $y_p(\tau)=L[G(s)e^{s\tau}]=\frac{d}{ds}[G(s)e^{s\tau}]\Big|_{s=\emptyset}$

$$y_p(\tau)=\left[e^{s\tau}\frac{d}{ds}G(s)+G(s)\tau e^{s\tau}\right]\Big|_{s=\emptyset}=\frac{d}{ds}G(s)\Big|_{s=\emptyset}+G(\emptyset)\tau$$

$$y_p(\tau)=\frac{-3}{(3s+1)^2}\Big|_{s=0}+\tau=\tau-3.$$

Die Gesamtlösung lautet $y(\tau)=y_h(\tau)+y_p(\tau)=c_1e^{-\frac{\tau}{3}}+\tau-3,\ \tau\geq\emptyset$.

Anpassung der Lösung an die Anfangsbedingung $y(\emptyset+)=\emptyset$ liefert für die Konstante

$$y(\emptyset+)=\emptyset=c_1-3\rightarrow c_1=3.$$

Die vollständige Lösung lautet somit

$$y(\tau)=[3(e^{-\frac{\tau}{3}}-1)+\tau]\,\varepsilon(\tau).$$

System-Differentialgleichung aus Übertragungsfunktion 4:

Ein lineares, zeitinvariantes System besitzt die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1-s}{2+s} \; .$$

(*i*) Wie lautet die zugehörige System-Differentialgleichung ?
(*ii*) Bestimmen Sie deren Lösung für $\tau > 0$ zur Eingangsfunktion

$$u(\tau) = 2 \cdot \tau$$

mit der Anfangsbedingung

$$y(0+) = 2 \; .$$

LÖSUNG:

(i) Aus der Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{1-s}{2+s}$ läßt sich unmittelbar die System-DGL ablesen: $y^{(1)} + 2y = -u^{(1)} + u$

(ii) Die Übertragungsfunktion besitzt den einfachen Pol $p_1 = -2$, d.h. das System ist stabil.

Die homogene Lösung lautet $y_h(\tau) = c_1 e^{-2\tau}$.

Der Eingang $u(\tau) = 2\tau$ läßt sich durch die lineare Operation $u(\tau) = 2L(e^{s\tau}) = 2\left[\frac{d}{ds} G(s)\right]\Big|_{s=0}$ darstellen.

Die partikuläre Lösung lautet $y_p(\tau) = 2L(G(s)e^{s\tau}) = 2\frac{d}{ds}\left[G(s)e^{s\tau}\right]\Big|_{s}$.

$$y_p(\tau) = 2\frac{d}{ds}G(s)\Big|_{s=0} + 2G(0)\tau = 2\frac{-1(2+s)-(1-s)1}{(2+s)^2}\Big|_{s=0} + \frac{\tau}{2}2$$

$$y_p(\tau) = -\frac{3}{2} + \tau .$$

Die Gesamtlösung lautet $y(\tau) = y_h(\tau) + y_p(\tau) = c_1 e^{-2\tau} - \frac{3}{2} + \tau, \; \tau \geq 0$.

Anpassung der Lösung an die Anfangsbedingungen $y(0+) = 2$ liefert für die Konstante:

$$y(0+) = 2 = c_1 - \frac{3}{2} \rightarrow c_1 = \frac{7}{2} = 3{,}5.$$

Die vollständige Lösung lautet somit

$$y(\tau) = \left[\frac{1}{2}(7e^{-2\tau} - 3) + \tau\right] \varepsilon(\tau) .$$

System-Differentialgleichung aus Übertragungsfunktion 5:

Ein lineares, zeitinvariantes System besitzt die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{2}{s\cdot(s+1)} .$$

(*i*) Wie lautet die zugehörige System-Differentialgleichung ?

(*ii*) Bestimmen Sie deren Lösung für $\tau > 0$ zur Eingangsfunktion

$$u(\tau) = e^{-\tau}$$

und den Anfangsbedingungen

$$y(0+) = 1 \;,\; y^{(1)}(0+) = 0 \;.$$

LÖSUNG:

(i) Aus der Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{2}{s(s+1)}$ läßt sich unmittelbar die Systemdifferentialgleichung ablesen.

$$y^{(2)} + y^{(1)} = 2u$$

(ii) Die Übertragungsfunktion besitzt die beiden einfachen Pole $p_1 = 0$; $p_2 = -1$, d.h. das System ist grenzstabil.

Die homogene Lösung lautet $y_h(\tau) = c_1 + c_2 e^{-\tau}$.

Der Eingang kann durch die lineare Operation $u(\tau) = L(e^{s\tau}) = e^{s\tau}\Big|_{s=-1}$ dargestellt werden. Da der Faktor im Exponenten der Eingangsfunktion mit einem Pol der Übertragungsfunktion zusammenfällt, lautet die partikuläre Lösung $y_p(\tau) = \frac{d}{ds}\left[(s+1)\,G(s)\,e^{s\tau}\right]\Big|_{s=-1}$

$$y_p(\tau) = \frac{d}{ds}\left[\frac{2}{s}e^{s\tau}\right]\Big|_{s=-1} = -\frac{2}{s^2}e^{s\tau}\Big|_{s=-1} + \frac{2}{s}\tau e^{s\tau}\Big|_{s=-1} = -2e^{-\tau}[1+\tau] .$$

Die Gesamtlösung lautet $y(\tau) = y_h(\tau) + y_p(\tau) = c_1 + c_2 e^{-\tau} - 2e^{-\tau}[1+\tau]$.

Anpassung der Lösung an die Anfangsbedingungen $y(0+) = 1$, $y^{(1)}(0+) = 0$ liefert die Konstanten: $y(0+) = 1 = c_1 + c_2 - 2$; $y^{(1)}(0+) = -c_2 + 2 - 2 = 0$

Die Konstanten errechnen sich zu $c_1 = 3$ und $c_2 = 0$.

Die vollständige Lösung lautet somit $y(\tau) = [3 - 2e^{-\tau}(1+\tau)]\,\varepsilon(\tau)$.

System-Differentialgleichung aus Übertragungsfunktion 6:

Ein lineares, zeitinvariantes System besitzt die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1-2\cdot s}{s\cdot(3\cdot s+2)} .$$

(*i*) Wie lautet die zugehörige System-Differentialgleichung ?
(*ii*) Bestimmen Sie deren Lösung für $\tau > 0$ zur Eingangsfunktion $u(\tau) = \varepsilon(\tau)$ und den Anfangsbedingungen

$$y(0+) = 0 ,\quad y^{(1)}(0+) = 2 .$$

LÖSUNG:

(i) Aus der Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{-2s+1}{3s^2+2s}$ läßt sich unmittelbar die Systemdifferentialgleichung ablesen.

$$3y^{(2)} + 2y^{(1)} = -2u^{(1)} + u$$

(ii) Die Übertragungsfunktion besitzt die beiden einfachen Pole $p_1 = \emptyset$; $p_2 = -\frac{2}{3}$, d.h. das System ist grenzstabil.

Die homogene Lösung lautet $y_h(\tau) = c_1 + c_2 e^{-\frac{2}{3}\tau}$.

Der Eingang kann durch die lineare Operation $u(\tau) = L(e^{s\tau}) = e^{s\tau}\big|_{s=0}$ dargestellt werden. Da der Faktor im Exponenten der Eingangsfunkti mit einem Pol der Übertragungsfunktion zusammenfällt, lautet die partikuläre Lösung $y_p(\tau) = \frac{d}{ds}[sG(s)\,e^{s\tau}]\big|_{s=a} = \frac{d}{ds}[\frac{1-2s}{3s+2}e^{s\tau}]\big|_{s=0}$

$$y_p(\tau) = \frac{-2(3s+2)-(1-2s)3}{(3s+2)^2}\bigg|_{s=0} + \frac{1-2s}{3s+2}\tau e^{s\tau}\bigg|_{s=0} = -\frac{7}{4} + \frac{\tau}{2} .$$

Die Gesamtlösung lautet $y(\tau) = y_h(\tau) + y_p(\tau) = c_1 + c_2 e^{-\frac{2}{3}\tau} - \frac{7}{4} + \frac{\tau}{2}$, $\tau \geq \emptyset$.

Anpassung der Lösung an die Anfangsbedingungen $y(\emptyset+) = \emptyset$, $y^{(1)}(\emptyset+)$: liefert die Konstanten: $y(\emptyset+) = \emptyset = c_1 + c_2 - \frac{7}{4}$; $y^{(1)}(\emptyset+) = 2 = -\frac{2}{3}c_2 + \frac{1}{2}$

Die Konstanten errechnen sich zu $c_1 = 4$ und $c_2 = -\frac{9}{4} = -2{,}25$.

Die vollständige Lösung lautet somit $y(\tau) = [\frac{9}{4}(1-e^{-\frac{2}{3}\tau}) + \frac{\tau}{2}]\varepsilon(\tau)$.

System-Differentialgleichung aus Übertragungsfunktion 7:

Von einem System ist die Übertragungsfunktion

$$G(s)=\frac{s-4}{s^2+s-2}$$

bekannt. Stellen Sie die zugehörige System-Differentialgleichung auf und bestimmen Sie deren Lösung für

$$\tau>0:\quad u(\tau)=\varepsilon(\tau)\ ;\ y(0+)=3\ ;\ y^{(1)}(0+)=0$$

LÖSUNG:

Aus der Übertragungsfunktion $G(s)=\frac{s-4}{s^2+s-2}=\frac{s-4}{(s-1)(s+2)}$ läßt sich unmittelbar die System-DGL ablesen.

$y^{(2)}+y^{(1)}-2y=u^{(1)}-4u$

Die Übertragungsfunktion besitzt die beiden einfachen Pole $p_1=1$ und $p_2=-2$. Wegen $p_1>0$ ist das System INSTABIL!

Die homogene Lösung lautet $y_h(\tau)=c_1e^{\tau}+c_2e^{-2\tau}$.

Der Eingang $u(\tau)=\varepsilon(\tau)$ läßt sich durch die lineare Operation $u(\tau)=L(e^{s\tau})=e^{s\tau}\big|_{s=0}$ darstellen.

Die partikuläre Lösung lautet $y_p(\tau)=G(0)=2$.

Die Gesamtlösung lautet $y(\tau)=y_h(\tau)+y_p(\tau)=c_1e^{\tau}+c_2e^{-2\tau}+2,\ \tau\geq 0$.

Die Anpassung der Lösung an die Anfangsbedingungen $y(0+)=3$ und $y^{(1)}(0+)=0$ liefert die vorerst noch unbekannten Konstanten c_1 und c_2.

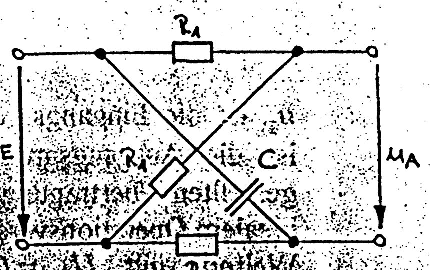
$$\left.\begin{array}{l} y(0+)=3=c_1+c_2+2 \\ y^{(1)}(0+)=0=c_1-2c_2 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} c_1=\frac{2}{3} \\ c_2=\frac{1}{3} \end{array}$$

Die allgemeine Lösung lautet somit

$$y(\tau)=\left[\frac{1}{3}\left(2e^{\tau}+e^{-2\tau}\right)+2\right]\varepsilon(\tau).$$

Übertragungsglied:

$$G(s) = \frac{U_A(s)}{U_E(s)}$$

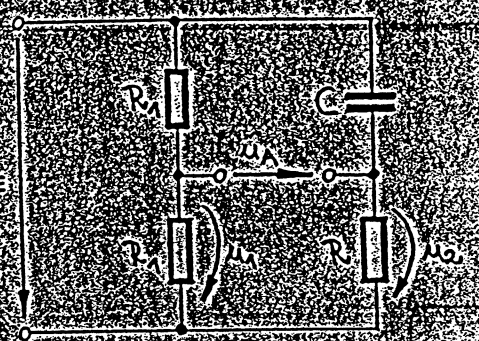


Geben Sie die zum dargestellten Übertragungsglied gehörende Übertragungsfunktion $G(s)$ an und skizzieren sie diese anschließend in einem Bode-Diagramm.

$\nu \cdot \omega_B = \omega$ $\qquad \nu = \frac{\omega}{\omega_B}$

$\omega_B \cdot T_B = 1 \qquad \nu = \omega \cdot T_B$

LÖSUNG:



Direkte Auswertung im Laplace-Bereich:

$$U_1(s) = \frac{U_E(s)}{2}$$

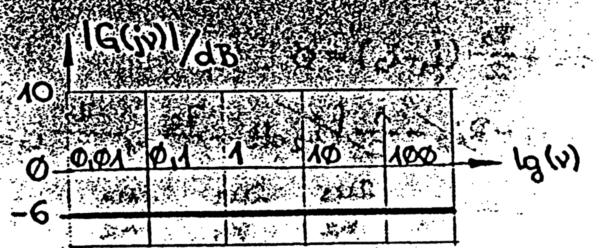
$$U_2(s) = U_E(s)\,\frac{R}{R+\frac{1}{sC}} = U_E(s)\,\frac{sCR}{1+sCR}$$

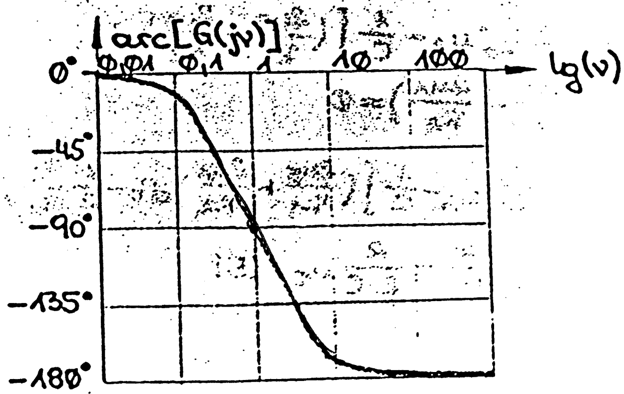
$$U_A(s) = U_1(s) - U_2(s) = \frac{U_E(s)}{2} - U_E(s)\,\frac{sCR}{1+sCR} = U_E(s)\left[\frac{1}{2} - \frac{sCR}{1+sCR}\right]$$

$$\underline{\underline{G(s) = \frac{U_A(s)}{U_E(s)} = \frac{1}{2}\,\frac{1-sCR}{1+sCR}}}$$

Wird die Bezugszeit $T_B = RC$ gewählt so gilt: $sCR \mapsto s$!

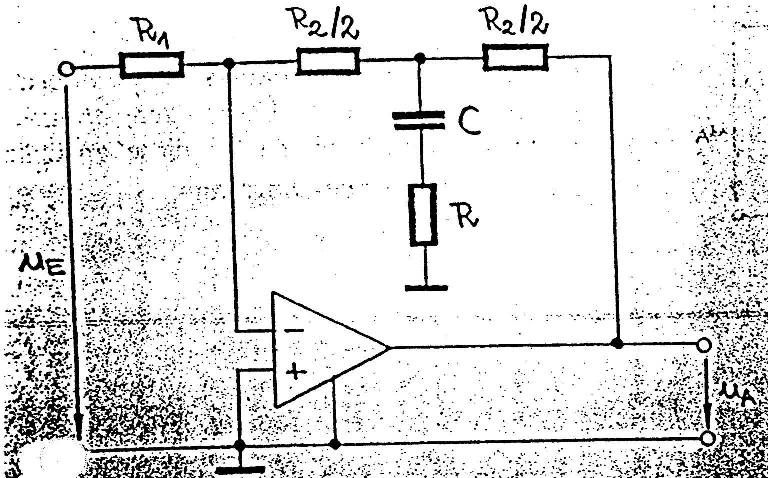
$$G(s) = \frac{1}{2}\,\frac{1-s}{1+s} \longrightarrow G(j\nu) = \frac{1}{2}\,\frac{1-j\nu}{1+j\nu}\ ;\ \underline{|G(j\nu)| = \frac{1}{2}}\ ;\ \underline{\mathrm{arc}[G(j\nu)]} = \mathrm{arc}[1-j\nu] - \mathrm{arc}[1+j\nu] \underline{= 2\arctan(}$$





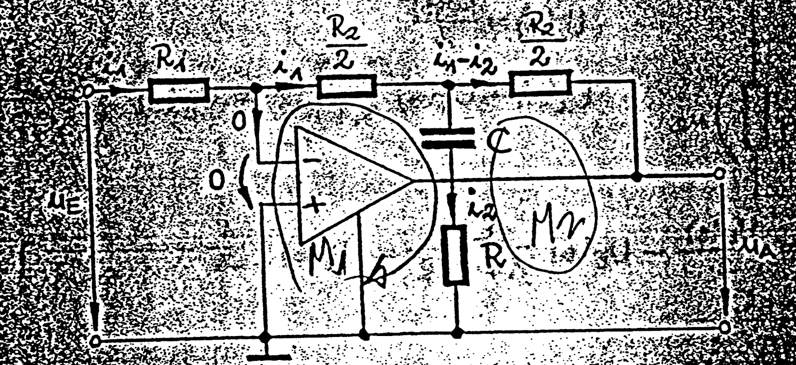
Übertragungsglied 2:

Maschen addieren !→



u_E ist die Eingangsgröße und u_A ist die Ausgangsgröße des dargestellten Übertragungsgliedes mit idealem Operationsverstärker. Weiters gilt $U_{EB}=U_{AB}=U_B$, $T_B=R\cdot C$. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ und die Sprungantwort $h(t)$.

LÖSUNG:



$$i_1=\frac{u_E}{R_1} \qquad (1)$$

Masche (1): $$\frac{R_2}{2}i_1+\frac{1}{C}\int i_2\,dt+Ri_2=0 \qquad (2)$$

Masche (2): $$u_A-Ri_2-\frac{1}{C}\int i_2\,dt+\frac{R_2}{2}(i_1-i_2)=0 \qquad (3)$$

(2)+(3): $$\frac{R_2}{2}i_1+\cancel{\frac{1}{C}\int i_2\,dt}+\cancel{Ri_2}+u_A-\cancel{Ri_2}-\cancel{\frac{1}{C}\int i_2\,dt}+\frac{R_2}{2}i_1-\frac{R_2}{2}i_2=0$$

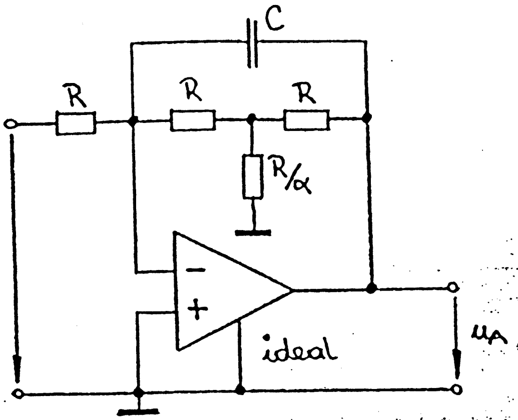
Δi_2 $$R_2 i_1-\frac{R_2}{2}i_2+u_A=0\rightarrow i_2=2i_1+\frac{2u_A}{R_2}=\frac{2u_E}{R_1}+\frac{2u_A}{R_2} \qquad (4)$$

(1) und (4) in (3): $$u_A-2\frac{R}{R_1}u_E-2\frac{R}{R_2}u_A-\frac{1}{C}\int\left(\frac{2u_E}{R_1}+\frac{2u_A}{R_2}\right)dt$$
$$+\frac{R_2}{2}\left(\frac{u_E}{R_1}-\frac{2u_E}{R_1}-\frac{2u_A}{R_2}\right)=0$$

$$\cancel{u_A}-2\frac{R}{R_1}u_E-2\frac{R}{R_2}u_A-\frac{1}{C}\int\left(\frac{2u_E}{R_1}+\frac{2u_A}{R_2}\right)dt-\frac{1}{2}\frac{R_2}{R_1}u_E-\cancel{u_A}=0$$

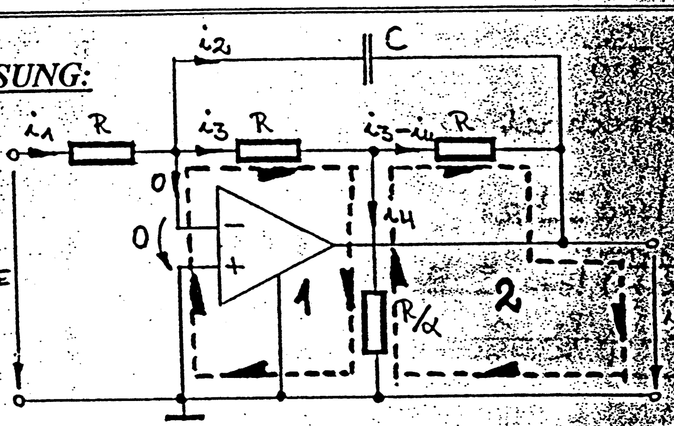
$$2\frac{R}{R_2}\frac{du_A}{dt}+\frac{2}{R_2C}u_A=-\left(2\frac{R}{R_1}+\frac{1}{2}\frac{R_2}{R_1}\right)\frac{du_E}{dt}-\frac{2}{R_1C}u_E \qquad (5)$$

Übertragungsglied 3:



Berechnen Sie die Pole und Nullstellen der Übertragungfunktion $G(s)$ des dargestellten Übertragungsgliedes.

LÖSUNG:



Die Kirchhoffsche Knoten- und Maschenregel liefert:

$i_1 = \frac{u_E}{R}$ (1) $\qquad i_2 = -C\frac{du_A}{dt}$ (2) $\qquad i_1 = i_2 + i_3$ (3)

Masche 1: $Ri_3 + \frac{R}{\alpha} i_4 = 0$ (4); Masche 2: $u_A - \frac{R}{\alpha} i_4 + R(i_3 - i_4) = 0$ (5)

aus (4) folgt $i_4 = -\alpha i_3$ (4)', aus (3) folgt $i_3 = i_1 - i_2$ (3)', in (4)': $i_4 = -\alpha(i_1 -$

(3)' und (4)'' in (5) ergibt $u_A = \frac{-R}{\alpha}\alpha(i_1 - i_2) - R(i_3 + \alpha(i_1 - i_2)) = -R(i_1 - i_2) - R(1+\alpha)(i$

$u_A = (-2R - \alpha R)(i_1 - i_2)$ (5)'. (1) und (2) in (5)': $u_A = -(2R + \alpha R)\left(\frac{u_E}{R} + C\frac{du_A}{dt}\right)$

$$\frac{du_A}{dt} + \frac{1}{RC(2+\alpha)} u_A = -\frac{u_E}{RC}$$

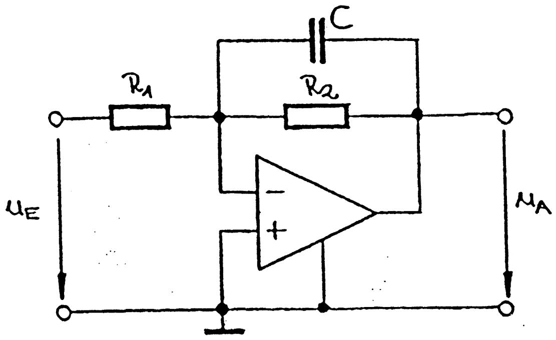
Bezogene Größen: $u_A = U_B y$, $u_E = U_B u$, $t = T_B \tau$

$$y^{(1)} + \frac{T_B}{RC(2+\alpha)} y = -\frac{T_B}{RC} u \quad \text{mit } T_B = RC \text{ folgt } y^{(1)} + \frac{1}{2+\alpha} y = -u.$$

Übertragungsfunktion: $G(s) = -\frac{1}{s + \frac{1}{2+\alpha}} = -\frac{2+\alpha}{(2+\alpha)s + 1}$.

Das System besitzt keine Nullstelle und einen einfachen Pol $p = -\frac{1}{2+\alpha}$, dessen Lage von α abhängig ist.

Übertragungsglied 4:



Das Übertragungsglied mit u_E als Eingangsgröße und als u_A Ausgangsgröße enthält einen idealen Operationsverstärker.
Bestimmen Sie für allgemeine Bezugswerte die Koeffizienten der System-Differentialgleichung in der Standardform.

LÖSUNG:

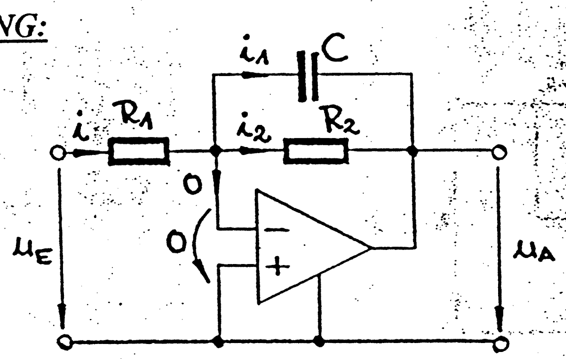


Abb. 1: Realisierung eines PI-Reglers

$i_1 = -C\frac{du_A}{dt}$, $i_2 = -\frac{u_A}{R_2}$, $i = i_1 + i_2 = -C\frac{du_A}{dt} - \frac{u_A}{R_2}$

$u_E = R_1 i = -R_1 C\frac{du_A}{dt} - \frac{R_1}{R_2}u_A \rightarrow \frac{du_A}{dt} + \frac{1}{R_2C}u_A = -\frac{1}{R_1C}u_E$

Einführung bezogener Größen $u_A = U_B y$, $u_E = U_B u$, $t = T_B \tau$

$$y^{(1)} + \frac{T_B}{R_2C}y = -\frac{T_B}{R_1C}u$$

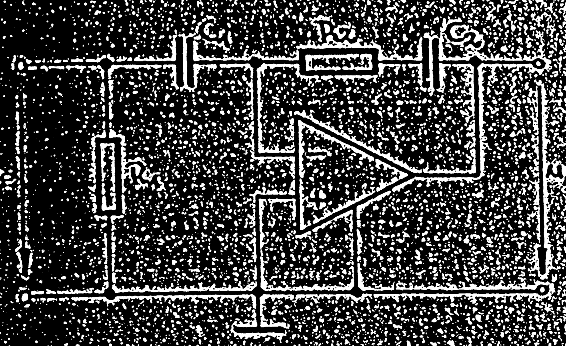
dies entspricht einer Differentialgleichung der Form

$$y^{(1)} + a_0 y = b_0 u$$

mit den Koeffizienten $a_0 = \frac{T_B}{R_2C}$ und $b_0 = -\frac{T_B}{R_1C}$

Mit zusätzlichen Normierung $T_B = R_2C$ vereinfacht sich die DGL zu $y^{(1)} + y = -\frac{R_1}{R_2}u$. Eine weitere Normierung mit $\frac{U_{EB}}{U_{AB}} = -\frac{R_1}{R_2}$ würde eine weitere Vereinfachung mit sich bringen und die DGL lautet dann $y^{(1)} + y = u$.

Übertragungsglied 5:



Das Übertragungsglied mit u_E als Eingangsgröße und als u_A Ausgangsgröße enthält einen idealen Operationsverstärker.
Bestimmen Sie für allgemeine Bezugswerte die Koeffizienten der System-Differentialgleichung in der Standardform

LÖSUNG:

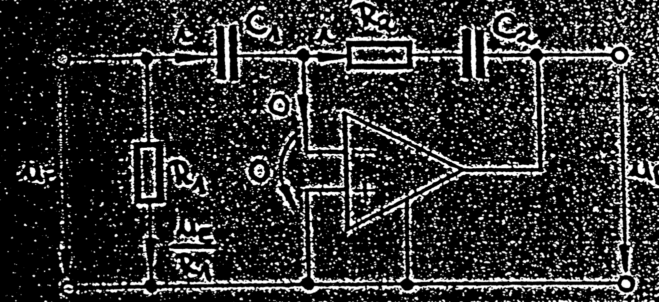


Abb 1

Mit den Bezugssinnen nach Abb 1 folgt

$i = C_1 \frac{du_E}{dt}$ und

$u_A = -R_2 i - \frac{1}{C_2}\int i\,dt = -R_2C_1\frac{du_E}{dt} - \frac{C_1}{C_2}u_E$

Einführung normierter Größen $u_A = U_B y$, $u_E = U_B u$, $t = T_B \tau$

folgt die System-Differentialgleichung in bezogener Form

$$y = -\frac{R_2C_1}{T_B}u^{(1)} - \frac{C_1}{C_2}u$$

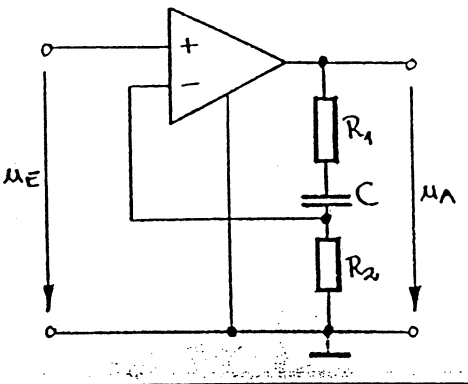
Dies entspricht einer Standart-DGL vom Typus

$$y = b_1 u^{(1)} + b_0 u$$

mit

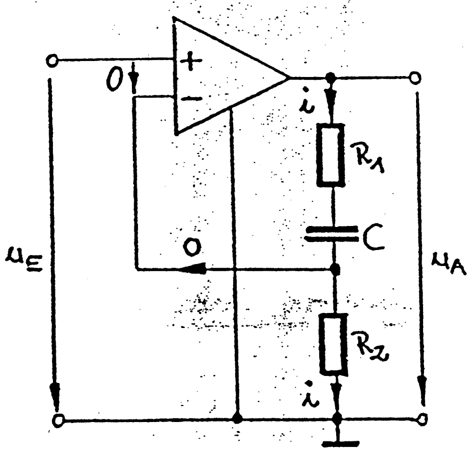
$b_0 = -\frac{C_1}{C_2}$; $b_1 = -\frac{R_2C_1}{T_B}$ bzw. mit $T_B = R_2C_1 \rightarrow b_1 = -1$.

Übertragungsglied 7:



Das Übertragungsglied mit u_E als Eingangsgröße und als u_A Ausgangsgröße enthält einen idealen Operationsverstärker.
Bestimmen Sie für allgemeine Bezugswerte die Koeffizienten der System-Differentialgleichung in der Standardform.

LÖSUNG:



$$i = \frac{u_E}{R_2} \qquad (1)$$

$$u_A = (R_1+R_2)\,i + \frac{1}{C}\int i\,dt \qquad (2)$$

(1) in (2) ergibt

$$u_A = \frac{R_1+R_2}{R_2}u_E + \frac{1}{R_2C}\int u_E\,dt \quad (3)$$

Differentiation von (3) ergibt

$$\frac{du_A}{dt} = \frac{R_1+R_2}{R_2}\frac{du_E}{dt} + \frac{u_E}{R_2C}.$$

Einführung normierter Größen $u_A = U_B y$, $u_E = U_B u$, $t = T_B\tau$:

$$\frac{1}{T_B}y^{(1)} = \frac{R_1+R_2}{R_2}\frac{1}{T_B}u^{(1)} + \frac{u}{R_2C} \quad \Big| \cdot T_B$$

$$y^{(1)} = \frac{R_1+R_2}{R_2}u^{(1)} + \frac{T_B}{R_2C}u$$

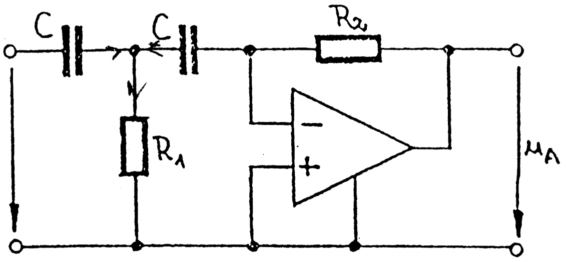
Dies entspricht einer Standart-DGL der Form

$$a_1y^{(1)} = b_1u^{(1)} + b_0u$$

mit den Koeffizienten

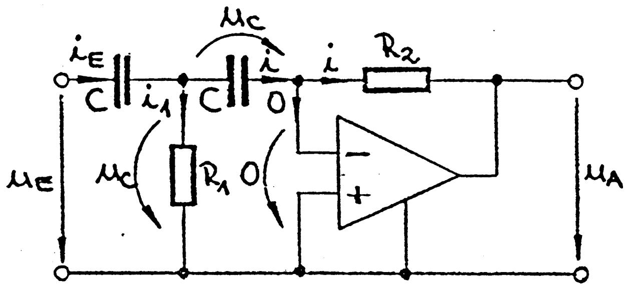
$$a_1 = 1,\quad b_1 = 1+\frac{R_1}{R_2} \text{ und } b_0 = \frac{T_B}{R_2C}.$$

Übertragungsglied 9:



Das Übertragungsglied mit u_E als Eingangsgröße und als u_A Ausgangsgröße enthält einen idealen Operationsverstärker.
Bestimmen Sie für allgemeine Bezugswerte die Koeffizienten der System-Differentialgleichung in der Standardform.

LÖSUNG:



Die Schaltung wird vom Ausgang zum Eingang aufgelöst.

$i = -\frac{u_A}{R_2}$ (1) $\quad u_C = \frac{1}{C}\int i\,dt$ (2) $\quad i_1 = \frac{u_C}{R_1}$ (3) $\quad i_E = i_1 + i$ (4)

$u_E = \frac{1}{C}\int i_E\,dt + u_C$ bzw. $\frac{du_E}{dt} = \frac{i_E}{C} + \frac{du_C}{dt}$ (5)

(1) in (2): $u_C = -\frac{1}{R_2C}\int u_A\,dt$ (2)'

(2)' in (3): $i_1 = -\frac{1}{R_1R_2C}\int u_A\,dt$ (3)'

(2)' in (5): $\frac{du_E}{dt} = \frac{i_E}{C} - \frac{1}{R_2C}u_A$ (5)'

(1) und (3)' in (4): $i_E = -\frac{1}{R_1R_2C}\int u_A\,dt - \frac{u_A}{R_2}$ (4)'

(4)' in (5)': $\frac{du_E}{dt} = -\frac{1}{R_1R_2C^2}\int u_A\,dt - \frac{u_A}{R_2C} - \frac{u_A}{R_2C}$ (5)''

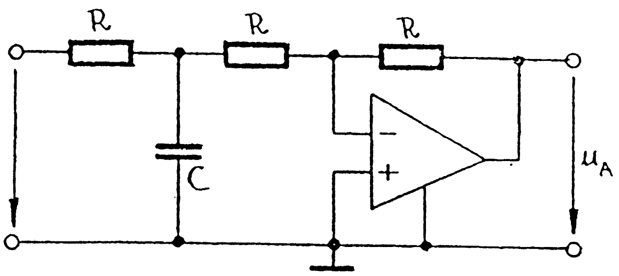
Differentiation von (5)'' ergibt

$$\frac{d^2u_E}{dt^2} = -\frac{1}{R_1R_2C^2}u_A - \frac{2}{R_2C}\frac{du_A}{dt} \rightarrow \underline{\frac{du_A}{dt} + \frac{1}{2R_1C}u_A = -\frac{R_2C}{2}\frac{d^2u_E}{dt^2}}$$

Bezogene Größen: $u_A = U_B y$, $u_E = U_B u$, $t = T_B\tau$

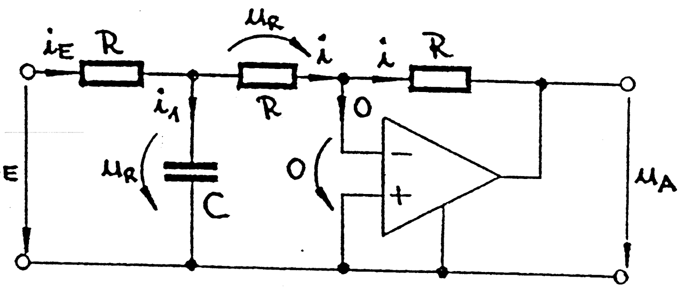
$$\underline{\underline{y^{(1)} + \frac{T_B}{2R_1C}y = -\frac{R_2C}{2T_B}u^{(2)}.}}$$

Übertragungsglied 10:



Das Übertragungsglied mit u_E als Eingangsgröße und als u_A Ausgangsgröße enthält einen idealen Operationsverstärker.
Bestimmen Sie für allgemeine Bezugswerte die Koeffizienten der System-Differentialgleichung in der Standardform.

LÖSUNG:



Die Schaltung wird am besten vom Ausgang zum Eingang aufgelöst.

$i = -\frac{u_A}{R}$ (1) $\qquad u_R = Ri \rightarrow i = \frac{u_R}{R}$ (2) $\qquad i_1 = C\frac{du_R}{dt}$ (3)

$i_E = i + i_1$ (4) $\qquad u_E = Ri_E + u_R$ (5)

(1) in (4): $i_E = -\frac{u_A}{R} + i_1$ (4)'

(1) in (2): $u_R = -u_A$ (2)'

(2)' in (3): $i_1 = -C\frac{du_A}{dt}$ (3)'

(3)' in (4)': $i_E = -\frac{u_A}{R} - C\frac{du_A}{dt}$ (4)'

(2)' und (4)' in (5): $u_E = -u_A - RC\frac{du_A}{dt} - u_A$ (5)'

$RC\frac{du_A}{dt} + 2u_A = -u_E \quad | : RC$

$$\frac{du_A}{dt} + \frac{2}{RC}u_A = -\frac{1}{RC}u_E$$

Normierung: $u_A = U_B y$, $u_E = U_B u$, $t = T_B \tau$

$$y^{(1)} + \frac{2}{RC}T_B y = -\frac{1}{RC}T_B u$$

bzw. mit $T_B = RC$ folgt $y^{(1)} + 2y = -u$.

(1)' in (2)' ergibt

$$-\frac{R_1}{R}\frac{du_A}{dt}-\frac{R_1}{R}\frac{du_E}{dt}=-RC\frac{d^2u_A}{dt^2}-3\frac{du_A}{dt}-\frac{u_A}{RC}$$

$$RC\frac{d^2u_A}{dt^2}+\left(3-\frac{R_1}{R}\right)\frac{du_A}{dt}+\frac{u_A}{RC}=\frac{R_1}{R}\frac{du_E}{dt}$$

$$\underline{\frac{d^2u_A}{dt^2}+\left(3-\frac{R_1}{R}\right)\frac{1}{RC}\frac{du_A}{dt}+\frac{1}{(RC)^2}u_A=\frac{R_1}{R^2C}\frac{du_E}{dt}}$$

<u>Normierung:</u> $\underline{u_A=U_B y}$, $\underline{u_E=U_B u}$, $\underline{t=T_B\tau}$

$$y^{(2)}+\left(3-\frac{R_1}{R}\right)\frac{T_B}{RC}y^{(1)}+\frac{T_B^2}{(RC)^2}y=\frac{R_1}{R}\frac{T_B}{RC}u^{(1)}$$

<u>Übertragungsfunktion</u> lautet somit ($\underline{T_B=RC}$)

$$\underline{\underline{G(s)=\frac{\frac{R_1}{R}s}{s^2+\left(3-\frac{R_1}{R}\right)s+1}}}\ .$$

<u>System-DGL</u> in bezogener Form:

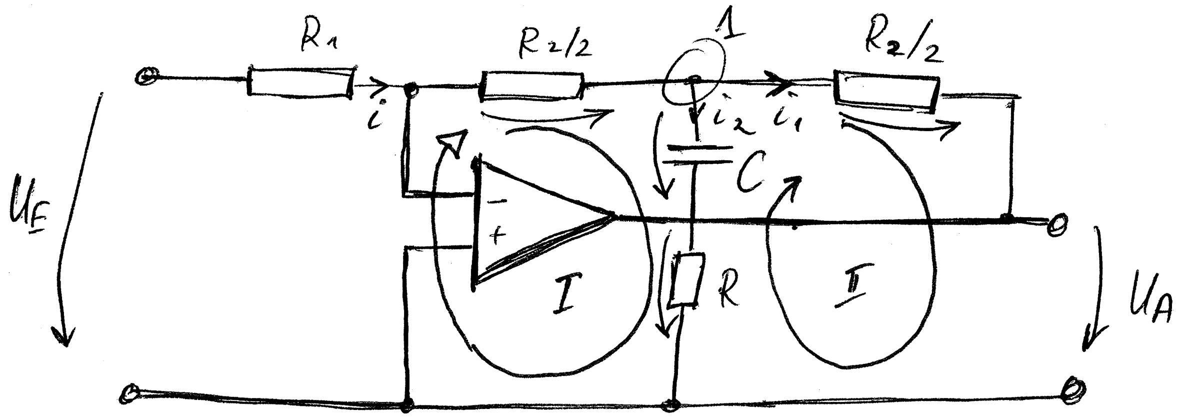
$$\underline{\underline{y^{(2)}+\left(3-\frac{R_1}{R}\right)y^{(1)}+y=\frac{R_1}{R}u^{(1)}}}$$

<u>(ii)</u> Koeffizientenvergleich des char. Polynoms mit $s^2+2\vartheta\nu_0 s+\nu_0^2$ liefert $\nu_0^2=1$ und $2\vartheta=3-\frac{R_1}{R}$.

Damit das System ungedämpft schwingt muß <u>Grenzstabilität</u> vorliegen. Daraus ergibt sich die Schwingbedingung zu

$$\underline{\vartheta\overset{!}{=}0}=3-\frac{R_1}{R}\rightarrow\underline{\underline{R=\frac{R_1}{3}}}\ .$$

Übertragungsglied 2:



1. Knote 1 $\quad i = i_2 + i_1$
2. Masche I : $\frac{U_E}{R_1}\cdot\frac{R_2}{2} + i_2 R + U_C = 0$
3. Masche II : $U_A = i_2 R + U_C - i_1 R_2/2$

Aus 2 und 3 $\Rightarrow$ $U_A = -\frac{R_2}{2R_1}U_E - i_1\frac{R_2}{2}$ aus 1

$$\Rightarrow U_A = -\frac{R_2}{2R_1}U_E - \left(\underbrace{\frac{U_E}{R_1}}_{i} - i_2\right)\frac{R_2}{2}$$

$$U_A = -U_E\frac{R_2}{R_1} + i_2\frac{R_2}{2} \Rightarrow i_2 = \dots$$

Aus 2 $\Rightarrow$ $\cancel{\frac{U_E}{R_1}\cdot\frac{R_2}{2}}\ \frac{dU_E}{dt}\cdot\frac{R_2}{2R_1} + \frac{di_2}{dt}\cdot R + \frac{i_2}{C} = 0$ (*)

$$i_2 = \frac{2U_A}{R_2} + U_E\frac{2\cancel{R_2}}{\cancel{R_2}R_1} = \frac{2}{R_2}U_A + U_E\frac{2}{R_1}$$

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{2}{R_2}\frac{dU_A}{dt} + \frac{2}{R_1}\frac{dU_E}{dt}$$

die zwei

setzen wir in (*) ein

II (2)

$$\frac{R_2}{2R_1}\frac{dU_E}{dt} + \frac{2R}{R_2}\frac{dU_A}{dt} + \frac{2R}{R_1}\frac{dU_E}{dt} + \frac{2}{R_2C}\cdot U_A + \frac{2}{R_1C}\cdot U_E = 0$$

$$\frac{2R}{R_2}\frac{dU_A}{dt} + \frac{2}{R_2C}\cdot U_A = -\left(\frac{R_2}{2R_1}\frac{dU_E}{dt} + \frac{2}{R_1C}U_E\right)$$

$$\frac{2R}{R_2}\cdot\frac{dU_A}{dt} + \frac{2}{R_2C}\cdot U_A = -\left(\frac{R_2}{2R_1}+2\frac{R}{R_1}\right)\cdot\frac{dU_E}{dt} - \frac{2}{R_1C}\cdot U_E$$

$$\frac{2R}{R_2T_B}\, y' + \frac{2}{R_2C}\cdot y = -\left(\frac{R_2}{2R_1}+2\frac{R}{R_1}\right)\cdot\frac{1}{T_B}\cdot u' - \frac{2}{R_1C}\cdot u$$

$$y' + \frac{T_B}{RC}\cdot y = -\left(\frac{R_2^2}{4R_1R}+\cancel{2}\frac{R_2}{R_1}\right)\cdot u' - \frac{T_B\cdot \cancel{R_1}}{RC\cdot R_1}\cdot u$$

$T_B = RC$

$$y' + y = -\underbrace{\left(\frac{R_2^2}{4R_1R}+\frac{R_2}{R_1}\right)}_{=b_1}\cdot u' - \underbrace{\frac{1}{R_1}}_{=b_0}\cdot u$$

$$G(s) = \frac{-b_1s-b_0}{s+1} = -\frac{b_1s+b_0}{s+1} \qquad y_h(\tau) = c_1e^{-\tau}$$

$$H(s) = \frac{G(s)}{s} \quad \text{oder} \quad y_p(\tau) = G(0) = -b_0$$

$$h(\tau) = \{c_1e^{-\tau} - b_0\}\cdot\varepsilon(\tau)$$

$$\{y^{(1)}\} + [\![y]\!]\cdot\varepsilon^{(1)}(\tau) + \{y\} = \ldots$$

$$[\![y]\!] = -b_1\cdot[\![u]\!]$$

$$y(0+) = -b_1$$

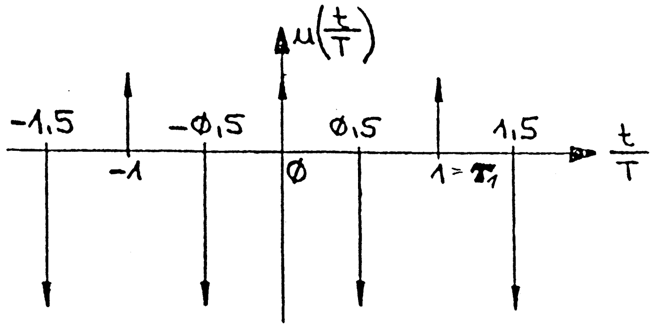
$$h(0+) = c_1 - b_0 = -b_1$$

$$c_1 = -(b_1-b_0)$$

$$h(\tau) = -[(b_1-b_0)\cdot e^{-\tau} - b_0\}\varepsilon(\tau)$$

$$h(\tau) = [b_0(e^{-\tau}-1) - b_1\}\cdot\varepsilon(\tau)$$

Alternierende Diracstoßfolge:



Berechnen Sie die Fourier-Reihe der angegebenen alternierenden Diracstoßfolge, wobei die positiven Diracstöße das Gewicht eins und die negativen das Gewicht zwei besitzen.

LÖSUNG:

Bei $u(\tau) = u\left(\frac{t}{T}\right)$ handelt es sich um eine 1-periodische alternierende Diracstoßfolge.

Die Fourier-Koeffizienten werden über

$$c_k = \int_0^1 u(\tau)\, e^{-j2\pi k\tau}\, d\tau$$

berechnet.

Einsetzen von $u(\tau)$ in Gl. (1) und Integration über eine Periode liefert

$$c_k = \int_{0-}^{1-} [\delta(\tau) - 2\delta(\tau - 0{,}5)]\, e^{-j2\pi k\tau}\, d\tau \overset{*}{=} e^{-j2\pi k 0} - 2e^{-j2\pi k 0{,}5}$$

$$c_k = 1 - 2e^{-jk\pi} = 1 - 2\cdot(-1)^k = \begin{cases} -1 & \text{für } k = 0, \pm 2, \ldots \\ 3 & \text{für } k = \pm 1, \pm 3, \ldots \end{cases}$$

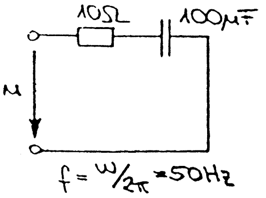
Die Fourier-Reihe lautet somit

$$u(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k\tau} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 - 2e^{-jk\pi})\, e^{j2\pi k\tau} .$$

$* \quad c_k = \int_{0-}^{1-} \delta(\tau)\, e^{-2j\pi k\tau}\, d\tau - 2\int_{0-}^{1-} \delta(\tau - 0{,}5)\, e^{-j2\pi k\tau}\, d\tau =$

$= e^{-j2\pi k 0} - 2e^{-j2\pi k\, 0{,}5} = 1 - 2\underbrace{e^{-j\pi k}}_{(-1)^k}$

Aufgenommene Wirkleistung einer RC-Reihenschaltung:



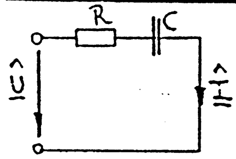
An der RC-Reihenschaltung liegt die Spannung

$$u(t) = 10V \cdot cos(\omega \cdot t) + 5V \cdot cos(3 \cdot \omega \cdot t + \pi / 3)$$

Berechnen Sie die aufgenommene Wirkleistung.

LÖSUNG: Superposition

$u(t) = \hat{U}_1 \cdot \cos(\omega t) + \hat{U}_3 \cdot \cos(3\omega t + \varphi_{u3})$ mit $\hat{U}_1 = 10V$, $\hat{U}_3 = 5V$, $\varphi_{u3} = \frac{\pi}{3}$



$$\hat{\underline{I}} = \frac{\hat{\underline{U}}}{R + 1/j\omega C} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}} \cdot e^{-j \cdot \arctan(\frac{1}{\omega C R})}$$

$$\underline{\hat{U}} = \hat{U} \cdot e^{j0}$$

$$\hat{\underline{I}}_1 = \frac{\hat{U}_1 e^{j0}}{\sqrt{R^2 + (\frac{1}{2\pi f C})^2}} \cdot e^{-j \cdot \arctan(\frac{1}{2\pi f C R})} = \frac{10V}{(10\Omega)^2 + (\frac{1}{2\pi 50Hz \cdot 100 \cdot 10^{-6}F})^2} \cdot e^{-j \arctan(\frac{1}{2\pi 50Hz \cdot 100 \cdot 10^{-6}F \cdot 10\Omega})}$$

$$\hat{\underline{I}}_1 = 0{,}2997A \cdot e^{-j1{,}2664}$$

$$\hat{\underline{I}}_3 = \frac{\hat{U}_3 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{R^2 + (\frac{1}{3 \cdot 2\pi f C})^2}} \cdot e^{-j \cdot \arctan(\frac{1}{3 \cdot 2\pi f C R})} = \frac{5V \cdot e^{j\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{(10\Omega)^2 + (\frac{1}{3 \cdot 2\pi 50Hz \cdot 100 \cdot 10^{-6}F})^2}} \cdot e^{-j \arctan(\frac{1}{3 \cdot 2\pi \cdot 50Hz \cdot 100 \cdot 10^{-6}F \cdot 10\Omega})}$$

$$\hat{\underline{I}}_3 = 0{,}3429A \cdot e^{-j \cdot 0{,}8150} \cdot e^{j\frac{\pi}{3}}$$

$$U_k = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$$

$$P = \underbrace{U_0 \cdot I_0}_{=0} + \sum_{k=1}^{\infty} |\underline{U}_k| \cdot |\underline{I}_k| \cdot \cos(\varphi_{uk} - \varphi_{ik}) = \frac{|\hat{\underline{U}}_1| \cdot |\hat{\underline{I}}_1|}{2} \cdot \cos(\varphi_{u1} - \varphi_{i1}) + \frac{|\hat{\underline{U}}_3| \cdot |\hat{\underline{I}}_3|}{2} \cdot \cos(\varphi_{u3} - \varphi_{i3})$$

Abs, Angle

$$-(\frac{\pi}{3} + 0{,}8150)$$

$$P = \frac{10V \cdot 0{,}2997A}{2} \cdot \cos(0 + 1{,}2664) + \frac{5V \cdot 0{,}3429A}{2} \cdot \cos(\frac{\pi}{3} + 0{,}8150 - \frac{\pi}{3}) = 1{,}037W$$

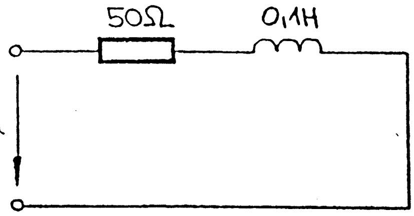
andere Möglichkeit:

$$I_{eff} = \sqrt{(\hat{I}_1/\sqrt{2})^2 + (\hat{I}_3/\sqrt{2})^2} = \sqrt{(\frac{0{,}2997A}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{0{,}3429A}{\sqrt{2}})^2} = 0{,}322\ A$$

$$P = I_{eff}^2 \cdot R = (0{,}322A)^2 \cdot 10\Omega = 1{,}037W$$

$$\frac{1}{j} = -j$$

Aufgenommene Wirkleistung einer RL-Schaltung:

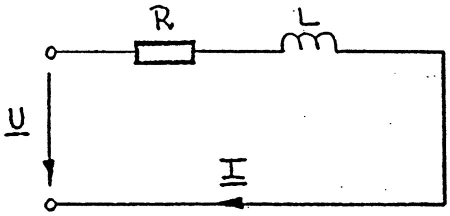


An der Schaltung liegt die Spannung

$$u(t) = 10V \cdot \cos(\omega \cdot t) + 35V \cdot \cos(3 \cdot \omega \cdot t + \pi / 3) \,,$$
$$\omega / 2\pi = 50\,Hz \;.$$

Berechnen Sie die aufgenommene Wirkleistung.

LÖSUNG:



$$\underline{u(t) = \hat{U}_1 \cos(\omega t) + \hat{U}_3 \cos(3\omega t + \varphi_{u3})} \quad \text{mit}$$

$$\underline{\hat{U}_1 = 10V},\; \underline{\hat{U}_3 = 35V},\; \underline{\varphi_{u3} = \frac{\pi}{3}},\; \frac{\omega}{2\pi} = 50Hz.$$

$$R = 50\Omega,\; L = 0{,}1H$$

$$\underline{\hat{I}} = \frac{\hat{U}}{R + j\omega L} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\, e^{-j\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)}$$

$$\underline{\hat{I}}_1 = \frac{\hat{U}_1 e^0}{\sqrt{R^2 + (2\pi f L)^2}}\, e^{-j\arctan\left(\frac{2\pi f L}{R}\right)} = \frac{10V}{\sqrt{(50\Omega)^2 + (2\pi 50Hz\, 0{,}1H)^2}}\, e^{-j\arctan\left(\frac{2\pi 50Hz\, 0{,}1H}{50\Omega}\right)}$$

$$\underline{\underline{\hat{I}}_1 = 0{,}1693\, e^{-j0{,}56}\, A}$$

$$\underline{\hat{I}}_3 = \frac{\hat{U}_3 e^{j\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{R^2 + (3 \cdot 2\pi f L)^2}}\, e^{-j\arctan\left(\frac{3 \cdot 2\pi f L}{R}\right)} = \frac{35V\, e^{j\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{(50\Omega)^2 + (3 \cdot 2\pi 50Hz\, 0{,}1H)^2}}\, e^{-j\arctan\left(\frac{3 \cdot 2\pi 5}{5}\right.}$$

$$\underline{\underline{\hat{I}}_3 = 0{,}328\, e^{j(-1{,}083 + \frac{\pi}{3})}\, A}$$

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |\underline{U}_k||\underline{I}_k| \cos(\varphi_{uk} - \varphi_{ik}) = \frac{|\hat{U}_1||\hat{\underline{I}}_1|}{2} \cos(\varphi_{u1} - \varphi_{i1}) + \frac{|\hat{U}_3||\hat{\underline{I}}_3|}{2} \cos(\varphi_{u3} - \varphi_{i3})$$

$$P = \frac{10V \cdot 0{,}1693A}{2} \cos(0 + 0{,}56) + \frac{35V \cdot 0{,}328A}{2} \cos\left(\frac{\pi}{3} + 1{,}083 - \frac{\pi}{3}\right) = 3{,}407\,W$$

<u>andere Berechnungsmöglichkeit:</u>

$$I_{EFF} = \sqrt{\left(\frac{\hat{I}_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\hat{I}_3}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0{,}1693A}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}328A}{\sqrt{2}}\right)^2} = \underline{0{,}261\,A}$$

$$\underline{\underline{P = I_{EFF}^2 R}} = (0{,}261A)^2\, 50\Omega = \underline{\underline{3{,}407W}}$$

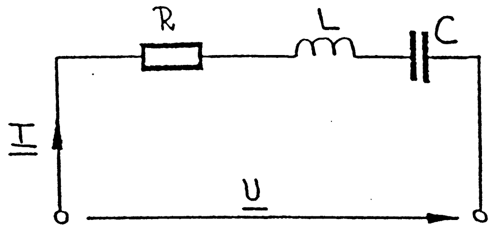
Aufgenommene Wirkleistung einer RLC-Schaltung:

An der Reihenschaltung von $R = 100\,\Omega$, $L = 40{,}6\,mH$ und $C = 10\,\mu F$ liegt die Spannung $u(t) = 100V\cos(\omega t) + 40V\cos(3\omega t - \pi/6)$, $\omega / 2\pi = 50\,Hz$.

(*i*) Berechnen Sie den Zeitverlauf des Stroms und seinen Effektivwert.
(*ii*) Geben Sie die aufgenommene Wirkleistung an.

LÖSUNG: $u(t) = \hat{U}_1 \cos(\omega t) + \hat{U}_3 \cos(3\omega t + \varphi_{u3})$ mit $\hat{U}_1 = 100V$,

$\hat{U}_3 = 40V$, $\varphi_{u3} = -\frac{\pi}{6}$, $\omega = 2\pi 50\,Hz$.



$R = 100\Omega$; $L = 40{,}6mH$; $C = 10\mu F$

(i) $u(t) = u_1(t) + u_3(t) = Re(\hat{\underline{U}}_1 e^{j\omega t}) + Re(\hat{\underline{U}}_3 e^{j3\omega t})$

$$\hat{\underline{I}}_1 = \frac{\hat{U}_1 e^0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} e^{-j\arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)} = \frac{100V\, e^{-j\arctan\left(\frac{2\pi 50Hz\, 0{,}0406H - \frac{1}{2\pi 50Hz\, 10^{-5}F}}{100\Omega}\right)}}{\sqrt{(100\Omega)^2 + (2\pi 50Hz\, 0{,}0406H - \frac{1}{2\pi 50Hz\, 10^{-5}F})^2}}$$

$$\hat{\underline{I}}_1 = 0{,}311\,A\, e^{j1{,}2545}$$

$$\hat{\underline{I}}_3 = \frac{\hat{U}_3 \cdot e^{-j\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{R^2 + (3\omega L - \frac{1}{3\omega C})^2}} e^{-j\arctan\left(\frac{3\omega L - \frac{1}{3\omega C}}{R}\right)}$$

$$\hat{\underline{I}}_3 = \frac{40V\, e^{-j\arctan\left(\frac{3\cdot 2\pi\cdot 50Hz\cdot 0{,}0406\,H - \frac{1}{3\cdot 2\pi\cdot 50Hz\cdot 10^{-5}F}}{100\Omega}\right)}}{\sqrt{(100\Omega)^2 + (3\cdot 2\pi\cdot 50\,Hz\ 0{,}0406H - \frac{1}{3\cdot 2\pi\cdot 50Hz\, 10^{-5}F})^2}}\, e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

$$\hat{\underline{I}}_3 = 0{,}331A\, e^{j(0{,}596 - \frac{\pi}{6})}$$

$$i(t) = i_1(t) + i_3(t) = Re(\hat{\underline{I}}_1 e^{j\omega t}) + Re(\hat{\underline{I}}_3 e^{j3\omega t})$$

$$i(t) = 0{,}311\,A\cos(\omega t + 1{,}2545) + 0{,}331A\cos(3\omega t + 0{,}596 - \tfrac{\pi}{6})$$

(ii) $I_{EFF} = \sqrt{\left(\frac{\hat{I}_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\hat{I}_3}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0{,}311A}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}331A}{\sqrt{2}}\right)^2} = 0{,}321A$

$P = I_{EFF}{}^2 R = (0{,}321A)^2\, 100\Omega = 10{,}316W$

5
?

Autokorrelation:

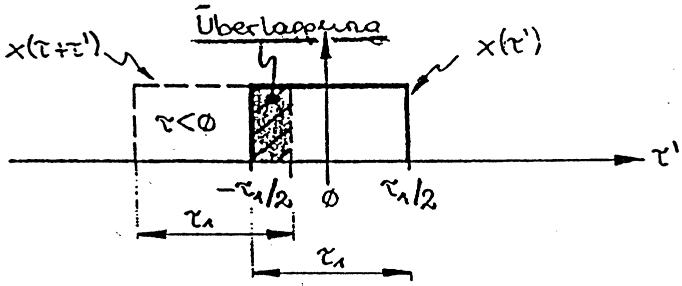
Ein Signal $x(\tau)$ besitzt die Dauer τ_1. Wie lange dauert seine Autokorrelation ?

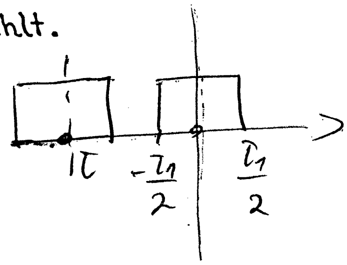
LÖSUNG:

Die Autokorrelationsfunktion eines Signals $x(\tau)$ ist definiert als

$$\varphi(\tau) = x(\tau) \otimes x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau')\, x(\tau+\tau')\, d\tau'.$$

o. B. d. A. wird für $x(\tau)$ ein Rechteckimpuls gewählt.





Solange eine Überlappung des Signals $x(\tau')$ mit dem zeitverschobenen Signal $x(\tau'+\tau)$ stattfindet ist $\varphi(\tau)$ ungleich null. $\varphi(\tau)$ existiert nur für $|\tau| < \tau_1$!

Die Gesamtdauer der AKF beträgt also $2\tau_1$!

BEMERKUNGEN:

- Die AKF des Signals $x(\tau)$ beschreibt die Ähnlichkeit von $x(\tau)$ mit dem zeitverschobenen Signal $x(\tau+\tau_1)$.
- Ist $x(\tau)$ periodisch so ist auch die AKF periodisch.
- Die AKF von weißem Rauschen ist $\delta(\tau)$, d.h. nur für $\tau = \emptyset$ existiert eine Überlappung.

Auto- und Kreuzkorrelationsfunktion:

Berechnen Sie für die beiden Signale $x_1(\tau)$ und $x_2(\tau)=x_1(\tau+\tau_0)$

(*i*) die Autokorrelationsfunktion $\varphi(\tau)=\varphi_{11}(\tau)=x_1(\tau)\otimes x_1(\tau)$,

(*ii*) die Kreuzkorrelationsfunktionen $\varphi_{12}(\tau)=x_1(\tau)\otimes x_2(\tau)$, $\varphi_{21}(\tau)=x_2(\tau)\otimes x_1(\tau)$ und drücken Sie diese als Funktion von $\varphi(\tau)$ aus, d.h. $\varphi_{12}(\tau)=f(\varphi(\tau))$ bzw. $\varphi_{21}(\tau)=f(\varphi(\tau))$.

LÖSUNG:

Allgemein gilt:

$$\varphi_{11}(\tau)=x_1(\tau)\otimes x_1(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} x_1^*(\tau')\,x_1(\tau+\tau')\,d\tau'$$

$$\varphi_{12}(\tau)=x_1(\tau)\otimes x_2(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} x_1^*(\tau')\,x_2(\tau+\tau')\,d\tau'$$

$$\varphi_{21}(\tau)=x_2(\tau)\otimes x_1(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} x_2^*(\tau')\,x_1(\tau+\tau')\,d\tau'$$

Speziell für $x_1(\tau)$ und $x_2(\tau)=x_1(\tau+\tau_0)$ folgt (reelles Signal vorausgesetzt):

(i) $$\underline{\underline{\varphi(\tau)=\varphi_{11}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau')\,x_1(\tau+\tau')\,d\tau'}}$$

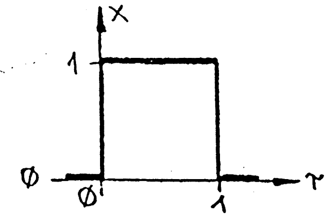
(ii) $$\underline{\underline{\varphi_{12}(\tau)}}=\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau')\,x_1(\tau+\tau_0+\tau')\,d\tau'=\underline{\underline{\varphi(\tau+\tau_0)}}$$

$$\underline{\underline{\varphi_{21}(\tau)}}=\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\underbrace{\tau'+\tau_0})\,x_1(\tau+\tau')\,d\tau'=\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau')\,x_1(\tau-\tau_0+\tau')\,d\tau'\underline{\underline{=\varphi(\tau-\tau_0)}}$$

Substitution $\tau''=\tau'+\tau_0$ mit $d\tau'=d\tau''$ und $\tau''\mapsto\tau'$

BEMERKUNG: Die Kreuzkorrelationsfunktion ist ein Maß dafür wie ähnlich sich die beiden Signale $x_1(\tau)$ und $x_2(\tau)$ sind.

Autokorrelationsfunktion eines Rechteckimpulses:

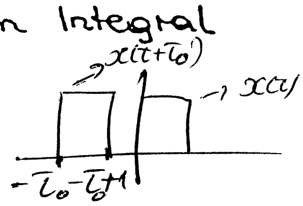


Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion des angegebenen Rechteckimpulses.

LÖSUNG:

Die Autokorrelationsfunktion wird aus dem Integral

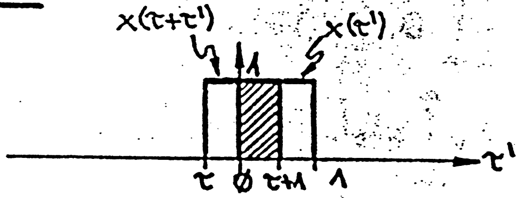
$$\underline{\varphi(\tau)} = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{x(\tau')\,x(\tau+\tau')\,d\tau'}$$



berechnet.

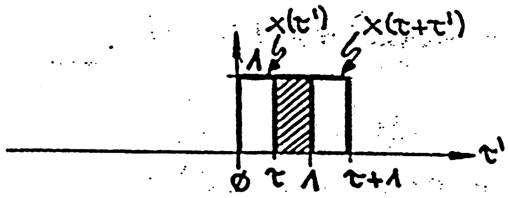
Graphische Darstellung des Integranten:

$\underline{-1 \leq \tau \leq \emptyset:}$



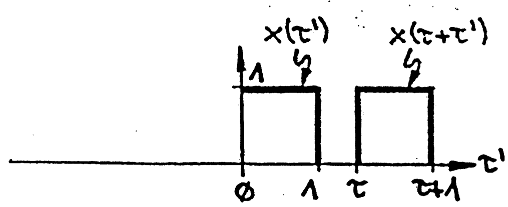
$$\underline{\varphi(\tau)} = \int_{\emptyset}^{\tau+1} d\tau' = \underline{\tau+1}$$

$\underline{\emptyset \leq \tau \leq 1:}$



$$\underline{\varphi(\tau)} = \int_{\tau}^{1} d\tau' = \underline{1-\tau}$$

$\underline{\tau \geq 1:}$

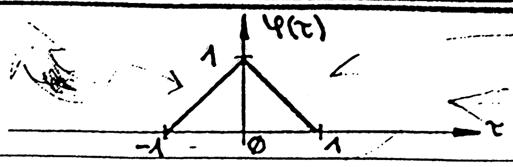


Es findet keine Überlappung statt!
$\underline{\varphi(\tau) = \emptyset}$.

Alle Ergebnisse zusammengefaßt ergibt

$$\varphi(\tau) = (\tau+1)\left[\varepsilon(\tau+1) - \varepsilon(\tau)\right] + (1-\tau)\left[\varepsilon(\tau) - \varepsilon(\tau-1)\right]$$

$$\underline{\underline{\varphi(\tau) = (\tau+1)\,\varepsilon(\tau+1) - 2\tau\,\varepsilon(\tau) + (\tau-1)\,\varepsilon(\tau-1)}} = \Lambda(\tau)$$



Autokorrelationsfunktion von Diracstößen:

Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion des Signals

$x(\tau)=\delta(\tau)+\delta(\tau-\tau_1)$.

LÖSUNG:

Methode 1:

Einsetzen des reellen Signals $x(\tau)=\delta(\tau)+\delta(\tau-\tau_1)$ ins Autokorrelationsintegral $\varphi(\tau)=x(\tau)\otimes x(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau')\,x(\tau+\tau')\,d\tau'$

liefert

$\tau'' \ldots \tau''\to\tau' \;\hat{=}\; \int \delta(\tau')\,\delta(\tau+\tau'+\tau_1)\,d\tau' = \delta(\tau+\tau_1)$

$$\varphi(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}[\delta(\tau')+\delta(\tau'-\tau_1)][\delta(\tau+\tau')+\delta(\tau+\tau'-\tau_1)]\,d\tau'$$

$$\varphi(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau')\,\delta(\tau+\tau')\,d\tau'+\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau'-\tau_1)\,\delta(\tau+\tau')\,d\tau'$$

$\to$ vgl. mit AKF !

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau')\,\delta(\tau+\tau'-\tau_1)\,d\tau'+\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau'-\tau_1)\,\delta(\tau+\tau'-\tau_1)\,d\tau'$$

Durch Auswertung der vier Teilintegrale erhalten wir das

Endergebnis $\varphi(\tau)=\delta(\tau)+\delta(\tau+\tau_1)+\delta(\tau-\tau_1)+\delta(\tau)=\delta(\tau+\tau_1)+2\delta(\tau)+\delta(\tau-\tau_1)$.

Methode 2:

Für die Fourier-Transformierte von $x(\tau)$ folgt $x(\tau)\circ\!\!-\!\!\bullet\, X(j\nu)=1+e^{-j\nu\tau_1}$

Für die Fourier-Transformierte der Autokorrelation gilt $\varphi(\tau)\circ\!\!-\!\!\bullet\,|X(j\nu)|^2$

in unserem Fall also

$$|X(j\nu)|^2=|1+e^{-j\nu\tau_1}|^2=|1+\cos(\nu\tau_1)-j\sin(\nu\tau_1)|^2=[1+\cos(\nu\tau_1)]^2+\sin^2(\nu\tau_1)$$

$$|X(j\nu)|^2=1+2\cos(\nu\tau_1)+\cos^2(\nu\tau_1)+\sin^2(\nu\tau_1)=2+2\cos(\nu\tau_1)$$

$$|X(j\nu)|^2=2+2\,\frac{e^{j\nu\tau_1}+e^{-j\nu\tau_1}}{2}=2+e^{j\nu\tau_1}+e^{-j\nu\tau_1}$$

Die Autokorrelationsfunktion ergibt sich dann durch inverse Fourier-Transformation zu

$$\varphi(\tau)=\mathcal{F}^{-1}[|X(j\nu)|^2]=2\delta(\tau)+\delta(\tau+\tau_1)+\delta(\tau-\tau_1)=\delta(\tau+\tau_1)+2\delta(\tau)+\delta(\tau-\tau_1)$$

Bode-Diagramm (Betragsteil):

9

Zeichnen Sie den Betragsteil des Bode-Diagramms für ein System mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s}{(s-1)\cdot(s^2+4s+100)}$$

LÖSUNG:

Übertragungsfunktion: $G(s) = \frac{s}{(s-1)(s^2+4s+100)} = s\,G_0(s)$

Nullstelle: $q_1 = 0$

Pol: $p_1 = 1$, d.h. das System ist INSTABIL! $p_{2/1} = -2 \pm j\,9{,}8$

Knickfrequenzen: $\nu_1 = 1$; $\nu_2 = \sqrt{100} = 10$

Skalenweite der Frequenzskala: $0{,}1 < \nu < 100$

Asymptotische Form: $G_0(s) = \frac{1}{(s-1)(s^2+4s+100)} \rightarrow G_0(s=0) = -0{,}01$

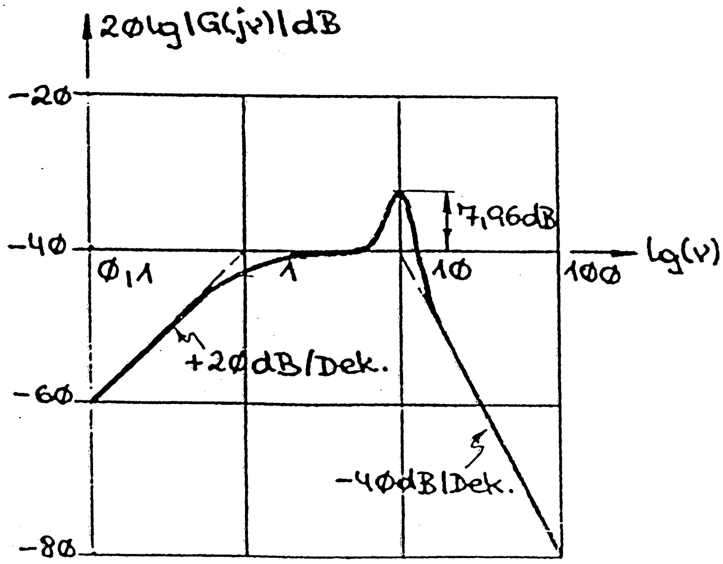
Randwerte: $-60\,dB$; $-80\,dB$

Randsteigungen: $+20\,dB/Dekade$; $-40\,dB/Dekade$

Überschwingen des quadratischen Terms im Nenner: (Klemm. pos.)

$\nu_2 = 10 \rightarrow 2\vartheta = \frac{4}{10} \rightarrow$ Überschwingen $= -20\lg 0{,}4\,dB = 7{,}96\,dB$

Frequenzgang: $G(j\nu) = \frac{j\nu}{(j\nu-1)((j\nu)^2+4j\nu+100)}$



Bode-Diagramm (Betragsteil) 2:

Zeichnen Sie den Betragsteil des Bode-Diagramms für ein System mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{(s^2 + 4s + 100) \cdot (s - 100)}{s^2}.$$

LÖSUNG:

Übertragungsfunktion: $G(s) = \frac{(s^2+4s+100)(s-100)}{s^2} = \frac{G_o(s)}{s^2}$

$-\frac{10^4}{s^2} = k s^r \quad r = -2$

Nullstelle: $q_1 = 100$

$|G(1)| = \left|\frac{105 \cdot (-99)}{1}\right|$; $20 \lg |G(1)| = 20 \lg |10395| = 80\,dB$

Pol: $p_1 = 0$, zweifach

$\frac{-10^4}{(j1)^2} =$

Knickfrequenzen: $\nu_1 = \sqrt{100} = 10$; $\nu_2 = 100$

Skalenweite der Frequenzskala: $1 < \nu < 1000$

$10^4 \triangleq 80\,dB$

Randwerte: $80\,dB$; $60\,dB$

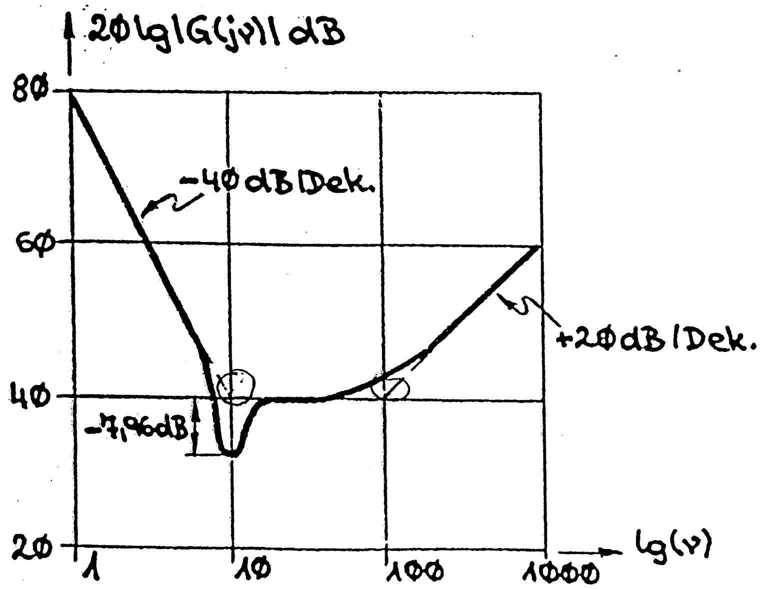
$\frac{-10^4}{s^2}$

Randsteigungen: $-40\,dB/\text{Dekade}$; $+20\,dB/\text{Dekade}$

Asymptotische Form: $G_o(s) = (s^2+4s+100)(s-100) \rightarrow G_o(0) = -10^4$

Überschwingen des quadratischen Terms im Zähler:

$\nu_1 = 10$, $2\vartheta = \frac{4}{10} = 0{,}4 \rightarrow$ Überschwingen $= 20 \lg 0{,}4\,dB = -7{,}96\,dB$



Frequenzgang:

$$G(j\nu) = \frac{((j\nu)^2 + 4j\nu + 100)(j\nu - 100)}{(j\nu)^2}$$

Bode-Diagramm (Betragsteil) 3:

Zeichnen Sie den Betragsteil des Bode-Diagramms für das System

$$G(s)=\frac{s^2+10{,}1\cdot s+1}{s+1}$$

LÖSUNG:

Übertragungsfunktion: $G(s)=\frac{s^2+10{,}1s+1}{s+1}=\frac{(s+0{,}1)(s+10)}{s+1}$

Nullstellen: $q_1=-0{,}1$; $q_2=-10$

Pole: $p_1=-1$

Knickfrequenzen: $\nu_1=0{,}1$; $\nu_2=1$; $\nu_3=10$

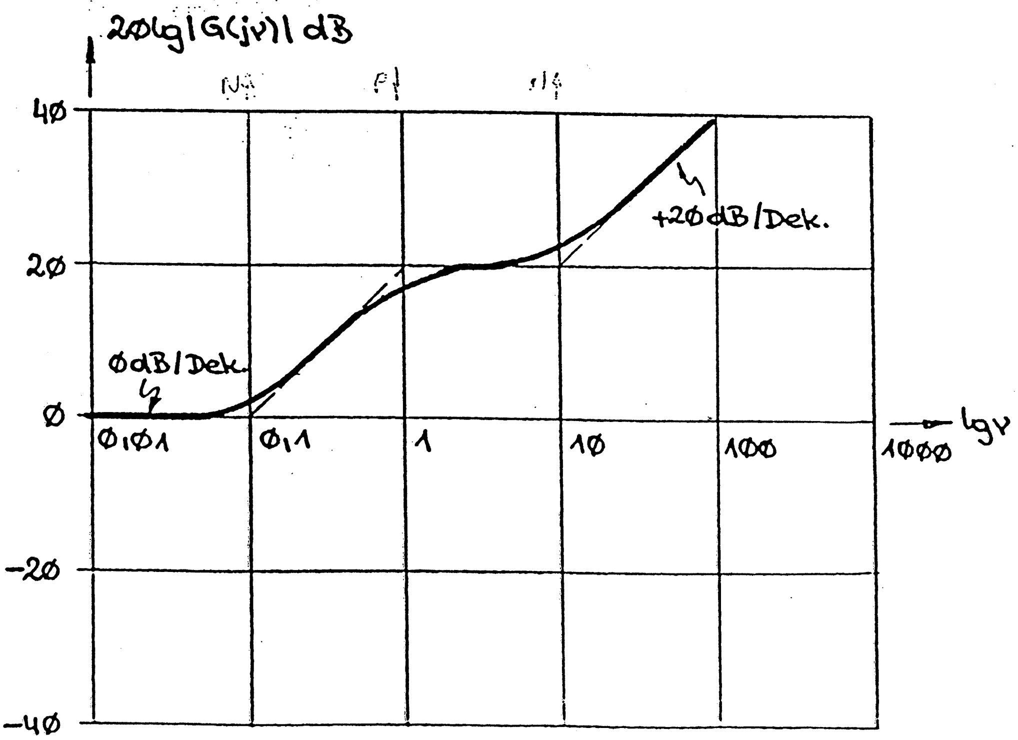
Skalenweite der Frequenzskala: $0{,}01<\nu<100$

Asymptotische Form: $G_0(s)=G(s)\rightarrow G_0(0)=1$

Randwerte: 0 dB ; 40 dB

Randsteigungen: 0 dB/Dekade ; +20 dB/Dekade

Frequenzgang: $G(j\nu)=\frac{(j\nu+0{,}1)(j\nu+10)}{j\nu+1}$



Bode-Diagramm (Betragsteil) 4:

Zeichnen Sie den Betragsteil des Bode-Diagramms für das System

$$y^{(2)} + 10{,}1 \cdot y^{(1)} + y = u^{(1)} + u \; .$$

LÖSUNG:

Übertragungsfunktion: $G(s) = \dfrac{s+1}{s^2+10{,}1s+1} = \dfrac{s+1}{(s+0{,}1)(s+10)}$

Nullstelle: $q_1 = -1$

Pole: $p_1 = -0{,}1$; $p_2 = -10$

Knickfrequenzen: $\nu_1 = 0{,}1$; $\nu_2 = 1$; $\nu_3 = 10$

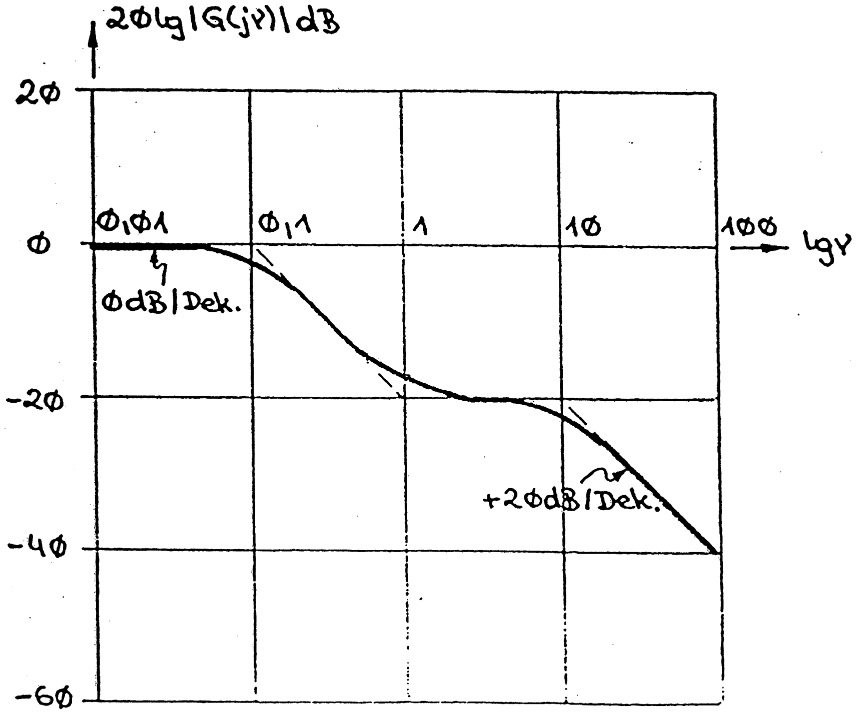
Skalenweite der Frequenzskala: $0{,}01 < \nu < 100$

Asymptotische Form: $G_0(s) = G(s) \rightarrow G_0(0) = 1$

Randwerte: 0dB ; -40dB

Randsteigungen: 0dB / Dekade ; -20 dB / Dekade

Frequenzgang: $G(j\nu) = \dfrac{j\nu+1}{(j\nu+0{,}1)(j\nu+10)}$



Bode-Diagramm (Betragsteil) 5:

Zeichnen Sie den Betragsteil des Bode-Diagramms für das System

$$y^{(2)} + 11 \cdot y^{(1)} + 10 \cdot y = u^{(1)} - 0{,}1 \cdot u \; .$$

LÖSUNG:

Übertragungsfunktion: $G(s) = \dfrac{s - 0{,}1}{s^2 + 11s + 10} = \dfrac{s - 0{,}1}{(s+1)(s+10)}$

Nullstelle: $q_1 = 0{,}1$

Pole: $p_1 = -1$; $p_2 = -10$

Knickfrequenzen: $\nu_1 = 0{,}1$; $\nu_2 = 1$; $\nu_3 = 10$

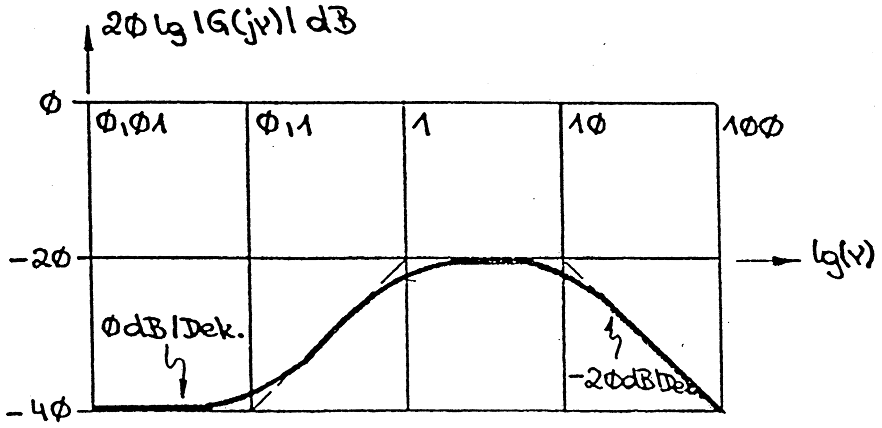
Skalenweite der Frequenzskala: $0{,}01 < \nu < 100$

Asymptotische Form: $G_0(s) = G(s) \rightarrow G_0(0) = -0{,}01$

Randwerte: $-40\,\mathrm{dB}$; $-40\,\mathrm{dB}$

Randsteigungen: $0\,\mathrm{dB}/\mathrm{Dekade}$; $-20\,\mathrm{dB}/\mathrm{Dekade}$

Frequenzgang: $G(j\nu) = \dfrac{j\nu - 0{,}1}{(j\nu+1)(j\nu+10)}$



Bode-Diagramm (Betragsteil) 6:

Zeichnen Sie den Betragsteil des Bode-Diagramms für ein System mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s - 0{,}1}{s\,(s^2 + 0{,}4s + 1)}$$

LÖSUNG:

Übertragungsfunktion: $G(s) = \dfrac{s-0{,}1}{s(s^2+0{,}4s+1)} = \dfrac{G_0(s)}{s}$

Nullstelle: $q_1 = 0{,}1$

Pol: $p_1 = 0$

Knickfrequenzen: $\nu_1 = 0{,}1$; $\nu_2 = \sqrt{1} = 1$

Skalenweite der Frequenzskala: $0{,}01 < \nu < 10$

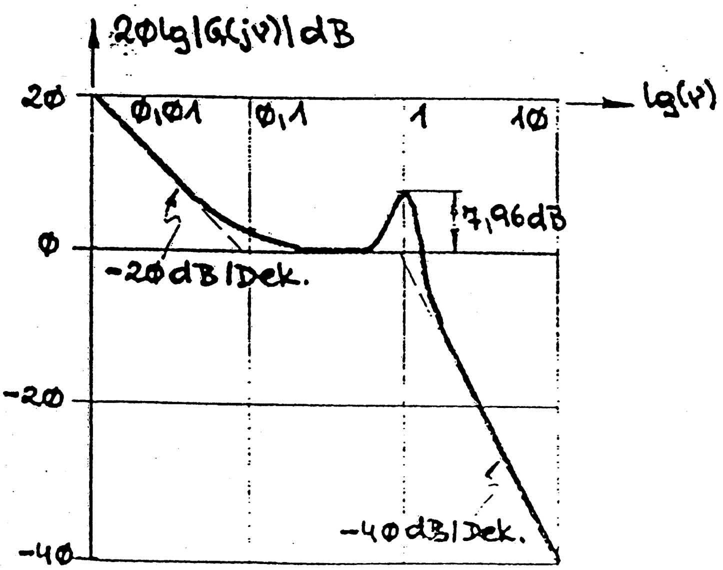
Randwerte: 20 dB ; −40 dB

Randsteigungen: −20 dB/Dekade ; −40 dB/Dekade

Asymptotische Form: $G_0(s) = \dfrac{s-0{,}1}{s^2+0{,}4s+1} \rightarrow G_0(0) = 0{,}1$

Überschwingen des quadratischen Terms im Nenner:

$\nu_2 = 1 \rightarrow 2\vartheta = 0{,}4 \rightarrow$ Überschwingen $= -20 \lg 0{,}4\,\text{dB} = 7{,}96\,\text{dB}$



Frequenzgang:

$$G(j\nu) = \frac{j\nu - 0{,}1}{j\nu\,((j\nu)^2 + 0{,}4j\nu + 1)}$$

Bode-Diagramm (Betrags- und Winkelteil):

Zeichnen Sie den Betrags- und Winkelteil des Bode-Diagramms für ein System mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s}{(s+0{,}1)\cdot(s^2+0{,}25\cdot s+1)}$$

LÖSUNG:

Übertragungsfunktion: $G(s) = \frac{s}{(s+0{,}1)(s^2+0{,}25s+1)} = s\,G_0(s)$

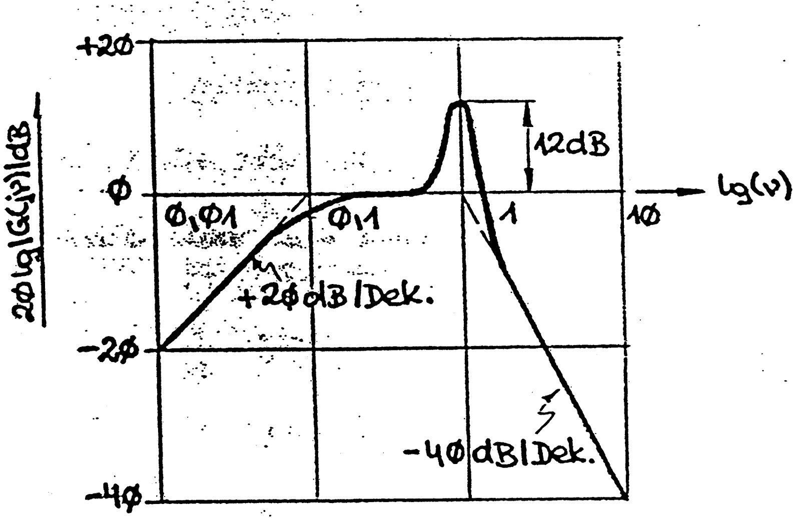
Nullstelle: $q_1 = 0$ Pol: $p_1 = -0{,}1$

Knickfrequenzen: $\nu_1 = 0{,}1$; $\nu_2 = \sqrt{1} = 1$

Skalenweite der Frequenzskala: $0{,}01 < \nu < 10$

Asymptotische Form: $G_0(s) = \frac{1}{(s+0{,}1)(s^2+0{,}25s+1)} \rightarrow G_0(0) = 10$

Randwerte: $-20\,dB$; $-40\,dB$ Randsteigungen: $+20\,dB/Dek.$; $-40\,dB/Dek$



Überschwingen des quad. Terms im Nenner:

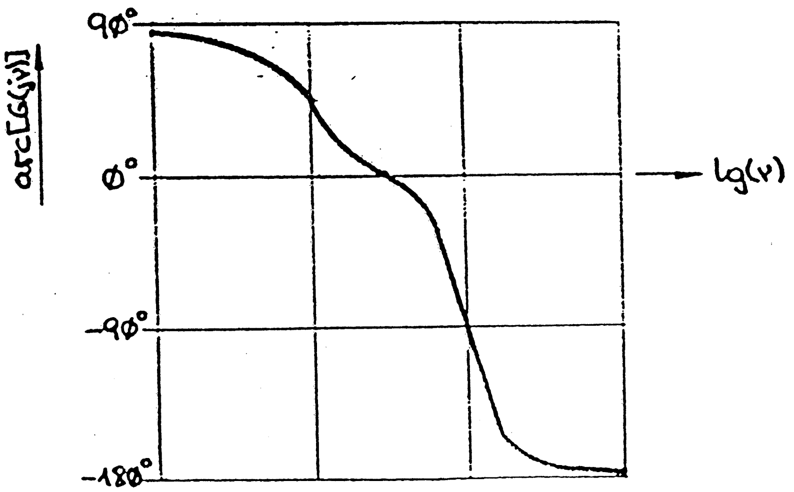
$\nu_2 = 1 \rightarrow 2\vartheta = 0{,}25$

Überschwingen $= -20 \lg 2\vartheta\, d$

Überschwingen $= 12\,dB$

Frequenzgang:

$$G(j\nu) = \frac{j\nu}{(j\nu+0{,}1)((j\nu)^2+0{,}25j+}$$



Bode-Diagramm (Betrags- und Winkelteil) 2:

Zeichnen Sie den Betrags- und Winkelteil des Bode-Diagramms für ein System mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{8\cdot(s^2+4\cdot s+100)}{s+1}$$

LÖSUNG:

Übertragungsfunktion: $G(s) = \frac{8(s^2+4s+100)}{s+1}$

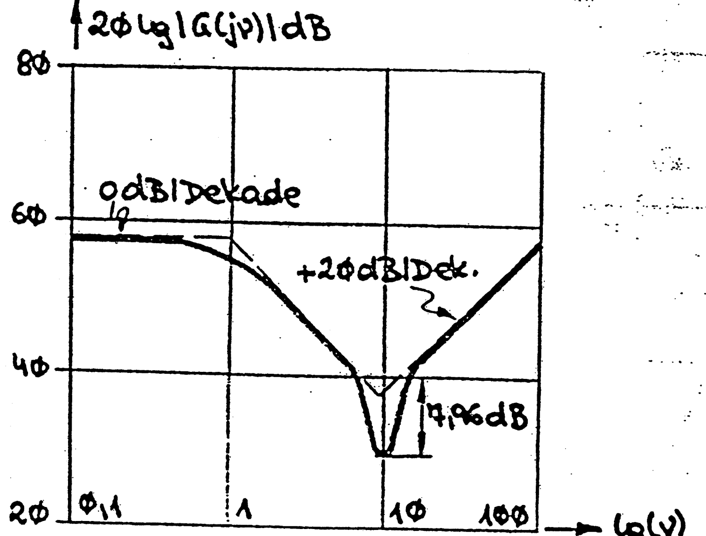
Pol: $p_1 = -1$

Knickfrequenzen: $\nu_1 = 1$; $\nu_2 = \sqrt{100} = 10$

Skalenweite der Frequenzskala: $0{,}1 < \nu < 100$

Asymptotische Form: $G_0(s) = G(s) \rightarrow G_0(0) = 800$

Randwerte: 58dB ; 58dB



Randsteigungen:

0dB/Dekade; +20dB/Dekade

Überschwingen des quad. Terms im Zähler:

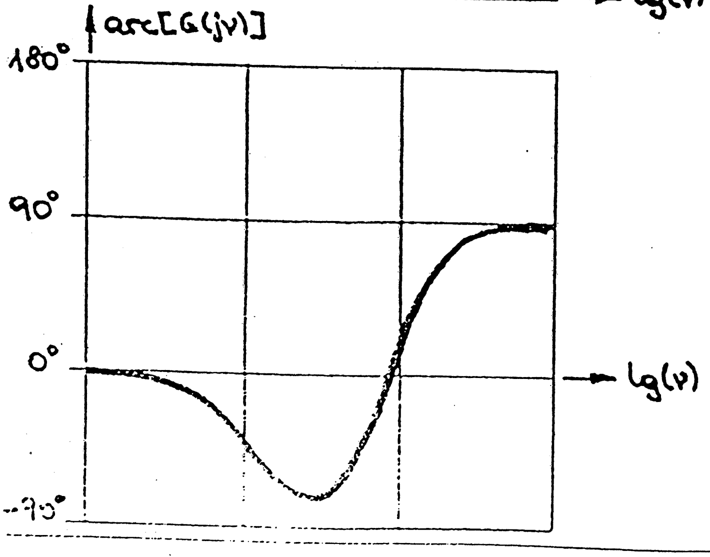
$\nu_2 = 10 \rightarrow 2\vartheta = \frac{4}{10}$

Überschwingen = $20\lg 2\vartheta$ dB

Überschwingen = $-7{,}98$dB

Frequenzgang:

$$G(j\nu) = \frac{8((j\nu)^2+4j\nu+100)}{j\nu+1}$$



Bode-Diagramm (Betrags- und Winkelteil) 3:

Zeichnen Sie den Betrags- und Winkelteil des Bode-Diagramms für ein System mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{(s+0{,}1)\cdot(s^2+2\cdot s+100)}{s}.$$

LÖSUNG:

Übertragungsfunktion: $G(s) = \frac{(s+0{,}1)(s^2+2s+100)}{s} = \frac{G_0(s)}{s}$

$G(s) = \frac{0{,}1\cdot 100\cdot\left(\frac{s}{0{,}1}+1\right)\cdot\left(\frac{s^2}{100}+\frac{2s}{100}+1\right)}{s}$

Nullstelle: $q_1 = 0{,}1$

Pol: $p_1 = 0$

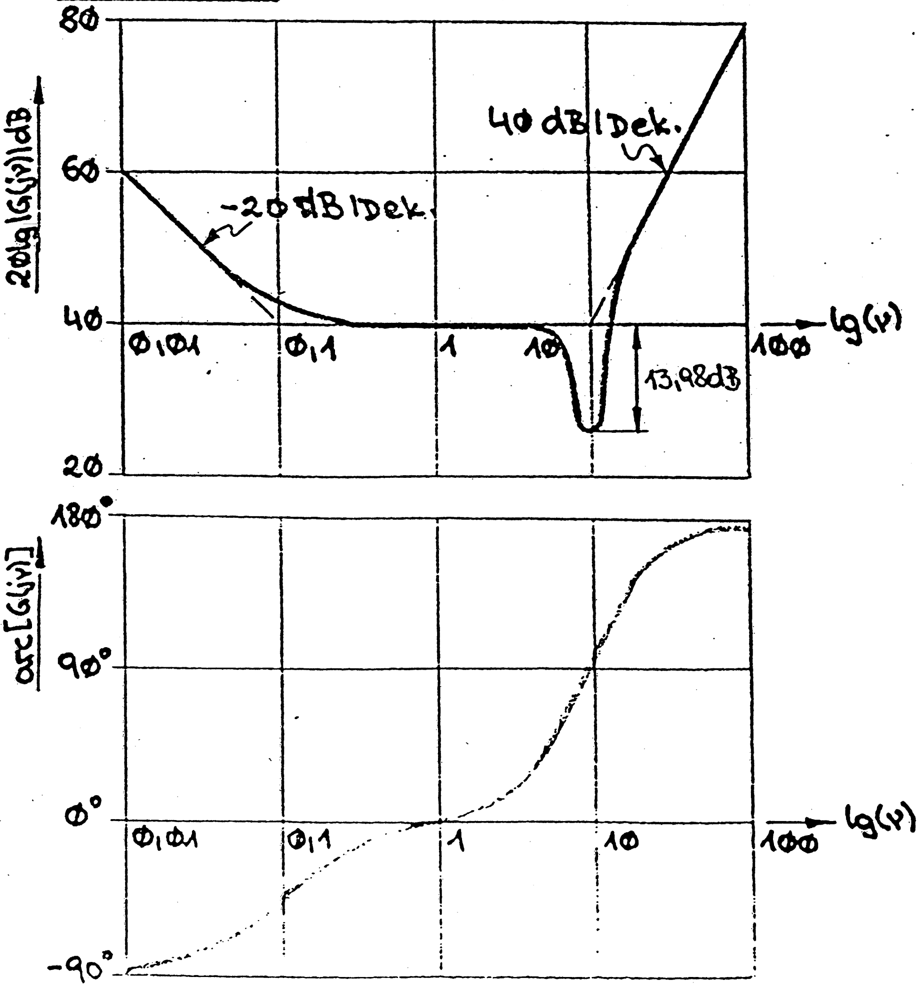
Knickfrequenzen: $\nu_1 = 0{,}1$; $\nu_2 = \sqrt{100} = 10$

$V = 10$ – die Verstärkung $\equiv 20\,dB$

Skalenweite der Frequenzskala: $0{,}01 < \nu < 100$

Asymptotische Form: $G_0(s) = (s+0{,}1)(s^2+2s+100) \rightarrow G_0(0) = 10$

Randwerte: 60 dB; 80 dB



Randsteigungen:

−20 dB/Dek.; 40 dB/D

Überschwingen des quad. Terms im Zähl

$\nu_2 = 10 \rightarrow 2\vartheta = \frac{2}{10} = 0{,}$

Überschwingen = −13,

Frequenzgang:

$G(j\nu) = \frac{(j\nu+0{,}1)((j\nu)^2+2j\nu}{j\nu}$

Bode-Diagramm (Betrags- und Winkelteil) 4:

Ein System besitzt die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1+(s/10)^2}{1+10\cdot s}$$

Geben Sie die zugehörigen Betrags- und Winkelfrequenzgänge als Bode-Diagramm an.

LÖSUNG:

Übertragungsfunktion: $G(s) = \frac{1+(\frac{s}{10})^2}{1+10s} = \frac{1}{1000}\,\frac{s^2+100}{s+0{,}1}$

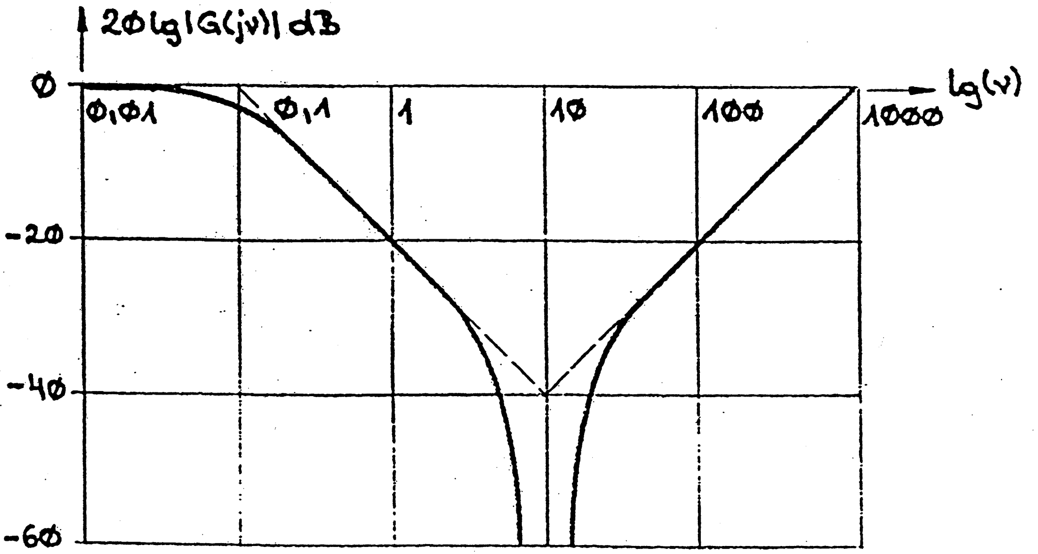
Pol: $p_1 = -\frac{1}{10} = -0{,}1$

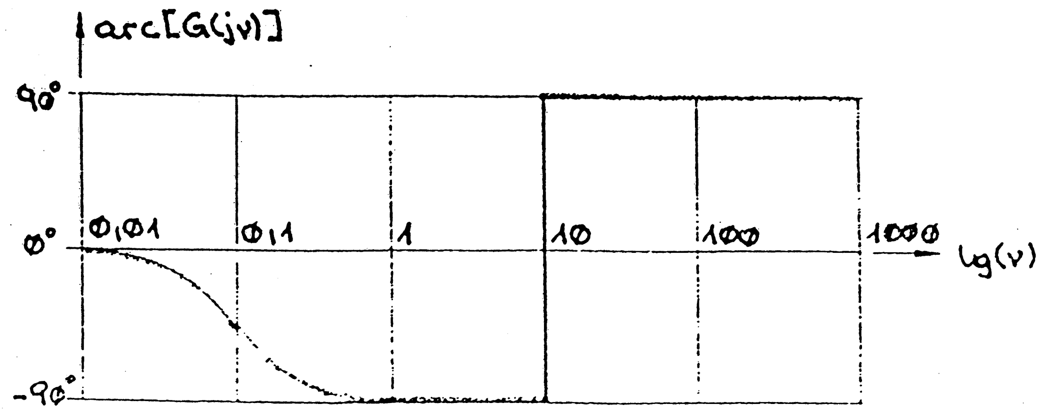
Knickfrequenzen: $\nu_1 = 0{,}1$; $\nu_2 = \sqrt{100} = 10$

Skalenweite der Frequenzskala: $0{,}01 < \nu < 1000$

Asymptotische Form: $G_0(s) = G(s) \rightarrow G_0(0) = 1$

Randwerte: 0dB ; 0dB Randsteigungen: 0dB/Dek. ; +20dB/Dek.





Frequenzgang:

$G(j\nu) = \frac{1}{10^3}\,\frac{(j\nu)^2+100}{j\nu+0{,}1}$

Überschwingen quadr. Terms im Zähler: $2\vartheta \stackrel{!}{=} 0$

Überschwingen $= -\infty$

Winkelfrequenzgan[g]

$arc[G(j\nu)] = arc[100$ … $- arc[0{,}1$ …

$arc[100-\nu^2] = \begin{cases} -180°\ \forall \\ 180°\ \forall\nu \end{cases}$

Phasensprung be[i]

Bode-Diagramm (Betrags- und Winkelteil) 5:

Zeichnen Sie Betrags- und Winkelfrequenzgang des Systems mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s+0{,}1}{s^2} \cdot \left(s^2 + 0{,}2 \cdot s + 1\right) \quad .$$

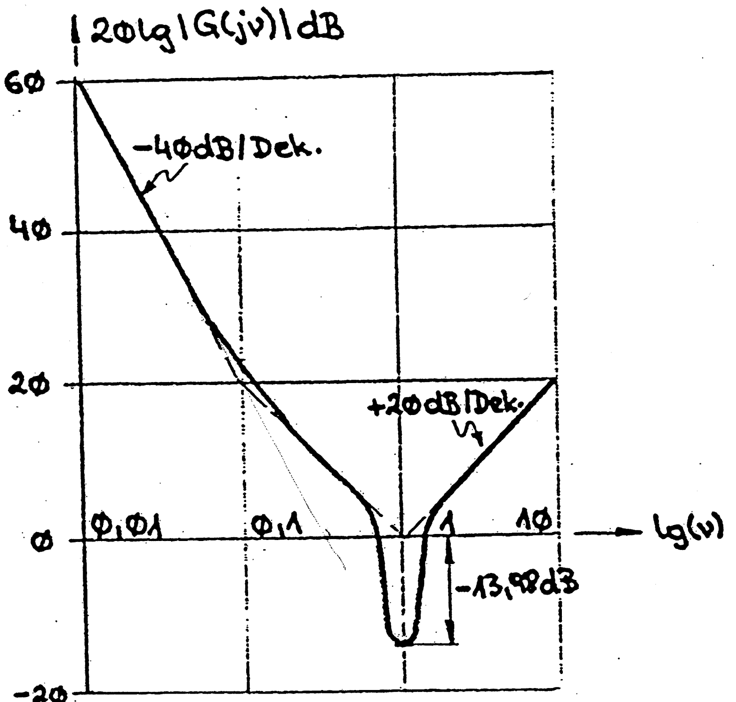
als Bode-Diagramm.

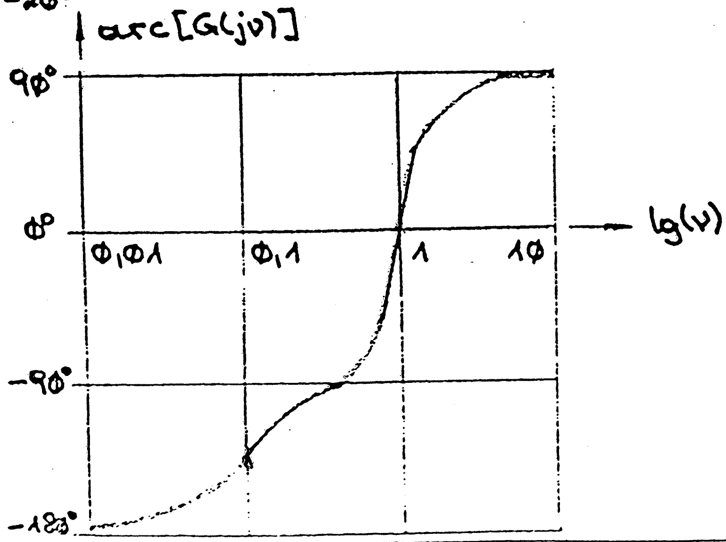
LÖSUNG:

Übertragungsfunktion: $G(s) = \frac{(s+0{,}1)(s^2+0{,}2s+1)}{s^2} = \frac{G_0(s)}{s^2}$

Nullstelle: $q_1 = -0{,}1$ Pol: $p_1 = 0$, zweifach

Knickfrequenzen: $\nu_1 = 0{,}1$; $\nu_2 = \sqrt{1} = 1$





Skalenweite der Frequenzskala

$0{,}01 < \nu < 10$

Asymptotische Form:

$G_0(s) = (s+0{,}1)(s^2+0{,}2s+1) \rightarrow$

$G_0(0) = 0{,}1$

Randwerte: 60dB; 20dB

Randsteigungen:

-40dB/Dek.; 20dB/Dek.

Überschwingen des quad. Terms im Zähler:

$\nu_2 = 1 \rightarrow 2\vartheta = 0{,}2$

Überschwingen = -13,98dB

Frequenzgang:

$$G(j\nu) = \frac{(j\nu+0{,}1)((j\nu)^2+0{,}2j\nu+}{(j\nu)^2}$$

Bode-Diagramm (Betrags- und Winkelteil) 6:

Zeichnen Sie Betrags- und Winkelfrequenzgang des Systems mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s^2 + 0{,}2 \cdot s + 1}{s \cdot (s + 10)}$$

als Bode-Diagramm.

LÖSUNG:

Übertragungsfunktion: $G(s) = \frac{s^2+0{,}2s+1}{s(s+10)} = \frac{G_0(s)}{s}$

Pole: $p_1 = 0$; $p_2 = -10$

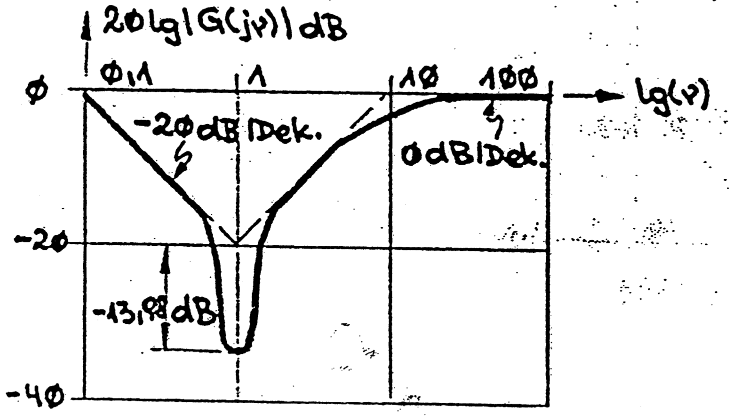
Knickfrequenzen: $\nu_1 = \sqrt{1}$; $\nu_2 = 10$

Skalenweite der Frequenzskala: $0{,}1 < \nu < 100$

Asymptotische Form: $G_0(s) = \frac{s^2+0{,}2s+1}{s+10} \rightarrow G_0(0) = 0{,}1$

Randwerte: 0dB ; 0dB

Randsteigungen: −20dB/Dekade; 0dB/Dekade

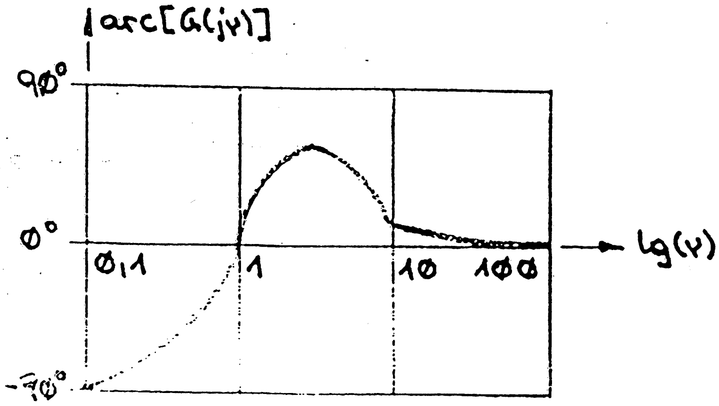


Überschwingen des quad. Terms im Zähler:

$\nu_1 = 1 \rightarrow 2\vartheta = 0{,}2$

Überschwingen $= 20 \lg 2\vartheta$ dB

Überschwingen $= -13{,}98$dB



Frequenzgang:

$$G(j\nu) = \frac{(j\nu)^2 + 0{,}2j\nu + 1}{j\nu(j\nu+10)}$$

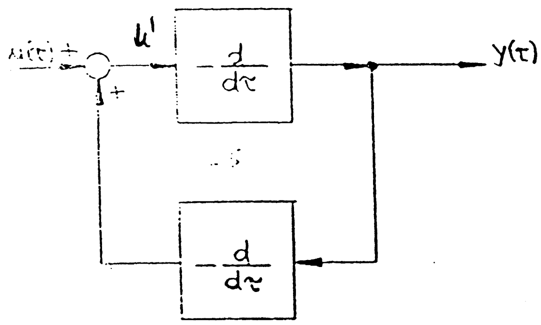
Bode-Diagramm (Betrags- und Winkelteil) 7:

$u(\tau) - s\,y(\tau) = u'$

$y = u'$

$-s\,u(\tau) \qquad u(\tau) - s\,y(\tau) = -\frac{y}{s}$

$u - s^2 y + y = 0$



Zeichnen Sie für das System mit zwei invertierenden Differenzierern den Betragsteil und den Winkelteil des Bode-Diagramms.

$y = -s\cdot(u + y(-s)) = -su + s^2 y$

$y = \frac{-s\cdot u}{1-s^2} \qquad G(s) = \frac{-s}{1-s^2} \qquad y(-s^2+1) = u$

$\frac{y}{u} = \frac{1}{s^2+1}$

LÖSUNG:

Gesamtübertragungsfunktion: $G(s) = \frac{-s}{1-(-s)^2} = \frac{+s}{-1+s^2} = \frac{-s}{(1-s)(1+s)}$

Nullstelle: $q_1 = 0$

Pole: $p_1 = -1;\ p_2 = 1$

Knickfrequenzen: $\nu_1 = 1$, zweifach

Skalenweite der Frequenzskala: $0{,}01 < \nu < 100$

Asymptotische Form: $G_0(s) = -\frac{1}{1-s^2} \rightarrow G_0(0) = -1$

Randwerte: $-40\,dB$; $40\,dB$

Randsteigungen: $+20\,dB/Dekade$; $-20\,dB/Dekade$

$-\frac{d}{d\tau}u(\tau)\ \frac{d}{d\tau}y$

$u + \frac{d}{d\tau}y = u' \ /\ \frac{d}{d\tau}$

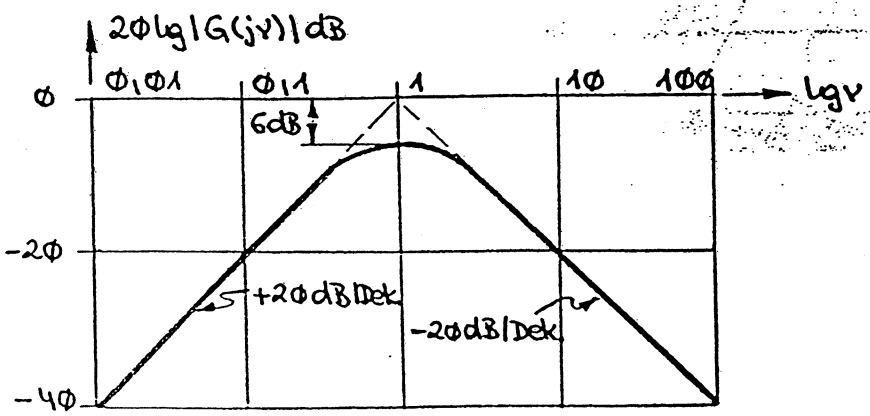
$y' = -\frac{d}{d\tau}u'$

$\frac{d}{d\tau}u - \frac{d^2}{d\tau^2}y = y'$

$\frac{d^2}{d\tau^2}y - y = \frac{d}{d\tau}u$

$\frac{s}{s^2-1}$

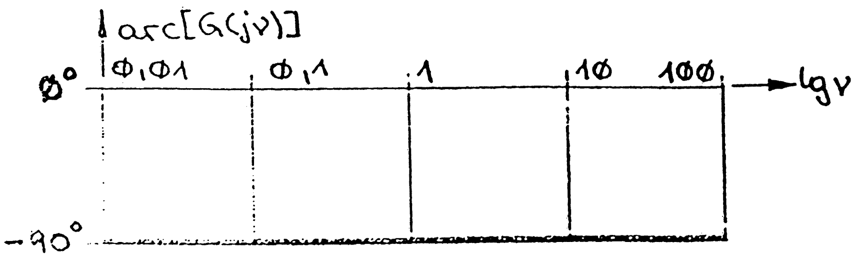
$\frac{s}{s^2-1}$



$G(j\nu) = \frac{-j\nu}{1+\nu^2}$

immer komplex

$\arg(G(j\nu))$ immer $-90°$



Pol 1 → Änderung um $-\frac{\pi}{2}$

Pol 2 → Änderung $+\frac{\pi}{2}$

→ heben sich auf

Bode-Diagramm (Betrags- und Winkelteil) 8:

Zeichnen Sie den Betrags- und Winkelteil des Bode-Diagramms für das System

$$y^{(2)} + 0{,}2 \cdot y^{(1)} + y = u^{(1)} - u \;.$$

LÖSUNG:

Übertragungsfunktion: $G(s) = \dfrac{s-1}{s^2+0{,}2s+1}$

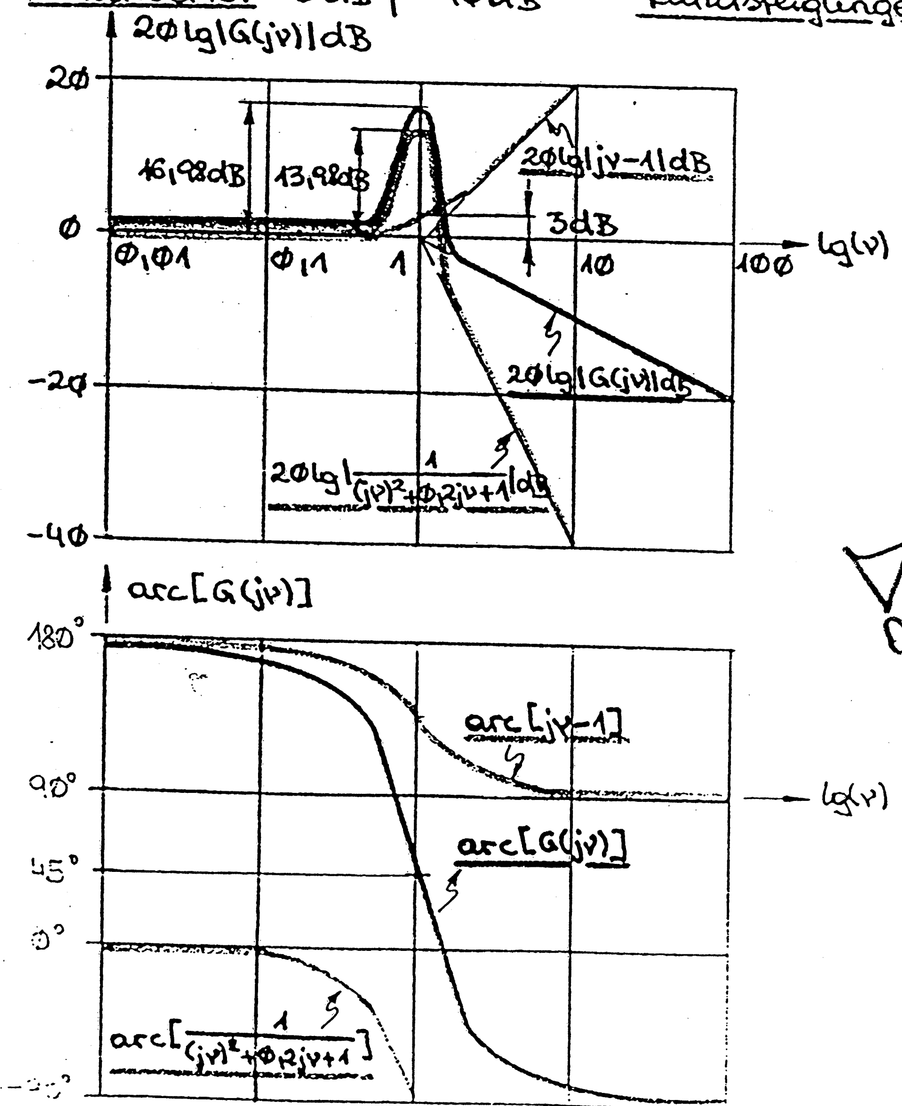
Nullstelle: $q_1 = 1$

Knickfrequenzen: $\nu_1 = 1$

Skalenweite der Frequenzskala: $0{,}01 < \nu < 100$

Asymptotische Form: $G_0(s) = G(s) \rightarrow G_0(0) = -1$

Randwerte: $0\,dB\,;\,-40\,dB$ Randsteigungen: $0\,dB/Dek.\,;\,-20\,dB/Dek.$



Frequenzgang:

$$G(j\nu) = \frac{j\nu - 1}{(j\nu)^2 + 0{,}2j\nu + 1}$$

Überschwingen von $\dfrac{1}{s^2+0{,}2s+1}$:

Überschwingen = 13,98dB

Überschwingen von $G(s)$:

Überschwingen = 13,98dB + 3dB

Überschwingen = 16,98dB

Bode-Diagramm (Betrags- und Winkelteil) 9:

Ein lineares zeitinvariantes System wird durch die Differentialgleichung

$$y^{(1)} + y = u^{(1)} - 0{,}1u$$

beschrieben. Zeichnen Sie die Betragsteil und den Winkelteil des Bode-Diagramms.

LÖSUNG:

Übertragungsfunktion: $G(s) = \frac{s - 0{,}1}{s+1}$

Nullstelle: $q_1 = 0{,}1$

Pol: $p_1 = -1$

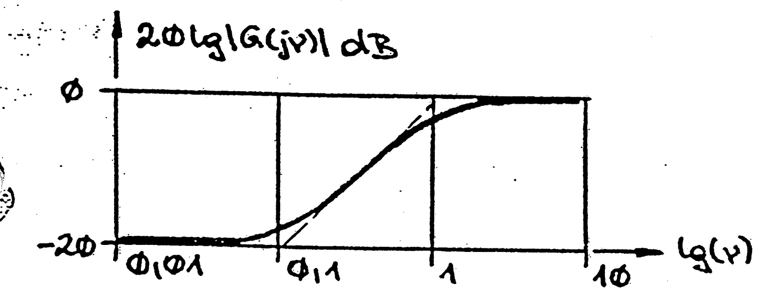
Knickfrequenzen: $\nu_1 = 0{,}1$; $\nu_2 = 1$

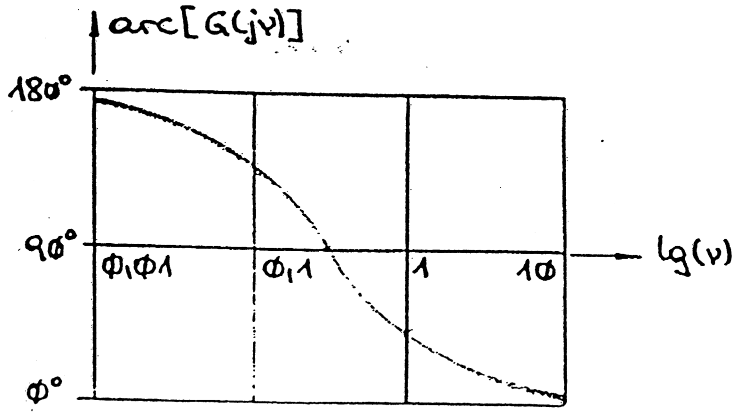
Skalenweite der Frequenzskala: $0{,}01 < \nu < 10$

Asymtotische Form: $G_0(s) = G(s) \rightarrow G_0(0) = -0{,}1$

Randwerte: $-20\,dB$; $0\,dB$

Randsteigungen: $0\,dB/Dekade$; $0\,dB/Dekade$





Bode-Diagramm (Betrags- und Winkelteil) 10:

Zeichnen Sie den Betrags- und Winkelteil des Bode-Diagramms für das System

$$y^{(2)} + 10 \cdot y^{(1)} + 11 \cdot y = 10 \cdot u^{(1)} + u \ .$$

LÖSUNG:

Übertragungsfunktion: $G(s) = \frac{10s+1}{s^2+10s+11} = 10 \frac{s+0{,}1}{(s+5+\sqrt{14})(s+5-\sqrt{14})}$

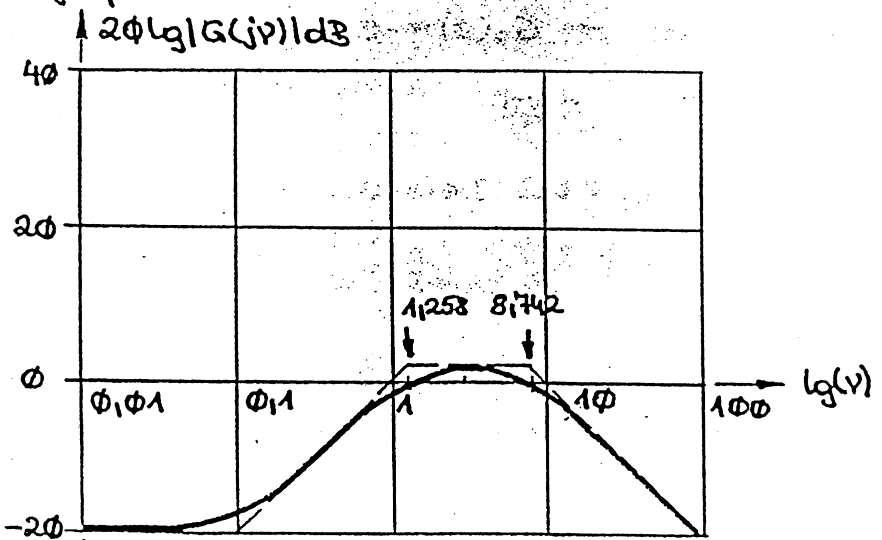
Nullstelle: $q_1 = -0{,}1$

Pole: $p_1 = -5+\sqrt{14} = -1{,}258$; $p_2 = -5-\sqrt{14} = -8{,}742$

Knickfrequenzen: $\nu_1 = 0{,}1$; $\nu_2 = 1{,}258$; $\nu_3 = 8{,}742$

Skalenweite der Frequenzskala: $0{,}01 < \nu < 100$

Asymptotische Form: $G_0(s) = G(s) \rightarrow G_0(0) = \frac{1}{11}$



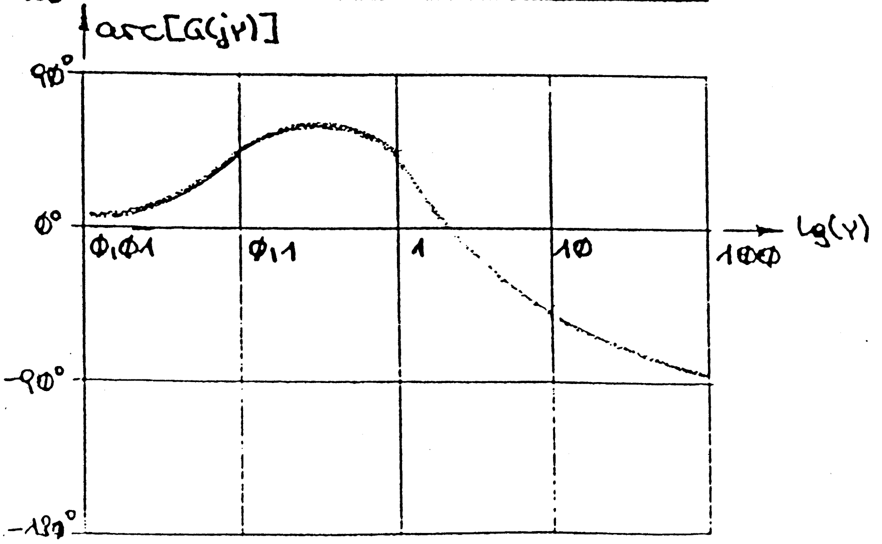
Randwerte: $\approx -20\,dB$; $\approx -20\,dB$

Randsteigungen:

$0\,dB/Dek$; $-20\,dB/Dek.$

Frequenzgang:

$$G(j\nu) = \frac{10 j\nu + 1}{(j\nu)^2 + 10 j\nu + 11}$$



Bode-Diagramm (Betrags- und Winkelteil) 11:

Zeichnen und diskutieren Sie den Betrags- und Winkelteil des Bode-Diagramms für das System

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2\vartheta s + 1}\ , \quad \vartheta \geq 0.$$

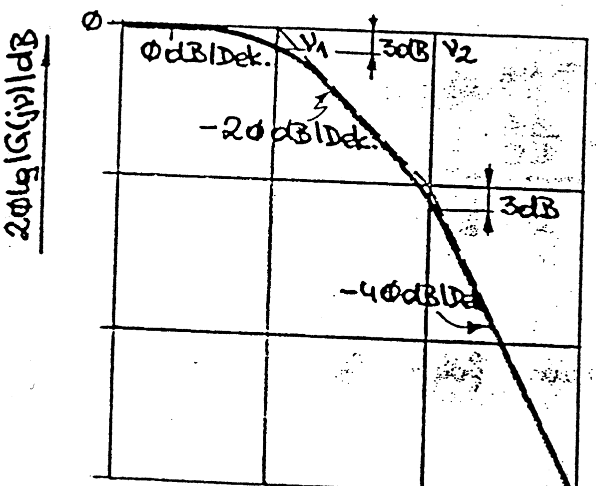
LÖSUNG:

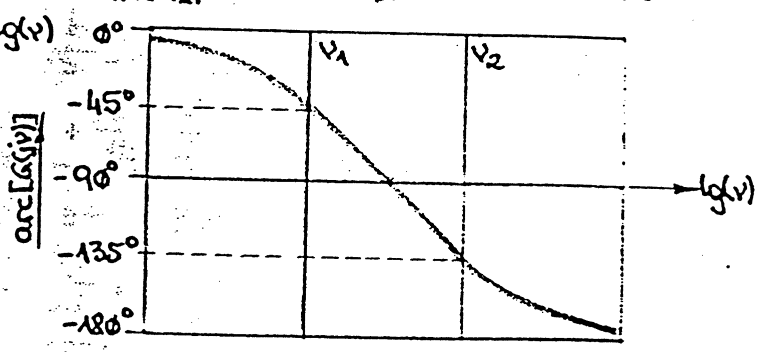
Charakteristisches Polynom: $P(s) = s^2 + 2\vartheta s + 1$

Pole: $p_{1,2} = -\vartheta \pm \sqrt{\vartheta^2 - 1}$

(i) Die Pole $p_{1,2}$ sind reell, d.h. $\vartheta \geq 1$.

Übertragungsfunktion: $G(s) = \frac{1}{(s-\nu_1)(s-\nu_2)}$ mit $\nu_{1,2} = -\vartheta \pm \sqrt{\vartheta^2 - 1}$.



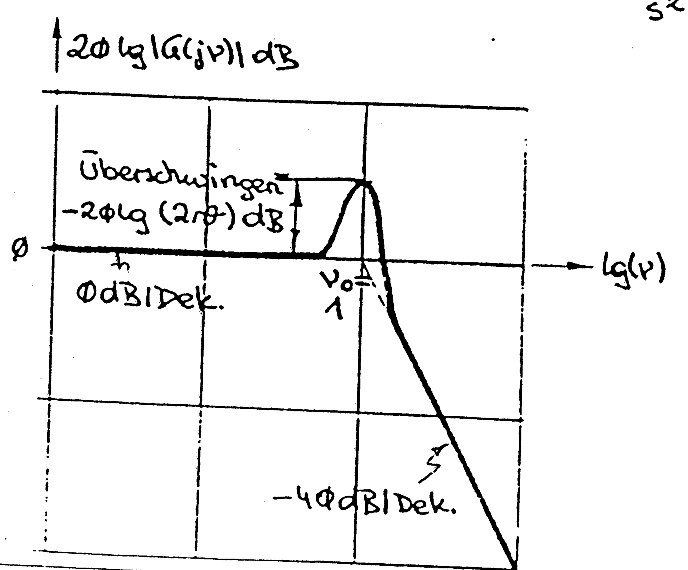


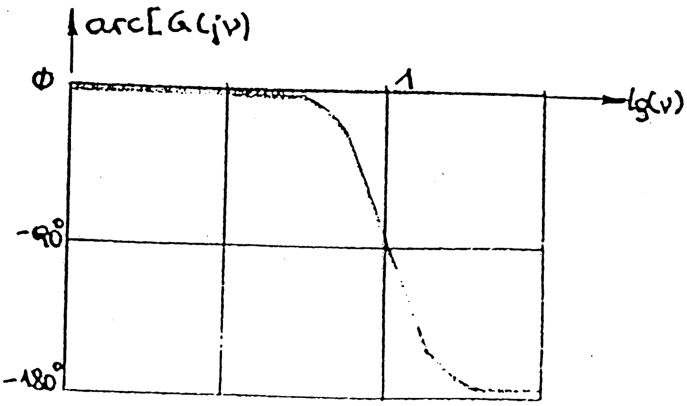
$\mathrm{arc}[G(j\nu)] = -\mathrm{arc}[j\nu - \nu_1] - \mathrm{arc}[j\nu - \nu_2]$

$20\lg|G(j\nu)|\,dB = 20\lg\left|\frac{1}{j\nu-\nu_1}\right|dB + 20\lg\left|\frac{1}{j\nu-\nu_2}\right|dB$

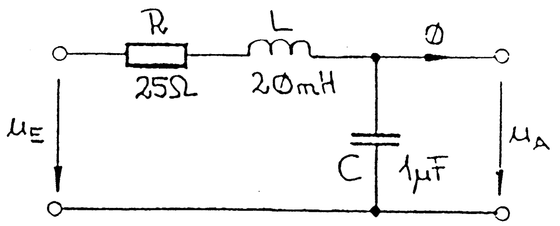
(ii) Die Pole $p_{1,2}$ sind konjugiert komplex, d.h. $\vartheta < 1$.

Übertragungsfunktion: $G(s) = \frac{1}{s^2 + 2\vartheta s + 1} \overset{!}{=} \frac{1}{s^2 + 2\vartheta \nu_0 s + \nu_0^2} \rightarrow \nu_0 = 1$



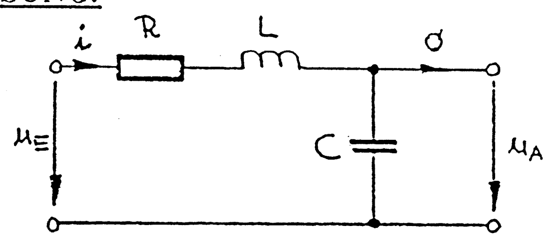


Bode-Diagramm eines RLC-Serienschwingkreises:



Zeichnen Sie für das angegebene Übertragungsglied den Betragsteil des Bode-Diagramms. Verwenden Sie dazu die bezogene Frequenzvariable $\nu = \omega\sqrt{LC}$.

LÖSUNG:



$$u_E = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt \qquad (1)$$

$$i = C\frac{du_A}{dt} \qquad (2)$$

(2) in (1): $$LC\frac{d^2u_A}{dt^2} + RC\frac{du_A}{dt} + u_A = u_E$$

$$\underline{\frac{d^2u_A}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_A}{dt} + \frac{1}{LC}u_A = \frac{u_E}{LC}}$$

<u>Normierung</u>: $u_A = U_B y$, $u_E = U_B u$, $t = T_B\tau$

$$y^{(2)} + \frac{R}{L}T_B y^{(1)} + \frac{T_B^2}{LC}y = \frac{T_B^2}{LC}u$$

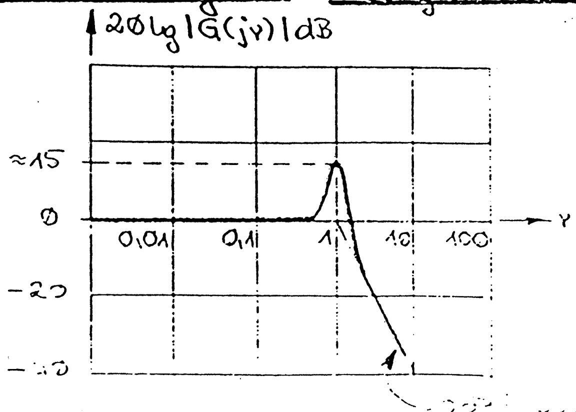
Laut Angabe ist $\nu = \omega\sqrt{LC}$, daraus folgt $T_B^2 = LC$ bzw. $T_B = \sqrt{LC}$.

$$\underline{\underline{y^{(2)} + R\sqrt{\frac{C}{L}}\,y^{(1)} + y = u}}$$

Die Übertragungsfunktion kann direkt aus der System-DGL abgelesen werden zu $\underline{G(s)} = \frac{1}{s^2 + R\sqrt{\frac{C}{L}}s + 1} = \underline{\frac{1}{s^2 + 2\vartheta\nu_0 + \nu_0^2}}$, d.h. $G(j\nu) = \frac{1}{1-\nu^2 + j\nu R\sqrt{\frac{C}{L}}}$.

Mit den angegebenen Bauteilwerten folgt $\nu_0^2 = 1$, $2\vartheta = R\sqrt{\frac{C}{L}} = 0{,}178$.

<u>Überschwingen:</u> $\underline{-20\lg(2\vartheta)\,dB \approx 15{,}051\,dB}$



$$\underline{\underline{|G(j\nu)| = \frac{1}{\sqrt{(1-\nu^2)^2 + \left(\nu R\sqrt{\frac{C}{L}}\right)^2}}}}$$

Butterworth-Tiefpaßfilter n-ten Grades:

Ein Butterworth-Tiefpaßfilter n-ten Grades besitzt den Betragsfrequenzgang

$$|G(j\nu)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\nu/\nu_0)^{2n}}}$$ $\gg 1$ $\ll 1$

(i) Skizzieren Sie die Betragsteile der zugehörigen Bode-Diagramme für $n=1$, $n=2$ und $n \to \infty$.

(ii) Wie groß muß der Filtergrad n mindestens sein, daß das Dämpfungsmaß $-ln|G(j\nu)|$ im Bereich $\nu \leq 0{,}8 \cdot \nu_0$ kleiner als $1\,dB$ ist ? (n ist eine natürliche Zahl !)

LÖSUNG:

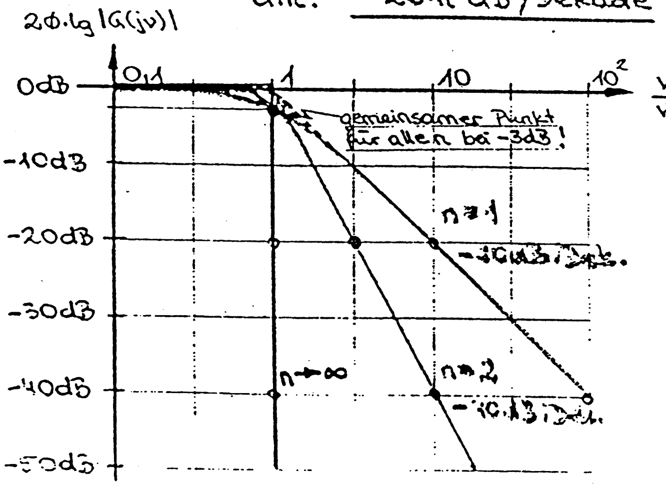
$\boxed{lg 1 = 0}$

(i) $20 \cdot \lg |G(j\nu)| dB = 20 \cdot \lg \left[\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\nu}{\nu_0})^{2n}}} \right] dB = -10 \cdot \lg \left[1 + (\frac{\nu}{\nu_0})^{2n} \right] dB$

$1 \gg (\frac{\nu}{\nu_0})^{2n}$: $20 \cdot \lg |G(j\nu)|\, dB = 0 dB$

$1 \ll (\frac{\nu}{\nu_0})^{2n}$: $20 \cdot \lg |G(j\nu)|\, dB = -10 \cdot \lg [(\frac{\nu}{\nu_0})^{2n}]\, dB = -20 \cdot n \cdot \lg [\frac{\nu}{\nu_0}]\, dB$,

d.h. $-20 \cdot n$ dB/Dekade



$10^{\lg a} = a$

(ii) $-20 \cdot \lg |G(j\nu)| dB = 10 \cdot \lg [1 + (\frac{\nu}{\nu_0})^{2n}]\, dB < 1 dB$

$\lg [1 + (\frac{\nu}{\nu_0})^{2n}] < \frac{1}{10}$

$1 + (\frac{\nu}{\nu_0})^{2n} < 10^{\frac{1}{10}}$, $\frac{\nu}{\nu_0} = 0{,}8 \longrightarrow (0{,}8)^{2n} < 10^{\frac{1}{10}} - 1$

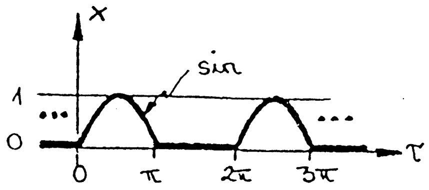
$2n \cdot \lg(0{,}8) < \lg(10^{\frac{1}{10}} - 1)$

$n > \frac{\lg(10^{\frac{1}{10}} - 1)}{2 \cdot \lg(0{,}8)} = \underline{3{,}028}$

$\underline{\underline{n = 4}}$

Vorzeichenwechsel?

Durchschnittswert und Grundschwingung:



Berechnen Sie den Durchschnittswert und die Grundschwingung des angegebenen Signals.

LÖSUNG:

$$x(\tau) = \begin{cases} \sin(\tau) & \text{für } 0<\tau<\pi \\ 0 & \text{für } \pi<\tau<2\pi \end{cases}$$

$$x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\tau}$$

$$x_1(\tau) = c_1 \cdot e^{j\tau}$$

Durchschnittswert:

$$\bar{x} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\left[-\cos(\tau)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}$$

$\sin(\tau)$ //

Grundschwingung:

$$c_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\tau)e^{-j\tau}\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin(\tau)e^{-j\tau}\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{e^{j\tau}-e^{-j\tau}}{j2}e^{-j\tau}\,d\tau$$

$$c_1 = \frac{1}{2\pi j2}\int_0^{\pi} 1-e^{-j2\tau}\,d\tau = \frac{1}{j4\pi}\int_0^{\pi}d\tau - \frac{1}{j4\pi}\int_0^{\pi}e^{-j2\tau}\,d\tau$$

$$c_1 = \frac{1}{j4\pi}\,\tau\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{j4\pi}\,\frac{e^{-j2\tau}}{-j2}\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{j4\pi} + \frac{1-1}{8\pi} = \frac{1}{j4} = -j\frac{1}{4} = \frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

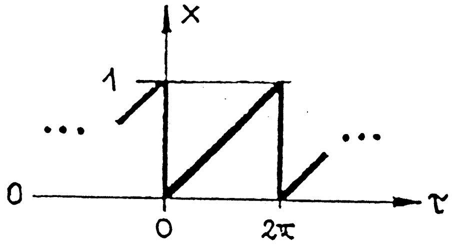
Grundschwingungsamplitude: $|\hat{x}_1| = 2|c_1| = \frac{1}{2}$

Grundschwingungsphase: $\operatorname{arc}[c_1] = -\frac{\pi}{2}$

Grundschwingung: $x(\tau) = \frac{1}{2}\cos(\tau-\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}\sin(\tau)$

$$\hookrightarrow x_1(\tau) = \frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{2}}\,e^{j\tau} = \frac{1}{4}e^{j(\tau-\frac{\pi}{2})}$$

Durchschnittswert und Grundschwingung 2:



Berechnen Sie den Durchschnittswert und die Grundschwingung des angegebenen Signals.

LÖSUNG:

$$x(\tau) = \frac{\tau}{2\pi} \quad \text{für } 0<\tau<2\pi$$

Durchschnittswert:

$$\overline{x} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\tau}{2\pi}\,d\tau = \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{\tau^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}$$

Grundschwingung:

$$c_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\tau)e^{-j\tau}\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\tau}{2\pi}e^{-j\tau}\,d\tau = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\tau e^{-j\tau}\,d\tau$$

$$c_1 = \frac{1}{(2\pi)^2}\left[\tau\frac{e^{-j\tau}}{-j}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{e^{-j\tau}}{-j}\,d\tau\right] = \frac{1}{(2\pi)^2}\left[j2\pi + e^{j2\pi} - e^{j0}\right]$$

$$c_1 = \frac{j}{2\pi}$$

$$\hat{x}_1 = 2 \cdot c_1 = \frac{j}{\pi} = \frac{1}{\pi}\cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Grundschwingungsamplitude: $|\hat{x}_1| = 2|c_1| = \frac{1}{\pi}$

Grundschwingungsphase: $\mathrm{arc}[c_1] = \frac{\pi}{2}$

Grundschwingung: $x(\tau) = \hat{x}_1\cos(\tau + \mathrm{arc}[c_1]) = \frac{1}{\pi}\cos(\tau + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\pi}\sin(\tau)$

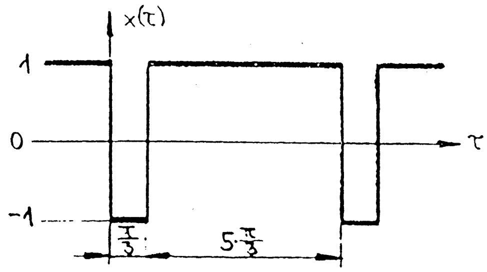
$$c_k = \frac{\hat{x}_k}{2}$$

$$\hat{x}_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(\tau)\cdot e^{-jk\tau}\,d\tau$$

$$x(\tau) = \bar{x} + \sum_{k=1}^{\infty}|\hat{x}_k|\cos(k\tau + \varphi_k)$$

$$\varphi_k = \mathrm{arc}(\hat{x}_k)$$

Durchschnittswert und Grundschwingungseffektivwert:



Berechnen Sie für das dargestellte, 2π-periodische Signal

(*i*) den Durchschnittswert,

(*ii*) den Effektivwertbetrag der Grundschwingung.

$-\tau\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \tau\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} = -\frac{\pi}{3} + 0 + \frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} = \frac{3\pi}{3}$

LÖSUNG:

(i) $\overline{x} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{2\pi}{3}+\frac{5\pi}{3}\right] = \cancel{\frac{2}{3}}\ \frac{1}{2}$

(ii) $c_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\tau)e^{-j\tau}\,d\tau = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{-j\tau}\,d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{2\pi} e^{-j\tau}\,d\tau$

$c_1 = -\frac{1}{2\pi}\frac{e^{-j\tau}}{-j}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2\pi}\frac{e^{-j\tau}}{-j}\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{2\pi} = \frac{1}{j2\pi}\left[e^{-j\frac{\pi}{3}}-1\right] + \frac{1}{j2\pi}\left[e^{-j\frac{\pi}{3}} - e^{-j2\pi}\right]$

$*\quad c_1 = -\frac{1}{j\pi} + \frac{1}{j\pi}e^{-j\frac{\pi}{3}} = j\frac{1}{\pi} - j\frac{1}{\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - j\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$

sparen!

$c_1 = -\frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + j\left[\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$ mit $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ folgt

$c_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2\pi} + j\left[\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2\pi}\right] = \frac{1}{2\pi}\left[-\sqrt{3} + j\right]$

$|\hat{x}_1| = 2|c_1| = \frac{2}{\pi}$

Der Effektivwertbetrag der Grundschwingung beträgt also

$|X_1| = \frac{|\hat{x}_1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}$.

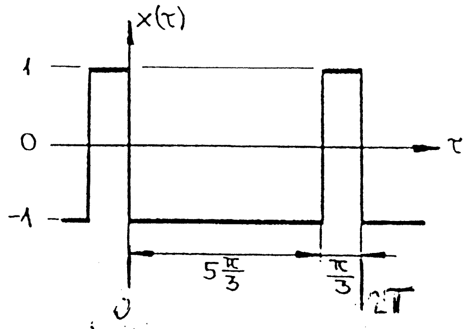
Mit $arc[c_1] = \pi - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{5\pi}{6}$ ergibt sich für die Grundschwingung $x_1(\tau) = \frac{2}{\pi}\cos\left(\tau + \frac{5\pi}{6}\right)$

$*\quad C_1 = 0,381\ e^{j2,617}$

$|\hat{x}_1| = 2\cdot|C_1| = 0,636$

$arc[C_1] = 2,617$

Durchschnittswert und Grundschwingungseffektivwert 2:



Berechnen Sie für das dargestellte, 2π-periodische Signal

(*i*) den Durchschnittswert,

(*ii*) den Effektivwertbetrag der Grundschwingung.

LÖSUNG:

(i) $\overline{x} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right] = -\frac{2}{3}$

(ii) $c_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\tau)e^{-j\tau}\,d\tau = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{5\pi}{3}} e^{-j\tau}\,d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{5\pi}{3}}^{2\pi} e^{-j\tau}\,d\tau$

$$c_1 = -\frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{-j\tau}}{-j}\Bigg|_0^{\frac{5\pi}{3}} + \frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{-j\tau}}{-j}\Bigg|_{\frac{5\pi}{3}}^{2\pi} = \frac{1}{j2\pi}\left[e^{-j\frac{5\pi}{3}}-1\right] + \frac{1}{j2\pi}\left[e^{-j\frac{5\pi}{3}} - e^{-j2\pi}\right]$$

$$c_1 = -\frac{1}{j\pi} + \frac{1}{j\pi}e^{-j\frac{5\pi}{3}} = j\frac{1}{\pi} - j\frac{1}{\pi}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) - j\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right]$$

$c_1 = \frac{-1}{\pi}\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) + j\left[\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi}\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right]$ mit $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ folgt

$$c_1 = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} + j\left[\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2\pi}\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\sqrt{3} + j\right]$$

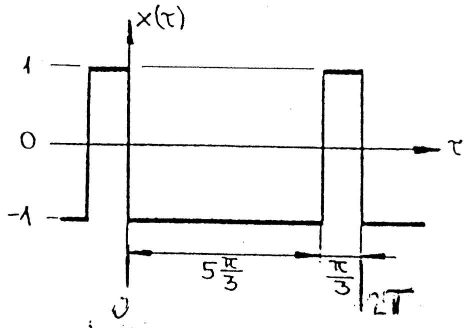
$$|\hat{x}_1| = 2|c_1| = \frac{2}{\pi}$$

Der Effektivwertbetrag der Grundschwingung beträgt also

$$|X_1| = \frac{|\hat{x}_1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}.$$

Mit $\operatorname{arc}[c_1] = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$ ergibt sich für die Grund=schwingung $x_1(\tau) = \frac{2}{\pi}\cos\left(\tau + \frac{\pi}{6}\right)$.

Durchschnittswert und Grundschwingungseffektivwert 2:



Berechnen Sie für das dargestellte, 2π-periodische Signal

(*i*) den Durchschnittswert,

(*ii*) den Effektivwertbetrag der Grundschwingung.

LÖSUNG:

(i) $\overline{x} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right] = -\frac{2}{3}$

(ii) $c_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\tau)e^{-j\tau}\,d\tau = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{5\pi}{3}} e^{-j\tau}\,d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{5\pi}{3}}^{2\pi} e^{-j\tau}\,d\tau$

$$c_1 = -\frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{-j\tau}}{-j}\right|_0^{\frac{5\pi}{3}} + \frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{-j\tau}}{-j}\right|_{\frac{5\pi}{3}}^{2\pi} = \frac{1}{j2\pi}\left[e^{-j\frac{5\pi}{3}}-1\right] + \frac{1}{j2\pi}\left[e^{-j\frac{5\pi}{3}} - e^{-j2\pi}\right]$$

$$c_1 = -\frac{1}{j\pi} + \frac{1}{j\pi}e^{-j\frac{5\pi}{3}} = j\frac{1}{\pi} - j\frac{1}{\pi}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) - j\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right]$$

$c_1 = \frac{-1}{\pi}\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) + j\left[\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi}\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right]$ mit $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ folgt

$$c_1 = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} + j\left[\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2\pi}\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\sqrt{3} + j\right]$$

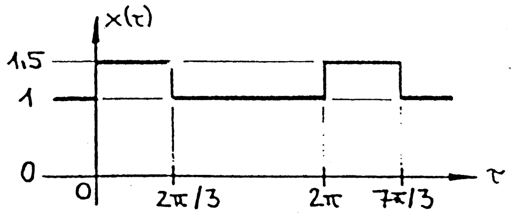
$$|\hat{x}_1| = 2|c_1| = \frac{2}{\pi}$$

Der Effektivwertbetrag der Grundschwingung beträgt also

$$|X_1| = \frac{|\hat{x}_1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}.$$

Mit $\mathrm{arc}[c_1] = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$ ergibt sich für die Grundschwingung $x_1(\tau) = \frac{2}{\pi}\cos\left(\tau + \frac{\pi}{6}\right)$.

Durchschnittswert und Grundschwingungseffektivwert 3:



Berechnen Sie für das dargestellte, 2π-periodische Signal
(*i*) den Durchschnittswert,
(*ii*) den Effektivwertbetrag der Grundschwingung.

LÖSUNG:

(i) $$\bar{x} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{3}{2}\,\frac{2\pi}{3} + \left(2\pi - \frac{2\pi}{3}\right)1\right] = \frac{1}{2\pi}\,\frac{7\pi}{3} = \frac{7}{6}$$

(ii) $$c_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\tau)e^{-j\tau}\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{3}{2}e^{-j\tau}\,d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{2\pi} e^{-j\tau}\,d\tau$$

$$c_1 = \frac{3}{4\pi}\,\frac{e^{-j\tau}}{-j}\Bigg|_0^{\frac{2\pi}{3}} + \frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{-j\tau}}{-j}\Bigg|_{\frac{2\pi}{3}}^{2\pi} = \frac{3}{j4\pi}\left[1-e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right] + \frac{1}{j2\pi}\left[e^{-j\frac{2\pi}{3}} - e^{-j2\pi}\right]$$

$$c_1 = \frac{1}{j2\pi}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right] = \frac{1}{j4\pi}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + j\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

mit $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ und $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ folgt

$$c_1 = \frac{1}{j4\pi}\left[1 + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = -j\frac{1}{8\pi}\left[3 + j\sqrt{3}\right] = \frac{1}{8\pi}\left[\sqrt{3} - j3\right]$$

$$|\hat{x}_1| = 2|c_1| = \frac{\sqrt{12}}{4\pi} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$$

Der Effektivwertbetrag der Grundschwingung beträgt also

$$|X_1| = \frac{|\hat{x}_1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{2\pi}$$

Mit $\mathrm{arc}[c_1] = -\arctan(\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$ ergibt sich für die Grund=schwingung $x_1(\tau) = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{2\pi}\cos\left(\tau - \frac{\pi}{3}\right)$.

Faltungsprodukt:

Berechnen Sie das Faltungsprodukt $x(\tau) = e^{a\tau}\,\varepsilon(\tau) * e^{a\tau}\,\varepsilon(\tau) * e^{a\tau}\,\varepsilon(\tau)$.

$\frac{1}{(s-a)^3}$

LÖSUNG:

$$x(\tau) = e^{a\tau}\varepsilon(\tau) * e^{a\tau}\varepsilon(\tau) * e^{a\tau}\varepsilon(\tau)$$

Auf Grund des Assoziativgesetzes der Faltung ist es völlig egal in welcher Reihenfolge die Faltungsoperation ausgeführt wird.

$$x_1(\tau) = e^{a\tau}\varepsilon(\tau) * e^{a\tau}\varepsilon(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{a(\tau-\tau')}\varepsilon(\tau-\tau')\, e^{a\tau'}\varepsilon(\tau')\,d\tau' = \int_0^\tau e^{a\tau}\cdot e^{-a\tau'}\cdot e^{a\tau'}\,d\tau'\cdot\varepsilon(\tau)$$

$$x_1(\tau) = e^{a\tau}\varepsilon(\tau)\int_0^\tau d\tau' = \tau e^{a\tau}\varepsilon(\tau),$$

$$x(\tau) = x_1(\tau) * e^{a\tau}\varepsilon(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}(\tau-\tau')e^{a(\tau-\tau')}\varepsilon(\tau-\tau')\, e^{a\tau'}\varepsilon(\tau')\,d\tau'$$

$$x(\tau) = e^{a\tau}\varepsilon(\tau)\int_0^\tau(\tau-\tau')\,d\tau' = e^{a\tau}\varepsilon(\tau)\left[\tau\tau' - \frac{\tau'^2}{2}\right]\Big|_0^\tau = \frac{\tau^2}{2}e^{a\tau}\varepsilon(\tau)$$

Das Endergebnis lautet also

$$\underline{\underline{x(\tau) = e^{a\tau}\varepsilon(\tau) * e^{a\tau}\varepsilon(\tau) * e^{a\tau}\varepsilon(\tau) = \frac{\tau^2}{2}e^{a\tau}\varepsilon(\tau)}}.$$

$\cancel{\frac{1}{(s-a)}}^3$

$p_1 = p_0 = a$

$R(s) = \frac{r_1}{s-p_1} + \frac{r_2}{s-p_1}\,\frac{r_3}{s-p_1}$

$r_3 = (s-p_1)^3 R(s)\big|_{s=a} = 1$

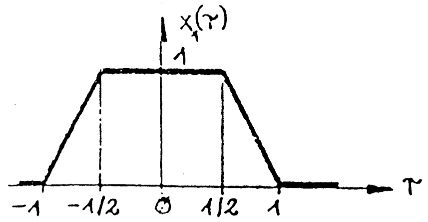
$r_2 = \frac{1}{1!}\frac{d}{ds}\left[(s-p_1)^3 R(s)\right]_{s=a} = 0$

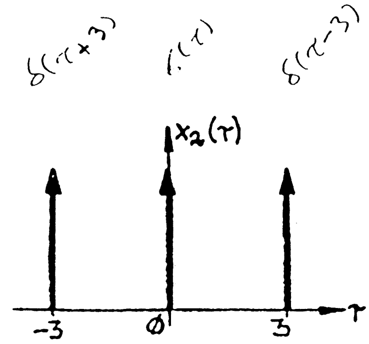
$r_3 = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}(s-p_1)^3 R(s)\big]_s = 0$

$R(s) = \frac{1}{s-a}$

2τ+2

Faltungsprodukt 2:





Berechnen Sie das Faltungsprodukt $x(\tau) = x_1(\tau) * x_2(\tau)$.

LÖSUNG:

Aus den beiden gegebenen Signalen folgt

$$x_1(\tau) = 2(\tau+1)\,\varepsilon(\tau+1) - 2(\tau+\tfrac{1}{2})\,\varepsilon(\tau+\tfrac{1}{2}) - 2(\tau-\tfrac{1}{2})\,\varepsilon(\tau-\tfrac{1}{2}) + 2(\tau-1)\,\varepsilon(\tau-1)$$

und

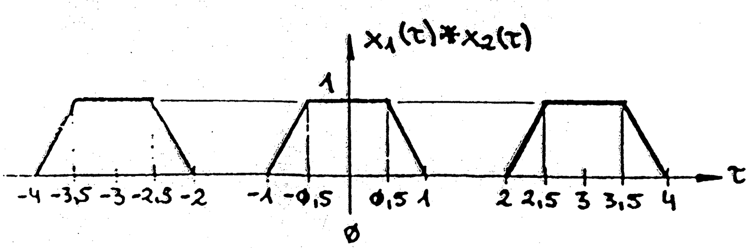
$$x_2(\tau) = \delta(\tau+3) + \delta(\tau) + \delta(\tau-3)\,.$$

Eingesetzt ins Faltungsintegral $x_1(\tau) * x_2(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau-\tau')\,x_2(\tau')\,d\tau'$ liefert

$$\begin{aligned} x_1(\tau)*x_2(\tau) = &\int_{-\infty}^{\infty} \left[2(\tau-\tau'+1)\varepsilon(\tau-\tau'+1) - 2(\tau-\tau'+\tfrac{1}{2})\varepsilon(\tau-\tau'+\tfrac{1}{2}) - 2(\tau-\tau'-\tfrac{1}{2})\varepsilon(\tau-\tau'-\tfrac{1}{2}) + 2(\tau-\tau'-1)\varepsilon(\tau-\tau'-1)\right]\delta(\tau'+3)\,d\tau' \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \left[2(\tau-\tau'+1)\varepsilon(\tau-\tau'+1) - 2(\tau-\tau'+\tfrac{1}{2})\varepsilon(\tau-\tau'+\tfrac{1}{2}) - 2(\tau-\tau'-\tfrac{1}{2})\varepsilon(\tau-\tau'-\tfrac{1}{2}) + 2(\tau-\tau'-1)\varepsilon(\tau-\tau'-1)\right]\delta(\tau')\,d\tau' \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \left[2(\tau-\tau'+1)\varepsilon(\tau-\tau'+1) - 2(\tau-\tau'+\tfrac{1}{2})\varepsilon(\tau-\tau'+\tfrac{1}{2}) - 2(\tau-\tau'-\tfrac{1}{2})\varepsilon(\tau-\tau'-\tfrac{1}{2}) + 2(\tau-\tau'-1)\varepsilon(\tau-\tau'-1)\right]\delta(\tau'-3)\,d\tau' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1(\tau)*x_2(\tau) = &\,2(\tau+3+1)\varepsilon(\tau+3+1) - 2(\tau+3+\tfrac{1}{2})\varepsilon(\tau+3+\tfrac{1}{2}) - 2(\tau+3-\tfrac{1}{2})\varepsilon(\tau+3-\tfrac{1}{2}) + 2(\tau+3-1)\varepsilon(\tau+3-1) \\ &+ 2(\tau+1)\varepsilon(\tau+1) - 2(\tau+\tfrac{1}{2})\varepsilon(\tau+\tfrac{1}{2}) - 2(\tau-\tfrac{1}{2})\varepsilon(\tau-\tfrac{1}{2}) + 2(\tau-1)\varepsilon(\tau-1) \\ &+ 2(\tau-3+1)\varepsilon(\tau-3+1) - 2(\tau-3+\tfrac{1}{2})\varepsilon(\tau-3+\tfrac{1}{2}) - 2(\tau-3-\tfrac{1}{2})\varepsilon(\tau-3-\tfrac{1}{2}) + 2(\tau-3-1)\varepsilon(\tau-3-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{x_1(\tau)*x_2(\tau)}} = &\,\underline{\underline{2(\tau+4)\varepsilon(\tau+4) - 2(\tau+3{,}5)\varepsilon(\tau+3{,}5) - 2(\tau+2{,}5)\varepsilon(\tau+2{,}5) + 2(\tau+2)\varepsilon(\tau+2)}} \\ &\underline{\underline{+ 2(\tau+1)\varepsilon(\tau+1) - 2(\tau+\tfrac{1}{2})\varepsilon(\tau+\tfrac{1}{2}) - 2(\tau-\tfrac{1}{2})\varepsilon(\tau-\tfrac{1}{2}) + 2(\tau-1)\varepsilon(\tau-1)}} \\ &\underline{\underline{+ 2(\tau-2)\varepsilon(\tau-2) - 2(\tau-2{,}5)\varepsilon(\tau-2{,}5) - 2(\tau-3{,}5)\varepsilon(\tau-3{,}5) + 2(\tau-4)\varepsilon(\tau-4)}} \end{aligned}$$



Faltungsprodukt 3:

Berechnen Sie die Spektralfunktion des Faltungsprodukts $x(\tau)=\left[e^{-\tau}\,\varepsilon(\tau)\right]*\left[\varepsilon(\tau)-\varepsilon(\tau-1)\right]$.

LÖSUNG:

$$x(\tau)=[e^{-\tau}\varepsilon(\tau)]*[\varepsilon(\tau)-\varepsilon(\tau-1)]=[e^{-\tau}\varepsilon(\tau)]*[\mathrm{rect}(\tau-\tfrac{1}{2})]$$

Für die Spektralfunktion

$$\mathcal{F}\{x(\tau)\}=\mathcal{F}\{e^{-\tau}\varepsilon(\tau)\}\,\mathcal{F}\{\mathrm{rect}(\tau-\tfrac{1}{2})\}$$

folgt mit Hilfe von Tab. 3.1

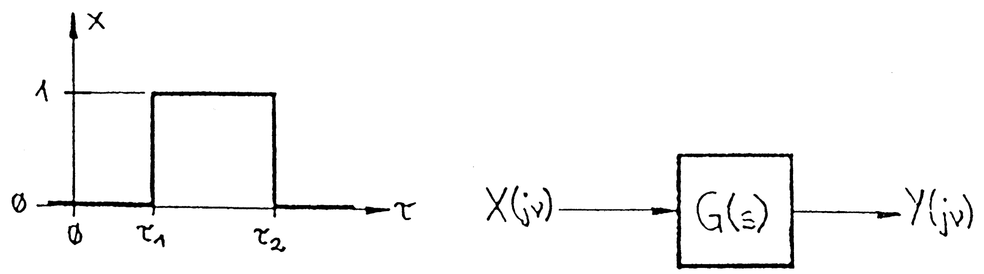
Zeile 4: $\mathrm{rect}(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathrm{si}(\nu/2)$ $\qquad \mathrm{rec}(\tau-\tau_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\ e^{-j\nu\tau_0}\,\mathrm{si}(\frac{\nu}{2})$

Zeile 6: $e^{-a\tau}\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \dfrac{1}{j\nu+a}$

und dem Zeitverschiebungssatz $x(\tau-\tau_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\ e^{-j\nu\tau_0}X(j\nu)$:

$$\mathcal{F}\{x(\tau)\}=\frac{\mathrm{si}(\nu/2)}{j\nu+1}\,e^{-j\nu/2}$$

Filter:



Am Eingang des Filters mit der bekannten Übertragungsfunktion $G(s)$ liegt das angegebene Signal $x(\tau)$. Geben Sie die Spektralfunktion $Y(j\nu)$ des Ausgangssignals an.

LÖSUNG:

Die Fourier-Transformierte $X(j\nu)$ des Eingangssignals erhält man durch einsetzen von $x(\tau)=1$ für $\tau_1<\tau<\tau_2$ ins Transformationsintegral zu

$$\underline{X(j\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)e^{-j\nu\tau}\,d\tau} = \int_{\tau_1}^{\tau_2}e^{-j\nu\tau}\,d\tau = \left.\frac{e^{-j\nu\tau}}{-j\nu}\right|_{\tau_1}^{\tau_2} = \underline{\frac{e^{-j\nu\tau_1}-e^{-j\nu\tau_2}}{j\nu}}\,.$$

Der Frequenzgang $G(j\nu)$ ergibt sich aus der Übertragungsfunktion $G(s)$ durch ersetzen von s durch $j\nu$.

Die Spektralfunktion des Ausgangssignals lautet schließlich

$$\underline{\underline{Y(j\nu)=G(j\nu)\,X(j\nu)=G(j\nu)\frac{e^{-j\nu\tau_1}-e^{-j\nu\tau_2}}{j\nu}}}\,.$$

Fourier-Reihe:

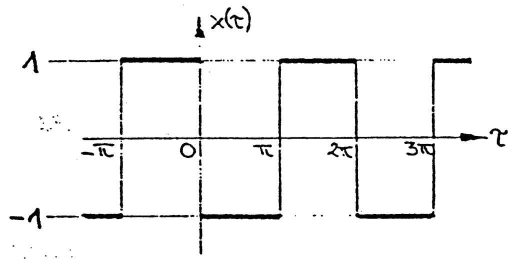
Berechnen Sie die Fourier-Reihe des Signals

$$x(\tau) = 1 - 2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\varepsilon(\tau - 2n\pi) - \varepsilon(\tau - (2n+1)\cdot\pi)\right]$$

$$[\varepsilon(\tau - 2\pi n) - \varepsilon(\tau - \pi + 2\pi n)]$$

LÖSUNG:

Skizze von $x(\tau)$:



Bei $x(\tau)$ handelt es sich um eine 2π-periodische Rechteckschwingung. (Fundamentalperiodendauer $= 2\pi$)

Die Fourier-Koeffizienten werden über

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\tau) e^{-jk\tau} d\tau$$ errechnet.

Einsetzen und Integration über eine Periode liefert

$$c_k = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-jk\tau} d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} e^{-jk\tau} d\tau = -\frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{-jk\tau}}{-jk}\right|_0^{\pi} + \frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{-jk\tau}}{-jk}\right|_{\pi}^{2\pi}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-1+e^{-jk\pi}}{jk}\right] + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-jk\pi} - e^{-jk2\pi}}{jk}\right] = \frac{1}{j2\pi k}\left[2e^{-jk\pi} - 1 - e^{-jk2\pi}\right]$$

$$c_k = \frac{1}{j\pi k}\left[(-1)^k - 1\right]$$

$e^{-jk\tau}$

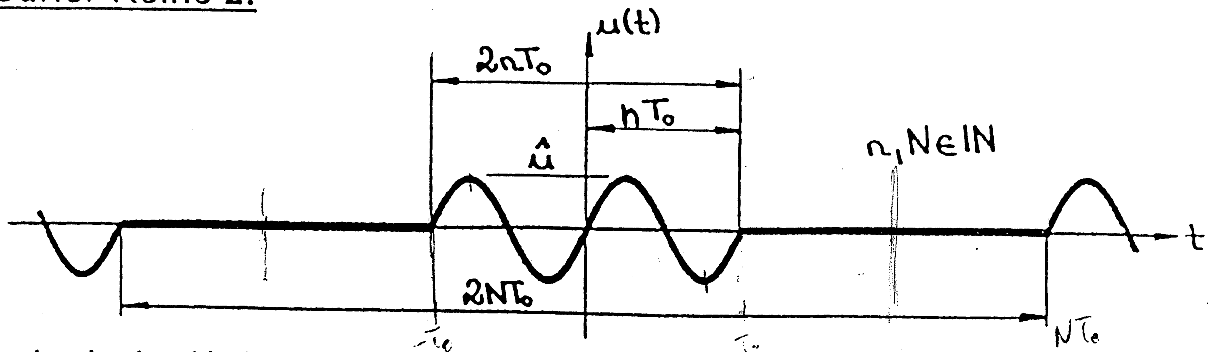
$$c_k = \begin{cases} 0 & \text{für } k = 0, \pm 2, \pm 4, \dots \\ -\frac{2}{j\pi k} & \text{für } k = \pm 1, \pm 3, \dots \end{cases} \qquad \left(c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\tau)\, d\tau = 0\right)$$

Die Fourier-Reihe lautet somit

$$x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\tau} = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{j\pi k}\left[(-1)^k - 1\right] e^{jk\tau} = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k=\text{ungerade}}}^{\infty} -\frac{2}{j\pi k} e^{jk\tau}.$$

Periode

Fourier-Reihe 2:



Gegeben ist das skizzierte, periodische Signal $u(t)$. Berechnen Sie seine Fourier-Reihe.

LÖSUNG:

Die Fourier-Koeffizienten eines T_1-periodischen, nicht bezogenen Signals werden ~~i.a.~~ über

$$C_k=\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1}u(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T_1}t}dt=\frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2}u(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T_1}t}dt \qquad (1)$$

berechnet. fehlt

$$u(t)=\hat{u}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)=\hat{u}\,\frac{e^{j\frac{2\pi}{T_0}t}-e^{-j\frac{2\pi}{T_0}t}}{j2} \quad \text{für } -nT_0\leq t\leq nT_0 \qquad (2)$$

Fundamentalperiodendauer von $u(t)$: $T_1=(n+N)T_0$ (3)

Einsetzen von (2) und (3) in (1) ergibt

Grenzen

$$C_k=\frac{1}{(n+N)T_0}\int_{-\frac{n+N}{2}T_0}^{\frac{n+N}{2}T_0}\frac{\hat{u}}{j2}\left[e^{j\frac{2\pi}{T_0}\left(1-\frac{k}{n+N}\right)t}-e^{-j\frac{2\pi}{T_0}\left(1+\frac{k}{n+N}\right)t}\right]dt \qquad (4)$$

falsch

$$C_k=\frac{\hat{u}}{j2(n+N)\cancel{T_0}}\left[\frac{e^{j\frac{2\pi}{T_0}\left(1-\frac{k}{n+N}\right)t}}{j\frac{2\pi}{\cancel{T_0}}\left(1-\frac{k}{n+N}\right)}\Bigg|_{-\frac{n+N}{2}T_0}^{\frac{n+N}{2}T_0}-\frac{e^{-j\frac{2\pi}{T_0}\left(1+\frac{k}{n+N}\right)t}}{-j\frac{2\pi}{\cancel{T_0}}\left(1+\frac{k}{n+N}\right)}\Bigg|_{-\frac{n+N}{2}T_0}^{\frac{n+N}{2}T_0}\right]$$

$$C_k=\frac{\hat{u}}{j2(n+N)}\left[\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{\cancel{T_0}}\left(1-\frac{k}{n+N}\right)\frac{n+N}{\cancel{2}}\cancel{T_0}\right)}{\pi\left(1-\frac{k}{n+N}\right)}-\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{\cancel{T_0}}\left(1+\frac{k}{n+N}\right)\frac{n+N}{\cancel{2}}\cancel{T_0}\right)}{\pi\left(1+\frac{k}{n+N}\right)}\right]$$

$$C_k=\frac{\hat{u}}{j2\cancel{(n+N)}}\left[\frac{\sin(\pi(n+N-k))}{\pi\left(\frac{n+N-k}{\cancel{n+N}}\right)}-\frac{\sin(\pi(n+N+k))}{\pi\left(\frac{n+N+k}{\cancel{n+N}}\right)}\right]$$

stuhl

$$C_k=\frac{\hat{u}}{j2}\left[\frac{\sin(\pi(n+N-k))}{\pi(n+N-k)}-\frac{\sin(\pi(n+N+k))}{\pi(n+N+k)}\right] \qquad (5)$$

Die Fourier-Koeffizienten lauten somit

$$C_k=\frac{\hat{u}}{j2}\left[si(\pi(n+N-k))-si(\pi(n+N+k))\right]. \qquad (6)$$

Fourier-Reihe 3:

Ein lineares, zeitinvariantes System besitzt die Stoßantwort

$$g(\tau)=\frac{\tau}{\tau_1}e^{-\tau/\tau_1}\,\varepsilon(\tau)\ .$$

Am Eingang liegt die 2π-periodische Stoßfolge

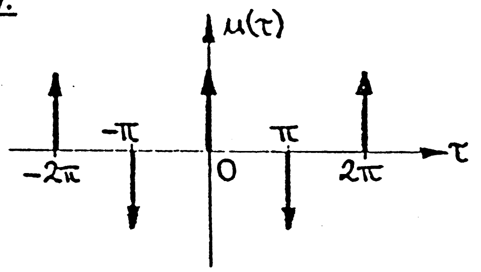
$$u(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\,\delta(\tau-n\pi)\ .$$

Geben Sie die komplexe Fourier-Reihe der Ausgangsfunktion an.

$$\boxed{C_{yk}=G(j\nu)\cdot C_{uk}}$$

$$\boxed{y(\tau)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_{yk}\cdot e^{jk\tau}}$$

LÖSUNG:



$$u(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\,\delta(\tau-n\pi)$$

$u(\tau)$ ist 2π-periodisch!

Die Koeffizienten der Fourier-Reihe des Eingangs ergeben aus

$$c_{uk}=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}u(\tau)e^{-jk\tau}d\tau=\frac{1}{2\pi}\int_{0^-}^{2\pi^-}[\,\delta(\tau)-\delta(\tau-\pi)\,]\,e^{-jk\tau}d\tau$$

$$c_{uk}=\frac{1}{2\pi}\left[1-e^{-jk\pi}\right]=\frac{1}{2\pi}\left[1-(-1)^k\right]=\begin{cases}\frac{1}{\pi} & \text{für } k=\pm1,\pm3,\dots\\ 0 & \text{für } k=0,\pm2,\dots\end{cases}$$

Die Fourier-Transformierte von $g(\tau)=\frac{\tau}{\tau_1}e^{-\frac{\tau}{\tau_1}}\varepsilon(\tau)$ folgt mit Hilfe von Tab. 3.1 Zeile 7: $\tau e^{-a\tau}\varepsilon(\tau)\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{(j\nu+a)^2}$ zu

$$G(j\nu)=\frac{1}{\tau_1}\,\frac{1}{\left(j\nu+\frac{1}{\tau_1}\right)^2}\ .$$

Die komplexe Fourier-Reihe der Ausgangsfunktion lautet mit

$$\boxed{c_{yk}=G(jk)\,c_{uk}}=\frac{1}{\tau_1}\,\frac{1}{\left(jk+\frac{1}{\tau_1}\right)^2}\,\frac{1}{2\pi}\left[1-(-1)^k\right]$$

somit

$$y(\tau)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_{yk}e^{jk\tau}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\tau_1}\,\frac{1-(-1)^k}{\left(jk+\frac{1}{\tau_1}\right)^2}\,e^{jk\tau}=\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi\tau_1}\,\frac{e^{jk\tau}}{\left(jk+\frac{1}{\tau_1}\right)^2}}_{k=\text{ungerade}}\ .$$

Fourier-Reihe in reeller Darstellung:

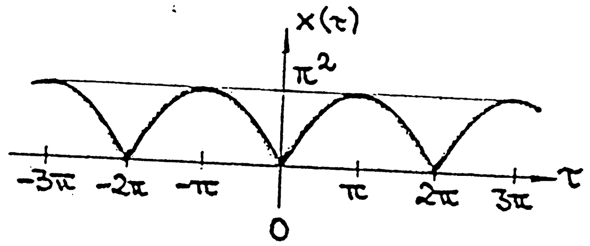
Geben Sie für das 2π-periodische Signal

$$x(\tau) = \tau(2\pi - \tau)\ ,\ 0 < \tau < 2\pi$$

ist nicht $x(\tau) = 2\pi\tau - \tau^2$ gerade Funktion

die Fourier-Reihe in reeller Darstellung an.

LÖSUNG:



x(τ) ist eine gerade Funktion!

Reelle Darstellung der Fourier-Entwicklung:

$$\bar{x} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[2\pi\tau-\tau^2]\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\left[\pi\tau^2-\frac{\tau^3}{3}\right]\Big|_0^{2\pi}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{2\pi}\left[4\pi^3-\frac{8\pi^3}{3}\right] = \frac{2}{3}\pi^2$$

wegen reeller Darstellung!

$$\hat{x}_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(\tau)\cos(k\tau)\,d\tau = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 2\pi\tau\cos(k\tau)\,d\tau - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\tau^2\cos(k\tau)\,d\tau$$

$$\hat{x}_k = 2\left[\tau\frac{\sin(k\tau)}{k}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{\sin(k\tau)}{k}\,d\tau\right] - \frac{1}{\pi}\left[\tau^2\frac{\sin(k\tau)}{k}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}2\tau\frac{\sin(k\tau)}{k}\,d\tau\right]$$

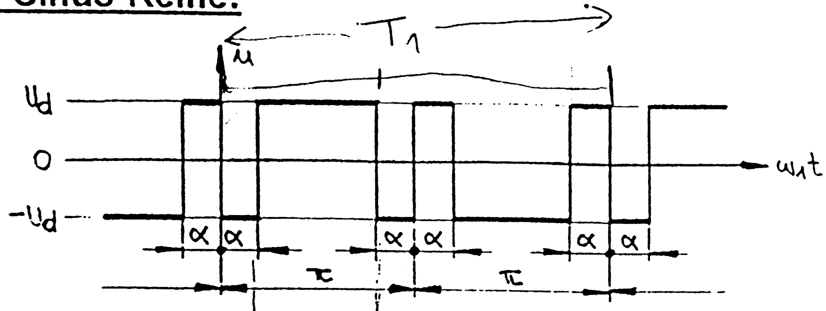
$$\hat{x}_k = 2\left[0-0+\frac{\cos(k\tau)}{k^2}\Big|_0^{2\pi}\right] - \frac{1}{\pi}\left[4\pi^2\frac{\sin(2\pi k)}{k} + \left[2\tau\frac{\cos(k\tau)}{k^2}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}2\frac{\cos(k\tau)}{k^2}\,d\tau\right]\right]$$

$$\underline{\hat{x}_k} = -\frac{1}{\pi}\left[4\pi\frac{\cos(2\pi k)}{k^2} - 2\frac{\sin(2\pi k)}{k^3}\Big|_0^{2\pi}\right] = \underline{-\frac{4}{k^2}}\ ,\quad k>0.$$

Die Fourier-Reihe in reeller Darstellung lautet somit

$$x(\tau) = \bar{x} + \sum_{k=1}^{\infty}|\hat{x}_k|\cos(k\tau+\varphi_k) = \frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{4}{k^2}\cos(k\tau)\ .$$

Fourier-Sinus-Reihe:



Gegeben ist die skizzierte, periodisch pulsierende Spannung.

(*i*) Geben Sie die zugehörige Fourier-Reihe in der Form

$$u(t)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(k \cdot \omega_1 \cdot t)$$

an.

(*ii*) Skizzieren Sie den Verlauf der Amplituden der Grundschwingung und der ersten nicht-verschwindenden Oberschwingung in Abhängigkeit von α.

LÖSUNG:

Rechnen in nichtbezogener Form: $u(t)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_1 t)$

(i) Da $u(t)$ eine ungerade Funktion darstellt werden die Fourier-Koeffizienten über

$$b_k=\frac{2}{T_1}\int_0^{T_1} u(t)\sin(k\omega_1 t)\,dt$$

berechnet, wobei T_1 die Fundamentalperiodendauer darstellt.

Durch einsetzen von $T_1=\frac{2\pi}{\omega_1}$, $t_{x1}=\frac{\alpha}{\omega_1}$ und $t_{x2}=\frac{\pi-\alpha}{\omega_1}$

folgt

$$b_k=\frac{2\omega_1}{\pi}\int_0^{t_{x1}} -U_d\sin(k\omega_1 t)\,dt+\frac{2\omega_1}{\pi}\int_{t_{x1}}^{t_{x2}} U_d\sin(k\omega_1 t)\,dt+\frac{2\omega_1}{\pi}\int_{t_{x2}}^{T_1} -U_d\sin(k\omega_1 t)\,dt$$

$$b_k=-U_d\frac{2\omega_1}{\pi}\int_0^{\frac{\alpha}{\omega_1}}\sin(k\omega_1 t)\,dt+U_d\frac{2\omega_1}{\pi}\int_{\frac{\alpha}{\omega_1}}^{\frac{\pi-\alpha}{\omega_1}}\sin(k\omega_1 t)\,dt-U_d\frac{2\omega_1}{\pi}\int_{\frac{\pi-\alpha}{\omega_1}}^{\frac{\pi}{\omega_1}}\sin(k\omega_1 t)\,dt$$

$$b_k=-U_d\frac{2\omega_1}{\pi}\frac{-\cos(k\omega_1 t)}{k\omega_1}\Bigg|_0^{\frac{\alpha}{\omega_1}}+U_d\frac{2\omega_1}{\pi}\frac{-\cos(k\omega_1 t)}{k\omega_1}\Bigg|_{\frac{\alpha}{\omega_1}}^{\frac{\pi-\alpha}{\omega_1}}-U_d\frac{2\omega_1}{\pi}\frac{-\cos(k\omega_1 t)}{k\omega_1}\Bigg|_{\frac{\pi-\alpha}{\omega_1}}^{\frac{\pi}{\omega_1}}$$

$$b_k=\frac{2U_d}{k\pi}\left[\cos(k\alpha)-1+\cos(k\alpha)-\cos(k[\pi-\alpha])+\cos(k\pi)-\cos(k[\pi-\alpha])\right]$$

$$b_k = \frac{2U_d}{k\pi}\left[2\cos(k\alpha) - 2\cos(k[\pi-\alpha]) - 1 + (-1)^k\right]$$

$$\underline{\underline{b_k = \frac{2U_d}{k\pi}\left[2[1-(-1)^k]\cos(k\alpha) - 1 + (-1)^k\right]}}$$

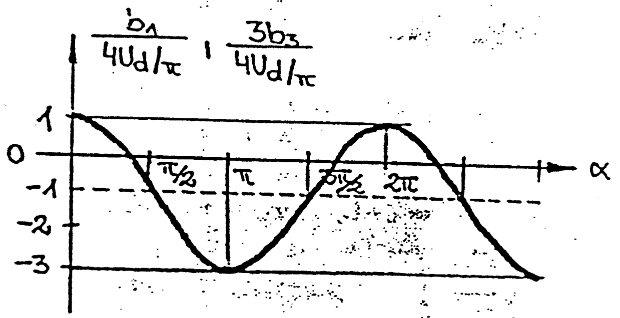
Speziell folgt für

$\underline{k=1:}$ $\quad \underline{b_1 = \frac{4U_d}{\pi}\left[2\cos(\alpha) - 1\right]}$

$k=2:$ $\quad b_2 = 0$

$\underline{k=3:}$ $\quad \underline{b_3 = \frac{4U_d}{3\pi}\left[2\cos(3\alpha) - 1\right]}$

(ii)



Fourier-Reihen-Identität:

Die Fourier-Koeffizienten c_k eines 2π-periodischen Signals $x(\tau)$ seien bekannt. Leiten Sie die Beziehung ab zwischen den Koeffizienten c_{0k} des zeitverschobenen Signals $x(\tau-\tau_0)$ und den c_k.

LÖSUNG:

Ausgehend von den Fourier-Koeffizienten des Ausgangssignals

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\tau)\, e^{-jk\tau}\, d\tau \qquad (1)$$

und des τ_0-zeitverschobenen Signals

$$c_{0k} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\tau-\tau_0)\, e^{-jk\tau}\, d\tau \qquad (2)$$

erhalten wir mit der Substitution $\tau' = \tau - \tau_0$ in Gl. (2)

$$c_{0k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\tau_0}^{2\pi-\tau_0} x(\tau')\, e^{-jk(\tau'+\tau_0)}\, d\tau' = \frac{e^{-jk\tau_0}}{2\pi}\int_{-\tau_0}^{2\pi-\tau_0} x(\tau')\, e^{-jk\tau'}\, d\tau'$$

$$c_{0k} = \frac{e^{-jk\tau_0}}{2\pi}\left[\int_{-\tau_0}^{0} x(\tau')\, e^{-jk\tau'}\, d\tau' + \int_0^{2\pi} x(\tau')\, e^{-jk\tau'}\, d\tau' - \int_{2\pi-\tau_0}^{2\pi} x(\tau')\, e^{-jk\tau'}\, d\tau'\right]$$

wegen der Periodizität von $x(\tau) = x(\tau+2\pi)$ liefern das erste und das letzte Integral den gleichen Wert.

$$c_{0k} = \frac{e^{-jk\tau_0}}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\tau')\, e^{-jk\tau'}\, d\tau' \qquad (3)$$

Ersetzt man in Gl. (3) τ' durch τ, so liefert ein Koeffizienten=vergleich mit Gl. (1) den Zeitverschiebungssatz für Fourier-Reihen

$$c_{0k} = e^{-jk\tau_0}\, c_k \, .$$

oder.

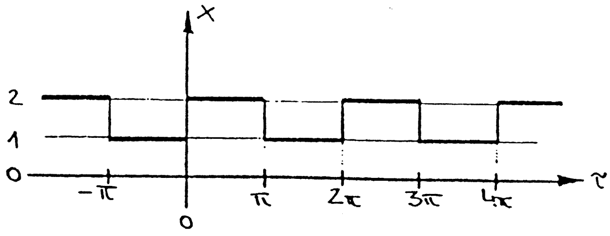
$$X(j\nu) \longrightarrow \boxed{G(j\nu)} \longrightarrow Y(j\nu)$$

$$y(\tau) = x(\tau-\tau_0) \Rightarrow Y(j\nu) = e^{-j\nu\tau_0} \cdot X(j\nu)$$

$$G(j\nu) = \frac{Y(j\nu)}{X(j\nu)} = e^{-j\nu\tau_0}$$

$$\boxed{\begin{aligned} c_{ky} &= G(j\nu) \cdot c_{ku} \\ c_{k0} &= e^{-j\nu\tau_0} \cdot c_k \end{aligned}}$$

Komplexe Fourier-Reihe:



Gesucht ist die komplexe Fourier-Reihe des dargestellten Signals.

LÖSUNG:

Die Fourier-Koeffizienten c_k werden aus ihrem Definitions-integral berechnet.

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\tau)e^{-jk\tau}d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 2e^{-jk\tau}d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} e^{-jk\tau}d\tau$$

$$c_k = \frac{2}{2\pi}\frac{e^{-jk\tau}}{-jk}\Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{2\pi}\frac{e^{-jk\tau}}{-jk}\Bigg|_{\pi}^{2\pi} = \frac{1}{j2\pi k}\left[2-2(-1)^k+(-1)^k-1\right]$$

$$\underline{c_k = \frac{1-(-1)^k}{j2\pi k}} = \begin{cases} \underline{\frac{1}{j\pi k} \quad \text{für } k=\pm1,\pm3,\ldots} \\ \underline{0 \quad \text{für } k=\pm2,\pm4,\ldots} \end{cases}$$

Der Gleichanteil beträgt $\underline{c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\tau)d\tau = \frac{3}{2}}$.

Die Fourier-Reihe lautet somit

$$\underline{\underline{x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\tau} = \frac{3}{2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{j2\pi k}e^{jk\tau} = \frac{3}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k=\text{ungerade}}}^{\infty}\frac{e^{jk\tau}}{j\pi k}}}.$$

Komplexe Fourier-Reihe 2:

Bestimmen Sie die komplexe Fourier-Reihe der Spannung

$u(t) = \hat{U} \sin^3(\omega t)$. Hyperbelfunktionen

LÖSUNG:

$$u(t) = \hat{U} \sin^3(\omega t) = \hat{U} \left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{j2}\right)^3 = \frac{\hat{U}}{j^3 8}\left(e^{j3\omega t} - 3e^{j2\omega t}e^{-j\omega t} + 3e^{j\omega t}e^{-j2\omega t} - e^{-j3\omega t}\right)$$

$$u(t) = j\frac{\hat{U}}{8}\left(-e^{-j3\omega t} + 3e^{-j\omega t} - 3e^{j\omega t} + e^{j3\omega t}\right)$$

Die komplexe Fourier-Reihe lautet somit

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega t} = -j\frac{\hat{U}}{8}e^{-j3\omega t} + j\frac{3}{8}\hat{U}e^{-j\omega t} - j\frac{3}{8}\hat{U}e^{j\omega t} + j\frac{\hat{U}}{8}e^{j3\omega t}$$

mit den Fourier-Koeffizienten

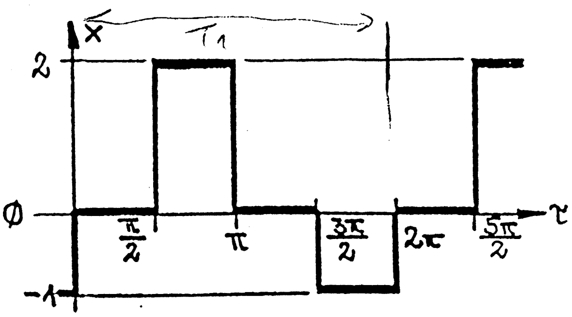
$$C_1 = C_{-1}^* = -j\frac{3}{8}\hat{U} \quad \text{und} \quad C_3 = C_{-3}^* = j\frac{\hat{U}}{8} .$$

Die reelle Fourier-Reihe erhält man beispielsweise durch zusammenfassen zu

$$u(t) = \frac{3}{4}\hat{U}\sin(\omega t) + \left(-\frac{1}{4}\right)\hat{U}\sin(3\omega t) = \frac{3}{4}\hat{U}\sin(\omega t) - \frac{\hat{U}}{4}\sin(3\omega t)$$

$C_1 e^{j\omega t} + C_1 e^{j2\omega t}$

Komplexe Fourier-Reihe 3:



Gesucht ist die komplexe Fourier-Reihe des dargestellten Signals.

LÖSUNG:

Die Fourier-Koeffizienten werden aus ihrer Definitions=gleichung für 2π-periodische Signale errechnet.

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\tau)e^{-jk\tau}d\tau=\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2e^{-jk\tau}d\tau-\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} e^{-jk\tau}d\tau$$ richtig.

$$c_k=\frac{1}{\pi}\,\frac{e^{-jk\tau}}{-jk}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{-jk\tau}}{-jk}\Bigg|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}=\frac{e^{-jk\frac{\pi}{2}}-e^{-jk\pi}}{jk\pi}+\frac{e^{-jk2\pi}-e^{-jk\frac{3\pi}{2}}}{jk2\pi}$$

$$c_k=\frac{1}{j2\pi k}\Big[2\cos(k\tfrac{\pi}{2})-j2\sin(k\tfrac{\pi}{2})-2\cos(k\pi)+j2\sin(k\pi)+\cos(k2\pi)-j\sin(k2\pi)-\cos(k\tfrac{3\pi}{2})+j\sin(k\tfrac{3\pi}{2})\Big]$$

$$c_k=\frac{1}{j2\pi k}\Big[\cos(k\tfrac{\pi}{2})+\cos(k2\pi)-2\cos(k\pi)+j\{-3\sin(k\tfrac{\pi}{2})\}\Big]$$

$$c_k=\frac{1}{j2\pi k}\Big[\cos(k\tfrac{\pi}{2})-j3\sin(k\tfrac{\pi}{2})+1-2\cdot(-1)^k\Big]$$ trick nicht unbedingt nötig

$$c_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x(\tau)\,d\tau=\frac{1}{2\pi}\Big[2\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{\pi}{2}\Big]=\frac{1}{4}$$

Die Fourier-Reihe lautet schließlich

$$x(\tau)=\frac{1}{4}+\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty}c_k e^{jk\tau}.$$

Fourier-Transformation (gerader Anteil):

Ein Signal $x(\tau)$ besitzt die Spektralfunktion

$$X(j\cdot\nu)=\frac{2}{(3+j\cdot\nu)^2}\ .$$

Berechnen Sie damit die Fourier-Transformierte des geraden Teils der Funktion $x(\tau)$.

LÖSUNG:

1. Möglichkeit:

$$x_g(\tau)=\frac{1}{2}\left[x(\tau)+x(-\tau)\right] \circ\!\!-\!\!\bullet \underline{X_g(j\nu)=\frac{1}{2}\left[X(j\nu)+X(-j\nu)\right]}$$

$$X_g(j\nu)=\frac{1}{(3+j\nu)^2}+\frac{1}{(3-j\nu)^2}=\frac{9-j6\nu-\nu^2+9+j6\nu-\nu^2}{[(3+j\nu)(3-j\nu)]^2}$$

$$\underline{\underline{X_g(j\nu)=2\,\frac{9-\nu^2}{(9+\nu^2)^2}=2\,\frac{9-\nu^2}{81+18\nu^2+\nu^4}}}$$

2. Möglichkeit:

$$X(j\nu)=\frac{2}{(3+j\nu)^2} \bullet\!\!-\!\!\circ\ x(\tau)=2\tau e^{-3\tau}\varepsilon(\tau)$$

$\underline{x(\tau)}$ ist $\underline{\text{reell}}$, $\underline{\text{d.h. } X_g(j\nu)=\text{Re}[X(j\nu)]}$

$$X_g(j\nu)=\text{Re}\left[\frac{2}{9+j6\nu-\nu^2}\right]=2\,\text{Re}\left[\frac{1}{9+j6\nu-\nu^2}\,\frac{9-\nu^2-j6\nu}{9-\nu^2-j6\nu}\right]$$

$$X_g(j\nu)=2\,\text{Re}\left[\frac{9-\nu^2-j6\nu}{(9-\nu^2)^2+36\nu^2}\right]=2\,\frac{9-\nu^2}{81-18\nu^2+\nu^4+36\nu^2}$$

$$\underline{\underline{X_g(j\nu)=2\,\frac{9-\nu^2}{81+18\nu^2+\nu^4}}}$$

Fourier-Transformation (ungerader Anteil):

Ein Signal $x(\tau)$ besitzt die Spektralfunktion

$$X(j\cdot v)=5+4\cdot\pi\cdot\delta(v)+\frac{4}{j\cdot v}.$$

$x(\tau)=\delta(\tau)+4.\varepsilon(\tau)$

Berechnen Sie damit die Fourier-Transformierte des ungeraden Teils der Funktion $x(\tau)$.

LÖSUNG:

$\delta(bt)=\frac{1}{|b|}\cdot\delta(t)$

$\delta(-t)=\delta(t)$

1. Möglichkeit:

$$x_u(\tau)=\frac{1}{2}[x(\tau)-x(-\tau)] \circ\!\!-\!\!\bullet\ \underline{X_u(jv)=\frac{1}{2}[X(jv)-X(-jv)]}$$

$$X_u(jv)=\frac{1}{2}[\cancel{5}+4\pi\,\delta(v)+\frac{4}{jv}-\cancel{5}-4\pi\,\delta(-v)-\frac{4}{-jv}]$$

$$\underline{\underline{X_u(jv)=\frac{4}{jv}=-j\frac{4}{v}}}$$

2. Möglichkeit:

$\underline{x(\tau)\text{ ist reell, d.h. } X_u(jv)=j\,\mathrm{Im}[X(jv)]}$

$$\underline{\underline{X_u(jv)}}=j\,\mathrm{Im}[5+4\pi\,\delta(v)-j\frac{4}{v}]=\underline{\underline{-j\frac{4}{v}}}$$

$\mathrm{Im}\,[X(jv)]$

$X_u=\frac{1}{2}[e^{-5\tau}+e^{5\tau}]=\cos t$

$X_g=\frac{1}{2}$

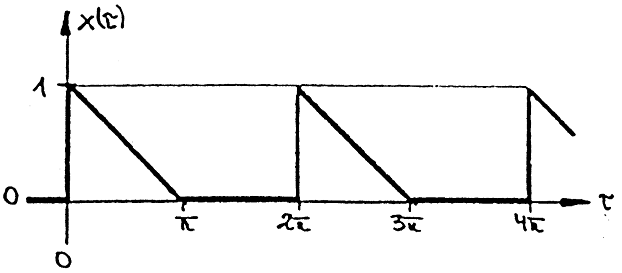
$X_u+X_g=\cos t-j\sin(t)$

e^{-t}

$X\quad\frac{1}{jv+5}+\frac{1}{-jv+5}=\frac{1}{jv5}-\frac{1}{jv5}=-\sin(t)j$

$\frac{1}{2}[e^{-5\tau}-e^{5\tau}]$

Fourier-Reihe 4:



Berechnen Sie die Fourier-Reihe von $x(\tau)$. Wie groß ist die Amplitude der 1. Oberwelle ?

LÖSUNG:

Die Fourier-Koeffizienten werden aus der Beziehung

$$\underline{c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\tau)\, e^{-jk\tau}\, d\tau} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(-\frac{\tau}{\pi}+1\right)e^{-jk\tau}\, d\tau$$

durch partielle Integration berechnet.

$$c_k = -\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\pi} \underset{v}{\tau}\, \underset{u'}{e^{-jk\tau}}\, d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-jk\tau}\, d\tau$$

$$c_k = -\frac{1}{2\pi^2}\left[\tau\,\frac{e^{-jk\tau}}{-jk}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{e^{-jk\tau}}{-jk}\, d\tau\right] + \frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{-jk\tau}}{-jk}\Big|_0^{\pi}$$

$$c_k = -\frac{1}{2\pi^2}\left[\frac{-\pi e^{-jk\pi}}{jk} - \frac{e^{-jk\tau}}{j^2k^2}\Big|_0^{\pi}\right] + \frac{1}{2\pi}\,\frac{1-e^{-jk\pi}}{jk}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi^2}\,\frac{\pi e^{-jk\pi}}{jk} + \frac{1-e^{-jk\pi}}{2\pi^2k^2} + \frac{1}{2\pi}\,\frac{1-e^{-jk\pi}}{jk} = \cancel{\frac{e^{-jk\pi}}{j2\pi k}} + \frac{1-e^{-jk\pi}}{2\pi^2k^2} + \frac{1-\cancel{e^{-jk\pi}}}{j2\pi k}$$

$$\underline{\underline{c_k}} = \frac{1}{j2\pi k} + \frac{1-e^{-jk\pi}}{2\pi^2k^2} = \underline{\underline{\frac{1}{j2\pi k} + \frac{1-(-1)^k}{2\pi^2k^2}}}\,, \quad \underline{\underline{k \neq 0}}$$

$$\underline{\underline{c_0}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\tau)\, d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(-\frac{\tau}{\pi}+1\right)d\tau = \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\tau^2}{2\pi}+\tau\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\pi}{2}+\pi\right) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

Die Fourier-Reihe in komplexer Form lautet schließlich

$$\underline{\underline{x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-jk\tau} = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} c_k e^{-jk\tau} + c_0 = \frac{1}{4} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty}\left[\frac{1}{j2\pi k} + \frac{1-(-1)^k}{2\pi^2k^2}\right]e^{-jk\tau}}}\,.$$

Für die Amplitude der 1. Oberwelle erhalten wir

$$\underline{\underline{\hat{x}_1 = 2|c_1| = 2\sqrt{\left(\frac{1}{\pi^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2} \approx 0{,}377\,.}}$$

c_2 nicht c_1

ich denke zumindest

S

1 Oberwelle:

Fourier-Reihe 5:

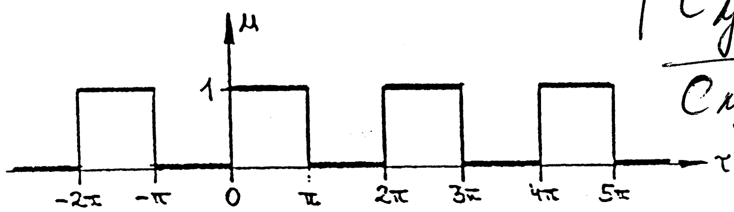
Ein lineares zeitinvariantes System besitzt die Übergangsfunktion (Sprungantwort)

$$h(\tau) = \left(1 - e^{-4\tau}\right)\varepsilon(\tau) .$$

Geben Sie die Fourier-Reihe des Ausgangs an zu dem periodischen Eingang

$$\boxed{c_{yk} = G(jk)\, c_{uk}}$$

$$c_{y0} = G(j0) \cdot c_{u0} = \frac{1}{2}$$



$h(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, H(j\nu)$ $\quad h'(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, G(j\nu) = j\nu \cdot H(j\nu)$

$h'(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, j\nu \cdot H(j\nu)$

$$\left(1 - e^{-4\tau}\right)\delta(\tau) = 0$$

LÖSUNG:

Die Stoßantwort erhalten wir aus der Sprungantwort durch verallgemeinerte Differentiation. $g(\tau) = h^{(1)}(\tau) = 4e^{-4\tau}\varepsilon(\tau). + \underbrace{\left(1 - e^{-4\tau}\right)\delta(\tau)}_{=0}$

Die Fourier-Transformierte der Stoßantwort folgt mit Hilfe von Tab. 3.1

Zeile 6: $e^{-a\tau}\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{j\nu + a}$ zu $G(j\nu) = \frac{4}{j\nu + 4}$.

Die Fourier-Koeffizienten c_{uk} werden aus ihrem Definitionintegral berechnet.

$$c_{uk} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\tau)\, e^{-jk\tau}\, d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-jk\tau}\, d\tau = \frac{1}{2\pi}\, \frac{e^{-jk\tau}}{-jk}\Bigg|_0^{\pi}$$

$$c_{uk} = \frac{1}{j2\pi k}\left[1 - e^{-jk\pi}\right] = \frac{1-(-1)^k}{j2\pi k} = \begin{cases} \frac{1}{j\pi k} & \text{für } k = \pm 1, \pm 3, \dots \\ 0 & \text{für } k = \pm 2, \pm 4, \dots \end{cases}$$

Der Gleichanteil von $u(\tau)$ ist $c_{u0} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\tau)\, d\tau = \frac{1}{2}$.

Die Fourier-Koeffizienten des Ausgangs lauten

$$c_{yk} = G(jk)\, c_{uk} = \frac{4}{jk + 4}\, \frac{1-(-1)^k}{j2\pi k} \; ; \quad c_{y0} = G(j0)\, c_{u0} = \frac{1}{2}$$

und die Fourier-Reihe ergibt sich daraus zu

$$y(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{yk}\, e^{jk\tau} = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{4}{jk+4}\, \frac{1-(-1)^k}{j2\pi k}\, e^{jk\tau} = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{\substack{k=-\infty \\ \text{ungerade} \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{jk\tau}}{jk(jk+4)} .$$

Fourier-Transformations-Identität:

Zeigen Sie: Bilden $x(\tau)$ und $X(j\nu)$ ein Fourier-Paar, so gilt auch die Korrespondenz

$$X(j\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, 2\pi x(-\nu)\ .$$

Damit lassen sich aus bekannten Korrespondenzen durch einfache Variablensubstitution neue Korrespondenzen ableiten.

LÖSUNG:

Fourier-Transformation – Analyse/Synthese-Gleichungspaar:

$$X(j\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-j\nu\tau}\, d\tau \qquad (1)$$

$$x(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\nu)\, e^{j\nu\tau}\, d\nu \qquad (2)$$

Zu zeigen ist $X(j\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, 2\pi x(-\nu)$ (3).

$$\mathcal{F}^{-1}\{2\pi x(-\nu)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi x(-\nu)\, e^{j\nu\tau}\, d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} x(-\nu)\, e^{j\nu\tau}\, d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} x(\nu)\, e^{-j\nu\tau}\, d\nu$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{2\pi x(-\nu)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\nu)\, e^{-j\nu\tau}\, d\nu \quad (4)$$

Die Integrale (1) und (4) besitzen nur ähnliche Struktur.

Da wir $X(j\tau)$ benötigen ersetzen wir in Gleichung (1) ν durch τ und gleichzeitig die Integrationsvariable τ durch ν um nicht in Konflikt mit den beiden Bezeichnungen zu kommen. Wir erhalten also

$$X(j\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\nu)\, e^{-j\nu\tau}\, d\nu \quad (5)$$

was identisch mit der inversen Fourier-Transformierten von $2\pi x(-\nu)$ nach (4) ist, womit der Beweis erbracht wurde.

Fourier-Transformierte:

Zwei Signale $p(\tau)$ und $x(\tau)$ sind gegeben. Bei $p(\tau)$ handelt es sich um ein 2π-periodisches Signal dessen Fourier-Reihe

$$p(\tau)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\tau}$$

$\boxed{e^{j(} = \cos(() + j\sin(()}$

bekannt ist und bei $x(\tau)$ handelt es sich um ein beliebiges Signal dessen Fourier-Transformierte

$$x(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X(j\nu)$$

bekannt ist. Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte von $y(\tau)=x(\tau)p(\tau)$.

LÖSUNG:

$$\underline{p(\tau)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\tau} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k[\cos(k\tau)+j\sin(k\tau)]} \qquad (1)$$

Mit Hilfe von Tab. 3.1

Zeile 8: $\cos(\nu_1\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \pi[\delta(\nu-\nu_1)+\delta(\nu+\nu_1)]$

Zeile 9: $\sin(\nu_1\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, -j\pi[\delta(\nu-\nu_1)-\delta(\nu+\nu_1)]$

folgt aus (1):

$$\mathcal{F}\{p(\tau)\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\pi[\delta(\nu-k)+\delta(\nu+k)-\delta(\nu-k)+\delta(\nu+k)]$$

$$\underline{\mathcal{F}\{p(\tau)\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k\,\delta(\nu+k)} \qquad (2)$$

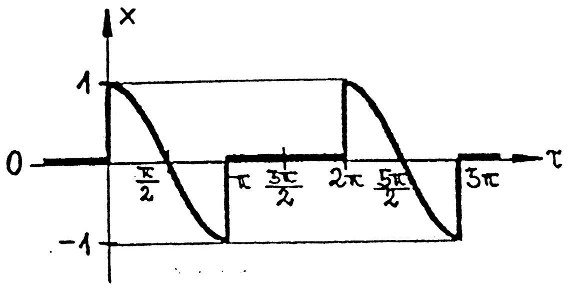
Das Spektrum von $y(\tau)$ erhält man durch <u>Faltung</u> der <u>Teilspektren</u> $\underline{\mathcal{F}\{p(\tau)\}}$ <u>und</u> $\underline{X(j\nu)}$ <u>im Frequenzbereich</u>.

$=\nu' \rightarrow$ mit $\delta(\nu)=0$ ...

$$\mathcal{F}\{y(\tau)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k\,\delta(\nu+k-\nu')\,X(j\nu')\,d\nu'$$

$$\underline{\underline{\mathcal{F}\{y(\tau)\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,X(j(\nu+k))}}$$

Grund- und Oberschwingungsamplitude:



Berechnen Sie für das skizzierte 2π-periodische Signal die komplexe Amplitude der Grund- und der ersten (nichtverschwindenden) Oberschwingung.

LÖSUNG:

$x(\tau)$ ist 2π-periodisch.

$$x(\tau) = \begin{cases} \cos(\tau) & \text{für } 0<\tau<\pi \\ 0 & \text{für } \pi<\tau<2\pi \end{cases}$$

$_1 = 2 \cdot c_1$ $\quad c_k = \ldots$

Grundschwingungsamplitude:

$$\hat{X}_1 = \frac{2\cdot 1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\tau)\, e^{-j\tau}\, d\tau = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{e^{j\tau}+e^{-j\tau}}{2}\, e^{-j\tau}\, d\tau$$

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-j2\tau}\, d\tau = \frac{1}{2\pi}\pi + \frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{-j2\tau}}{-j2}\right|_0^{\pi}$$

$$\underline{\underline{\hat{X}_1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{j4\pi}\underbrace{\left[1-e^{-j2\pi}\right]}_{0} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

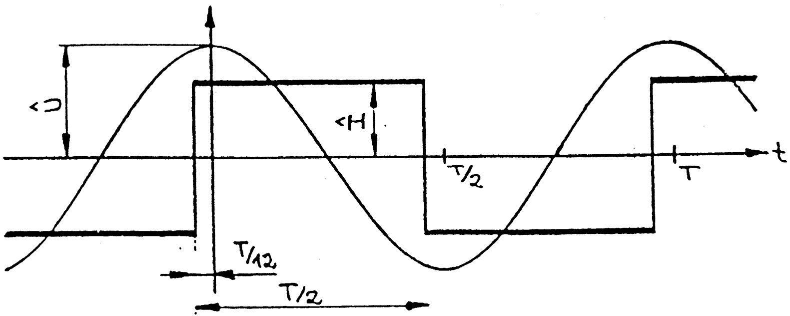
1. Oberschwingungsamplitude:

$$\hat{X}_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(\tau)\, e^{-j2\tau}\, d\tau = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{e^{j\tau}+e^{-j\tau}}{2}\, e^{-j2\tau}\, d\tau$$

$$\hat{X}_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-j\tau}\, d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-j3\tau}\, d\tau = \frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{-j\tau}}{-j}\right|_0^{\pi} + \frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{-j3\tau}}{-j3}\right|_0^{\pi}$$

$$\underline{\underline{\hat{X}_2}} = \frac{1}{j2\pi}\left(1-e^{-j\pi} + \frac{1-e^{-j3\pi}}{3}\right) = \frac{1}{j2\pi}\left(1+1+\frac{2}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{4}{j3\pi}}}$$

Grundschwingungsblindleistung:



Berechnen Sie die Grundschwingungsblindleistung zu der angegebenen Sinusspannung und dem rechteckförmigen Wechselstrom.

$$\hat{I}_k = \frac{2}{T}\int_0^T i(t)\cdot e^{-j\,\cancel{\omega t}\,k\omega_1 t}\,dt$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{T}$$

LÖSUNG:

Spannungsgrundschwingung:

$$u_1(t) = u(t) = \hat{U}\cos(\omega_1 t)$$

Stromgrundschwingung:

$$\hat{I}_1 = \frac{2}{T}\,2\int_{-T/12}^{T/2-T/12}\hat{I}e^{-j\omega_1 t}\,dt = \frac{4\hat{I}}{T}e^{-j\omega_1\frac{T}{12}}\int_0^{T/2}e^{-j\omega_1 t}\,dt$$

$$\hat{I}_1 = \frac{4\hat{I}}{\cancel{T}}e^{-j\frac{2\pi}{\cancel{T}}\cdot\frac{\cancel{T}}{12_6}}\left.\frac{e^{-j\frac{2\pi}{T}t}}{-j\frac{2\pi}{\cancel{T}}}\right|_0^{\frac{T}{2}} = \frac{2\hat{I}}{j\pi}\left[1-e^{-j\pi}\right]e^{-j\frac{\pi}{6}} = \frac{4\hat{I}}{j\pi}e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

$$\hat{I}_1 = \frac{4\hat{I}}{j\pi}e^{-j\frac{\pi}{6}} = \underbrace{\frac{4\hat{I}}{\pi}}_{wrt}e^{-j\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)} \rightarrow \text{~~Effektiv~~ wrt Amplitude}$$

komplexe Amplitude

$$i_1(t) = \frac{4\hat{I}}{\pi}\cos\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4\hat{I}}{\pi}\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

Fehler.

$$\frac{4\hat{I}}{\pi}\cdot\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{3}\right)$$

Grundschwingungsblindleistung:

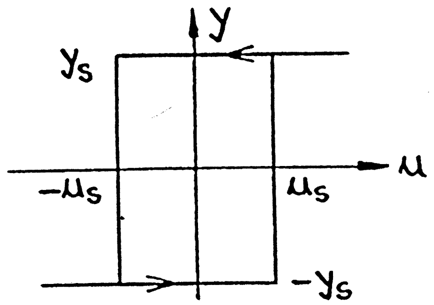
$$Q_1 = \frac{\hat{U}_1\hat{I}_1}{2}\sin\left(\phi-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{2\hat{I}\hat{U}}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\hat{I}\hat{U}}{\pi}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Q_1 = \frac{2\hat{U}\hat{I}}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}\,\hat{U}\hat{I}}{\pi}$$

$$Q_1 = |U_1|\cdot|I_1|\cdot\cancel{\cos}\,\sin(\varphi_{u_1}-\varphi_{i_1})$$

Grundschwingungsblindleistung.

Hystereseglied:

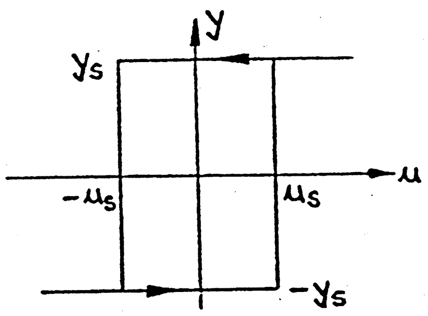


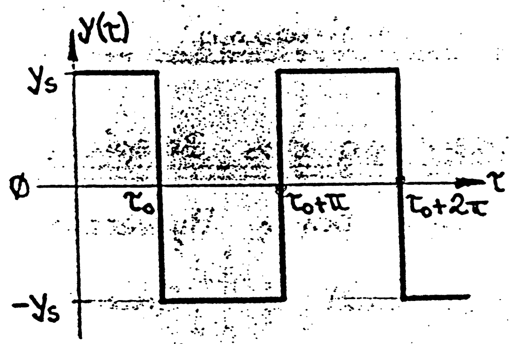
Dargestellt ist die Kennlinie eines idealen Hystereseglieds. An dessen Eingang liegt das Signal

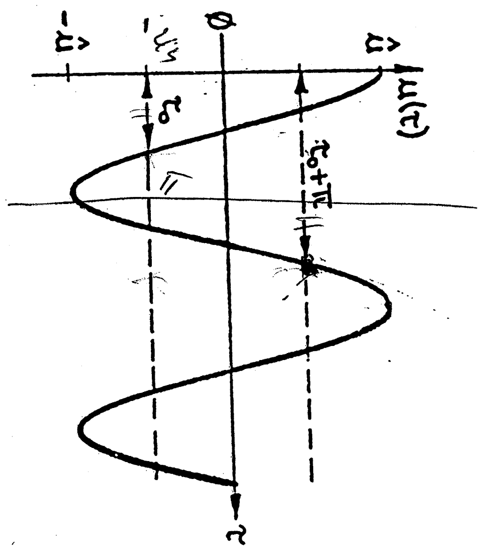
$$u(\tau) = \hat{u}\cos(\tau) \quad , \quad \hat{u} > u_S \ .$$

Skizzieren Sie das Ausgangssignal und bestimmen Sie für dessen Grundschwingung die Amplitude und den Phasenverschiebungswinkel gegenüber dem Eingangssignal.

LÖSUNG:







y(τ) ist 2π-periodisch !

$$\underline{\tau_0 = \arccos\left(-\frac{u_S}{\hat{u}}\right)}$$

Die Fourier-Koeffizienten des Ausgangssignals werden über ihr Definitionsintegral berechnet. Speziell für k=1 folgt

$$\underline{c_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} y(\tau)\, e^{-j\tau}\, d\tau} = \frac{1}{2\pi}\int_{\tau_0}^{\tau_0+\pi} -y_S\, e^{-j\tau}\, d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_{\tau_0+\pi}^{\tau_0+2\pi} y_S\, e^{-j\tau}\, d\tau$$

oder $\frac{1}{2\pi}\cdot 2\int_{\tau_0+\pi}^{\tau_0+2\pi} y_S\, e^{-j\tau} d\tau$ --> das selbe Ergebnis

$$c_1 = \frac{-y_s}{2\pi}\,\frac{e^{-j\tau}}{-j}\Bigg|_{\tau_0}^{\tau_0+\pi} + \frac{y_s}{2\pi}\,\frac{e^{-j\tau}}{-j}\Bigg|_{\tau_0+\pi}^{\tau_0+2\pi} = \frac{y_s}{j2\pi}\left[e^{-j(\tau_0+\pi)} - e^{-j\tau_0} + e^{-j(\tau_0+\pi)} - e^{-j(\tau_0+2\pi)}\right]$$

$$c_1 = \frac{y_s}{j2\pi}\left[e^{-j\tau_0}e^{-j\pi} - e^{-j\tau_0} + e^{-j\tau_0}e^{-j\pi} - e^{-j\tau_0}e^{-j2\pi}\right] = \frac{y_s}{j2\pi}[-1-1-1-1]e^{-j\tau_0}$$

$$\underline{\underline{c_1}} = \frac{-2y_s}{j\pi}e^{-j\tau_0} = \underline{\underline{-\frac{2y_s}{j\pi}e^{-j\tau_0} = \frac{2y_s}{\pi}e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\tau_0\right)}}}$$

Grundschwingungsamplitude: $|c_1| = \frac{2y_s}{\pi} \rightarrow \underline{\underline{\hat{y}_1 = 2|c_1| = \frac{4y_s}{\pi}}}$

Grundschwingungsphase: $\operatorname{arc}[c_1] = \frac{\pi}{2} - \tau_0$

Grundschwingung: $y_1(\tau) = \frac{4y_s}{\pi}\cos\left(\tau + \frac{\pi}{2} - \tau_0\right)$

$$y_1(\tau) = -\frac{4y_s}{\pi}\sin(\tau - \tau_0)$$

Der Phasenverschiebungswinkel zwischen Eingangs- und Ausgangsgrundschwingung: $\underline{\underline{\varphi = \frac{\pi}{2} - \tau_0 = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(-\frac{u_s}{\hat{u}}\right)}}$

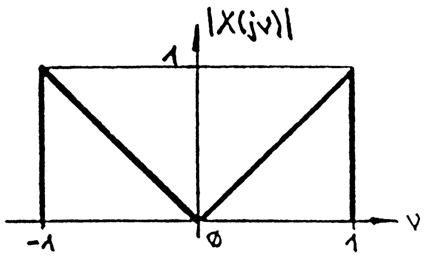
↳ Phasenverschiebung des Eingangs

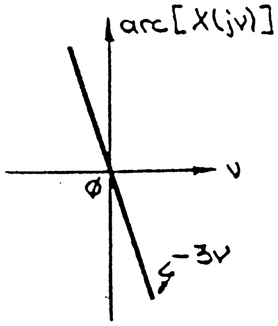
Praktische Bedeutung des Beispiels: Phasenverschiebung des Ausgangs.

Bei Systemen mit einer Hysterese treten i.a. zwischen Eingangssignal und der Grundschwingung des Ausgangssignals Phasenverschiebungen auf, was bei rückgekoppelten Systemen zu Stabilitätsproblemen führen kann.

Inverse Fourier-Transformation:

3.26





Ein Signal $X(j\nu)$ besitzt das dargestellte Amplituden- und Phasenspektrum. Berechnen Sie die zugehörige Zeitfunktion $x(\tau)$.

LÖSUNG:

$$|X(j\nu)| = \begin{cases} -\nu & \text{für } -1<\nu<0 \\ \nu & \text{für } 0<\nu<1 \end{cases} \qquad \arc[X(j\nu)] = -3\nu$$

$$x(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\nu)e^{j\nu\tau}d\nu = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{0} -\nu e^{-j3\nu}e^{j\nu\tau}d\nu + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{1}\nu e^{-j3\nu}e^{j\nu\tau}d\nu$$

$$x(\tau) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{0}\nu e^{j(-3\nu+\nu\tau)}d\nu + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{1}\nu e^{j(-3\nu+\nu\tau)}d\nu$$

$$x(\tau) = -\frac{1}{2\pi}\left[\nu\frac{e^{j(\tau-3)\nu}}{j(\tau-3)}\Big|_{-1}^{0} - \frac{e^{j(\tau-3)\nu}}{j^2(\tau-3)^2}\Big|_{-1}^{0}\right] + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{j(\tau-3)\nu}\nu}{j(\tau-3)}\Big|_{0}^{1} - \frac{e^{j(\tau-3)\nu}}{j^2(\tau-3)^2}\Big|_{0}^{1}\right]$$

$$x(\tau) = -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-j(\tau-3)}}{j(\tau-3)} + \frac{1-e^{-j(\tau-3)}}{(\tau-3)^2}\right] + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{j(\tau-3)}}{j(\tau-3)} + \frac{e^{j(\tau-3)}-1}{(\tau-3)^2}\right]$$

$$x(\tau) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{j(\tau-3)}-e^{-j(\tau-3)}}{j(\tau-3)} + \frac{e^{j(\tau-3)}+e^{-j(\tau-3)}}{(\tau-3)^2} - \frac{2}{(\tau-3)^2}\right]$$

$$x(\tau) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\tau-3)}{\tau-3} + \frac{\cos(\tau-3)}{(\tau-3)^2} - \frac{1}{(\tau-3)^2}\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\tau-3)}{\tau-3} + \frac{\cos(\tau-3)-1}{(\tau-3)^2}\right]$$

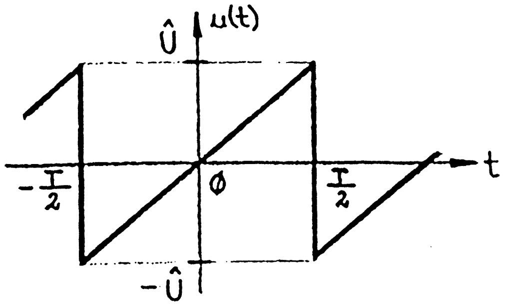
mit $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}[1-\cos(2\alpha)]$ und $\alpha = \frac{\tau-3}{2}$ folgt

$$x(\tau) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\tau-3)}{\tau-3} - \frac{2\sin^2(\frac{\tau-3}{2})}{(\tau-3)^2}\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\tau-3)}{\tau-3} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(\frac{\tau-3}{2})}{\frac{\tau-3}{2}}\right]^2\right]$$

$$x(\tau) = \frac{1}{\pi}\left[si(\tau-3) - \frac{1}{2}si^2\left(\frac{\tau-3}{2}\right)\right] .$$

Grundschw. Eff. + Effektivwert

Klirrfaktor eines Sägezahnsignals:



Berechnen Sie den Klirrfaktor

$$k_u = \sqrt{1-\left(|U_1|/U\right)^2}$$

des dargestellten Sägezahnsignals.

LÖSUNG:

Die Funktion $u(t)$ ist ungerade. Die Berechnung wird in nichtbezogenen Größen durchgeführt.

$$U_1 = \frac{\sqrt{2}}{T_1}\int_{\emptyset}^{T_1} u(t)\, e^{-j\omega_1 t}\, dt = \frac{\sqrt{2}}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{2\hat{U}}{T} t\, e^{-j\omega t}\, dt = \frac{2\sqrt{2}\,\hat{U}}{T^2}\int_{-T/2}^{T/2} t\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$U_1 = \frac{2\sqrt{2}\,\hat{U}}{T^2}\left[\frac{t e^{-j\omega t}}{-j\omega}\Bigg|_{-T/2}^{T/2} - \int_{-T/2}^{T/2} \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\, dt\right]$$

$$U_1 = \frac{2\sqrt{2}\,\hat{U}}{\cancel{T^2}}\left[\frac{\cancel{\frac{T}{2}} e^{-j\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}} + \cancel{\frac{T}{2}} e^{+j\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}}}{-j\frac{2\pi}{\cancel{T}}} - \frac{e^{-j\frac{2\pi}{T}t}}{j^2\left(\frac{2\pi}{\cancel{T}}\right)^2}\Bigg|_{-T/2}^{T/2}\right]$$

$$U_1 = 2\sqrt{2}\,\hat{U}\left[\frac{e^{j\pi}+e^{-j\pi}}{-j4\pi} + \frac{e^{-j\pi}-e^{j\pi}}{4\pi^2}\right] = 2\sqrt{2}\,\hat{U}\left[\frac{-1-1}{-j4\pi} + \frac{-1+1}{4\pi^2}\right]$$

$$\underline{U_1 = \frac{\sqrt{2}\,\hat{U}}{j\pi} = -j\frac{\sqrt{2}\,\hat{U}}{\pi}}$$

Grundschwingungseffektivwert:

$$\underline{|U_1| = \frac{\sqrt{2}\,\hat{U}}{\pi}}$$

Effektivwert:

$$U^2 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u^2(t)\, dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left(\frac{2\hat{U}}{T}t\right)^2 dt = \frac{4\hat{U}^2}{T^3}\int_{-T/2}^{T/2} t^2\, dt$$

$$U^2 = \frac{4\hat{U}^2}{T^3}\frac{t^3}{3}\Bigg|_{-T/2}^{T/2} = \frac{4}{3}\frac{\hat{U}^2}{T^3}\left[\frac{T^3}{8}+\frac{T^3}{8}\right] = \frac{\hat{U}^2}{3}$$

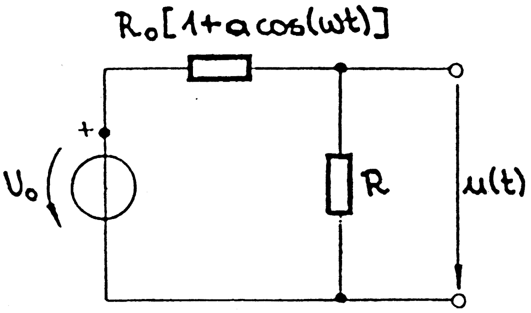
$$\underline{U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{3}}}$$

Klirrfaktor:

$$\underline{\underline{k_u = \sqrt{1-\left(\frac{|U_1|}{U}\right)^2}}} = \sqrt{1-\frac{2\hat{U}^2/\pi^2}{\hat{U}^2/3}} = \underline{\underline{\sqrt{1-\frac{6}{\pi^2}} \approx \emptyset{,}626}} \;.$$

Kreis mit gesteuertem Widerstand:

Spj. teilen → geom. Reihe bringen



In der angegebenen Schaltung werden durch einen gesteuerten Widerstand, welcher seinen Widerstandswert periodisch ändert ($R_0 = const.$, $a = const.$, $\omega = const.$) , Oberschwingungen der Spannung $u(t)$ erzeugt.

Berechnen Sie

$$\frac{|\hat{U}_2|}{|\hat{U}_1|} = \frac{|\text{Amplitude der 1.Oberschwingung}|}{|\text{Amplitude der Grundschwingung}|} .$$

LÖSUNG:

Die Spannungsteilerregel liefert:

$$\underline{u(t)} = U_0 \frac{R}{R+R_0+R_0 a\cos(\omega t)} = \underline{\frac{U_0 R}{R+R_0} \, \frac{1}{1+\frac{R_0 a}{R+R_0}\cos(\omega t)}}$$

Der Ausdruck $\frac{1}{1+q}$ kann in eine geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-q)^k$ umgeformt werden.

Daraus folgt

$$u(t) = U_0 \frac{R}{R+R_0} \sum_{k=0}^{\infty}\left[-\frac{R_0 a}{R+R_0}\cos(\omega t)\right]^k$$

bzw. mit der Abkürzung $\varepsilon = \frac{R_0 a}{R+R_0}$

$$\underline{u(t) = U_0 \frac{R}{R+R_0} \sum_{k=0}^{\infty}[-\varepsilon\cos(\omega t)]^k}$$

$$u(t) = U_0 \frac{R}{R+R_0}[1-\varepsilon\cos(\omega t)+\varepsilon^2\cos^2(\omega t)-\varepsilon^3\cos^3(\omega t)+\dots] .$$

Mit $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}[1+\cos(2\alpha)]$ erhalten wir

$$\underline{u(t) = U_0 \frac{R}{R+R_0}[1+\frac{\varepsilon^2}{2} - \underbrace{\varepsilon\cos(\omega t)}_{\text{Grundschwingung}} + \underbrace{\frac{\varepsilon^2}{2}\cos(2\omega t)}_{\text{1. Oberschwingung}} - + \dots]} .$$

Somit lautet das Endergebnis schließlich

$$\underline{\underline{\left|\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1}\right|}} = \frac{U_0 \frac{R}{R+R_0}\frac{\varepsilon^2}{2}}{U_0 \frac{R}{R+R_0}\varepsilon} = \underline{\underline{\frac{\varepsilon}{2} = \frac{a}{2}\,\frac{R_0}{R+R_0}}} .$$

Leistungsfaktor:

An einem Verbraucher werden der Spannungs- und der Stromverlauf

$$u(t)=\sqrt{2}\cdot|U_1|\cdot[\cos(\omega\cdot t)+0{,}800\cdot\cos(3\cdot\omega\cdot t)]$$
$$i(t)=\sqrt{2}\cdot|I_1|\cdot[\cos(\omega\cdot t)+0{,}125\cdot\cos(3\cdot\omega\cdot t)]$$

festgestellt (Verbraucherbezugssystem).

Berechnen Sie den Leistungsfaktor $\lambda = P/S$.

LÖSUNG:

$$u(t)=\sqrt{2}\,[U_1\cos(\omega t)+U_3\cos(3\omega t)] \qquad \text{mit} \quad U_3=0{,}800\,U_1$$

$$i(t)=\sqrt{2}\,[I_1\cos(\omega t)+I_3\cos(3\omega t)] \qquad \text{mit} \quad I_3=0{,}125\,I_1$$

$$\underline{P=U_0I_0+\sum_{k=1}^{\infty}|U_k||I_k|\cos(\varphi_{uk}-\varphi_{ik})}=U_1I_1+U_3I_3=U_1I_1+0{,}800U_1\,0{,}125I_1$$

$$\underline{P=1{,}1\,U_1I_1}$$

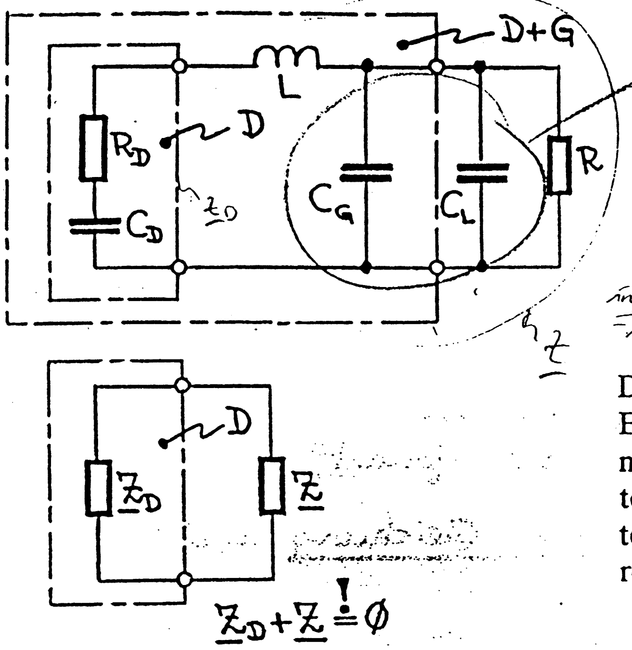
$$\underline{S=\sqrt{U_1^2+U_3^2}\sqrt{I_1^2+I_3^2}}=\sqrt{U_1^2+(0{,}800U_1)^2}\sqrt{I_1^2+(0{,}125I_1)^2}=\underline{1{,}291\,U_1I_1}$$

Für den Leistungsfaktor ergibt sich daraus

$$\underline{\underline{\lambda=\frac{P}{S}}}=\frac{1{,}1U_1I_1}{1{,}291\,U_1I_1}=\underline{\underline{0{,}852}}\,.$$

Mikrowellengenerator mit Impatt-Diode:

$C \parallel \to$



$R_D < 0$, steuerbar
$C_D = 0{,}5\,pF$,
$L = 0{,}6\,nH$, $C_G = 0{,}3\,pF$
$C_L = 1\,pF$, $R = 50\,\Omega$

$\Rightarrow Z = -Z_D \to Re \to$ quadrat. Gleichung.

Das Bild zeigt vereinfacht die Hochfrequenz-Ersatzschaltung eines Mikrowellengenerators mit einer Impatt-Diode, wobei der Schaltungsteil D den Diodenkristall und der Schaltungsteil $D+G$ den Diodenkristall mit Gehäuse repräsentiert.

Berechnen Sie durch Auswerten der Schwingbedingung $\underline{Z}_D + \underline{Z} = 0$ die Schwingfrequenz und den einzustellenden negativen Widerstandswert R_D.

LÖSUNG:

$$\underline{Z}_D = R_D + \frac{1}{j\omega C_D} \qquad (1)$$

$$\underline{Z} = j\omega L + \frac{1}{j\omega(C_G+C_L)+\frac{1}{R}} \qquad (2)$$

$$\underline{Z} = -\underline{Z}_D \qquad (3)$$

(1) und (2) in (3) ergibt $j\omega L + \frac{1}{j\omega(C_G+C_L)+\frac{1}{R}} = -R_D - \frac{1}{j\omega C_D}$ bzw.

$$-\omega^2 L(C_G+C_L) + j\frac{\omega L}{R} + 1 = -j\omega(C_G+C_L)R_D - \frac{R_D}{R} - \frac{C_G+C_L}{C_D} - \frac{1}{j\omega C_D R}$$

$$1-\omega^2 L(C_G+C_L) + j\frac{\omega L}{R} = -\frac{C_G+C_L}{C_D} - \frac{R_D}{R} + j\left[-\omega(C_G+C_L)R_D + \frac{1}{\omega C_D R}\right] \qquad (3)'$$

Gl.(3)' läßt sich in <u>zwei getrennte Gleichungen für Real- und Imaginärteil</u> aufspalten:

$$1-\omega^2 L(C_G+C_L) = -\frac{C_G+C_L}{C_D} - \frac{R_D}{R} \qquad (4)$$

$$\frac{\omega L}{R} = -\omega(C_G+C_L)R_D + \frac{1}{\omega C_D R} \qquad (5)\,|\cdot\omega \;\to\; \frac{\omega^2 L}{R} = -\omega^2(C_G+C_L)R_D + \frac{1}{C_D R} \qquad (5)'$$

aus (4) folgt $\omega^2 = \frac{1}{L(C_G+C_L)}\left(1+\frac{R_D}{R}+\frac{C_G+C_L}{C_D}\right)$ (4)'

(4)' in (5)' einsetzen:

$$\frac{\cancel{L}}{R}\frac{1}{\cancel{L}(C_G+C_L)}\left(1+\frac{R_D}{R}+\frac{C_G+C_L}{C_D}\right) = -\frac{\cancel{(C_G+C_L)}R_D}{L\cancel{(C_G+C_L)}}\left(1+\frac{R_D}{R}+\frac{C_G+C_L}{C_D}\right)+\frac{1}{C_D R}$$

$$\frac{1}{R(C_G+C_L)}+\frac{R_D}{R^2(C_G+C_L)}+\cancel{\frac{1}{RC_D}} = -\frac{R_D}{L}-\frac{R_D^2}{RL}-\frac{R_D}{L}\frac{C_G+C_L}{C_D}+\cancel{\frac{1}{C_D R}}$$

$$R_D^2\frac{1}{RL}+R_D\left[\frac{1}{L}\left(1+\frac{C_G+C_L}{C_D}\right)+\frac{1}{R^2(C_G+C_L)}\right]+\frac{1}{R(C_G+C_L)} = 0 \quad |\cdot RL$$

$$\underline{R_D^2+R_D\left[R\left(1+\frac{C_G+C_L}{C_D}\right)+\frac{L}{R}\frac{1}{C_G+C_L}\right]+\frac{L}{C_G+C_L}=0} \qquad (6)$$

Koeffizientenvergleich von (6) mit der Grundform $\underline{x^2+a_1x+a_0=0}$ einer <u>quadratischen Gleichung</u> und einsetzen der Bauteilwerte liefert

$\underline{a_1 = \frac{2460}{13}\,\Omega \approx 189{,}23\,\Omega}$ bzw. $\underline{a_0 = \frac{6000}{13}\,\Omega^2 \approx 461{,}538\,\Omega^2}$.

Einsetzen und lösen der quadratischen Gleichung ergibt

$\underline{R_{D1} = -2{,}471\,\Omega}$ und $\underline{R_{D2} = -186{,}759\,\Omega}$.

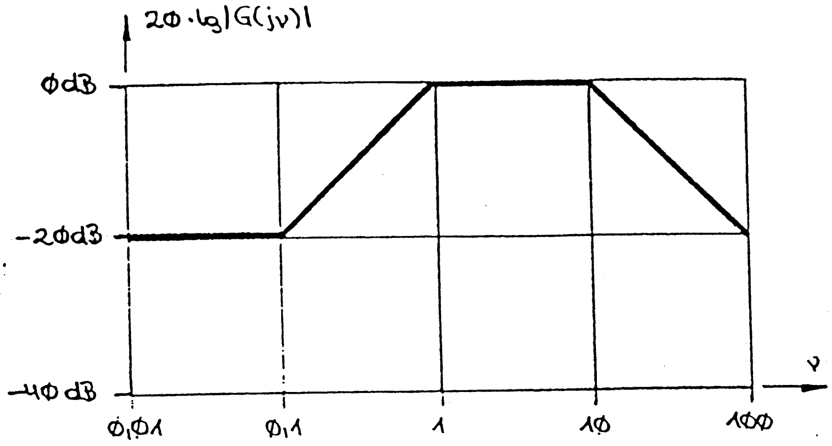
Nur $\underline{R_{D1}}$ stellt eine <u>physikalisch brauchbare Lösung</u> dar, da R_{D2} auf eine negative Schwingfrequenz führt.

Einsetzen von R_{D1} in (4)' ergibt eine <u>Schwingfrequenz</u>

$$\underline{\omega} = \frac{1}{0{,}6\cdot10^{-9}H\,(1+0{,}3)\cdot10^{-12}F}\left(1+\frac{-2{,}471\,\Omega}{50\,\Omega}+\frac{(1+0{,}3)\cdot10^{-12}F}{0{,}5\cdot10^{-12}F}\right)\underline{=67{,}4686\cdot10^{9}}$$

$$\underline{\underline{f = \frac{\omega}{2\pi} = 10{,}738\text{ GHz.}}}$$

Minimalwinkelsystem:



Gegeben ist das vereinfachte Bode-Diagramm für den Betragsteil der Übertragungsfunktion eines Minimalwinkelsystems.
Bestimmen Sie die zugehörige Übertragungsfunktion $G(s)$.

LÖSUNG:

Bei einem Minimalwinkelsystem liegen alle Pole und Nullstellen in der linken Halbebene im Pol/Nullstellen-Diagramm. Die Übertragungsfunktion kann direkt aus dem Verlauf des Betragsfrequenzgangs durch die Knickfrequenzen abgelesen werden.

$$G(s) = K \frac{s+0{,}1}{(s+1)(s+10)}$$

Der konstante Verstärkungsfaktor folgt aus dem Randwert zu $K = 10$.

Die Übertragungsfunktion lautet somit

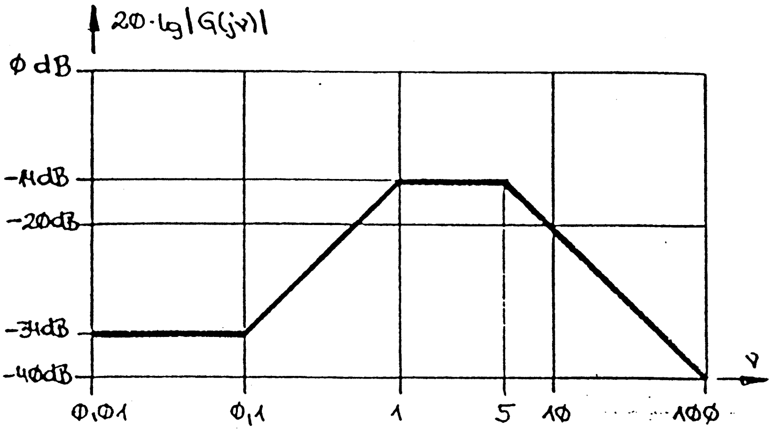
$$G(s) = 10 \frac{s+0{,}1}{(s+1)(s+10)}.$$

$|G(0)| = 0{,}01$

$|G(0{,}01)| = 0{,}1$

$$K = \frac{|G(0{,}01)|}{|G(0)|} = \frac{0{,}1}{0{,}01} = 10$$

Minimalwinkelsystem 2:



Gegeben ist das vereinfachte Bode-Diagramm für den Betragsteil der Übertragungsfunktion eines Minimalwinkelsystems.
Bestimmen Sie die zugehörige Übertragungsfunktion $G(s)$.

LÖSUNG:

Bei einem Minimalwinkelsystem liegen alle Pole und Nullstellen in der linken Halbebene im Pol/Nullstellen-Diagramm. Die Übertragungsfunktion kann direkt aus dem Verlauf des Betragsfrequenzgangs durch die Knickfrequenzen abgelesen werden.

$$G(s) = K\frac{s+0{,}1}{(s+1)(s+5)}$$

$V = 20 \lg v$

Der konstante Verstärkungsfaktor folgt aus dem Randwert zu $K \approx 1$. ←

$$\frac{10^{-\frac{34}{20}}}{|G(0)|} = K$$

Die Übertragungsfunktion lautet somit

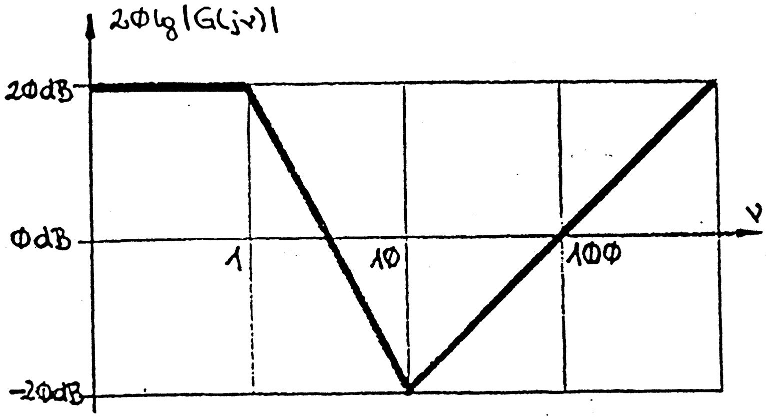
$$G(s) = \frac{s+0{,}1}{(s+1)(s+5)} \cdot 10$$ –> meiner Meinung nach.

$$\frac{0{,}1}{5} \quad 0{,}02$$

$$J_0 = \frac{0{,}1}{5} \cdot 4$$

$$\frac{10^{\frac{34}{20}}}{0{,}02} = K \cdot \cancel{0{,}02}$$

Minimalwinkelsystem 3:



Gegeben ist das vereinfachte Bode-Diagramm für den Betragsteil der Übertragungsfunktion eines Minimalwinkelsystems.
Bestimmen Sie die zugehörige Übertragungsfunktion $G(s)$.

LÖSUNG:

Bei einem Minimalwinkelsystem liegen alle Pole und Nullstellen in der linken Halbebene im Pol/Nullstellen-Diagramm. Die Übertragungsfunktion kann direkt aus dem Verlauf des Betragsfrequenzgangs durch die Knickfrequenzen abgelesen werden.

$$G(s) = K\frac{(s+10)^3}{(s+1)^2}$$

Der konstante Vorfaktor folgt aus dem Randwert zu $K \approx \frac{1}{100}$.

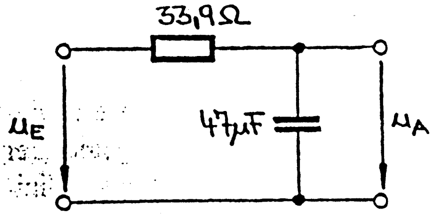
Die Übertragungsfunktion lautet somit

$$G(s) = \frac{1}{100}\,\frac{(s+10)^3}{(s+1)^2}.$$

Theoretisch könnte der -40dB/Dekade-Abfall nach der Knickfrequenz $\nu_1 = 1$ auch von einem Schwingungsterm $s^2 + 2\vartheta\nu_1 s + \nu_1^2 = s^2 + 2\vartheta s + 1$ im Nenner hervorgerufen werden.

$$\frac{10^{\frac{20}{20}}}{|G(0)|} = \frac{10}{1000} = \frac{1}{100}$$

Mischspannung an RC-Tiefpaß:

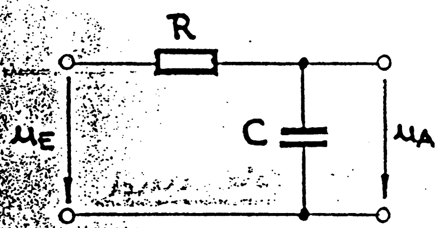


An der Schaltung liegt die Eingangsspannung

$u_E(t) = 12V + 4V\cos(\omega t) + 2V\cos(2\omega t + 30°)$,
$\omega / 2\pi = 50\,Hz$.

Berechnen Sie die Ausgangsspannung $u_A(t)$.

LÖSUNG:



$R = 33{,}9\Omega$; $C = 47\mu F$

$u_E(t) = U_{E0} + \hat{U}_{E1}\cos(\omega t) + \hat{U}_{E2}\cos(2\omega t + \varphi_2)$

$U_{E0} = 12V$; $\hat{U}_{E1} = 4V$; $\hat{U}_{E2} = 2V$; $\frac{\omega}{2\pi} = 50Hz$; $\varphi_2 = 30°$

Die Übertragungsfunktion des RC-Glieds lautet (nichtbez. Form)

$$\underline{G(j\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega CR} .$$

Der eingeschwungene Ausgang auf den Eingang

$$u_E(t) = U_{E0} + Re[\hat{U}_{E1} e^{j\omega t}] + Re[\hat{U}_{E2} e^{j2\omega t + j\varphi_2}]$$

folgt aus dem Überlagerungsprinzip zu

$$u_A(t) = G(j0)\,U_{E0} + Re[G(j\omega)\,\hat{U}_{E1} e^{j\omega t}] + Re[G(j2\omega)\,\hat{U}_{E2} e^{j2\omega t + j\varphi_2}]$$

$$\underline{\underline{u_A(t) = 12V + 3{,}577V\cos(\omega t - 26{,}59°) + 1{,}413V\cos(2\omega t - 15{,}031°)}}$$

Mischstrom an einem Kondensator:

$u(t) = \frac{1}{C} \int i_C dt$

An einem Kondensator von $C = 10\,\mu F$ wird der Strom

$$i(t) = 1{,}5\,A\,\cos(\omega_1 t) + 4{,}0\,A\,\cos(3\omega_1 t)\ ,\ \omega_1 = 100\pi\,s^{-1}\ ,$$

eingeprägt. Berechnen Sie den Effektivwert der anliegenden Spannung.

LÖSUNG:

$i(t) = 1{,}5A\cos(\omega_1 t) + 4{,}0\,A\cos(3\omega_1 t)\ ,\ \omega_1 = 100\pi\,s^{-1}$.

Die Kondensatorspannung folgt aus dem Überlagerungsprinzip und der Elementgleichung.

$$u(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\,dt = \frac{1}{C}\left[\frac{1{,}5A}{\omega_1}\sin(\omega_1 t) + \frac{4A}{3\omega_1}\sin(3\omega_1 t)\right] + K$$

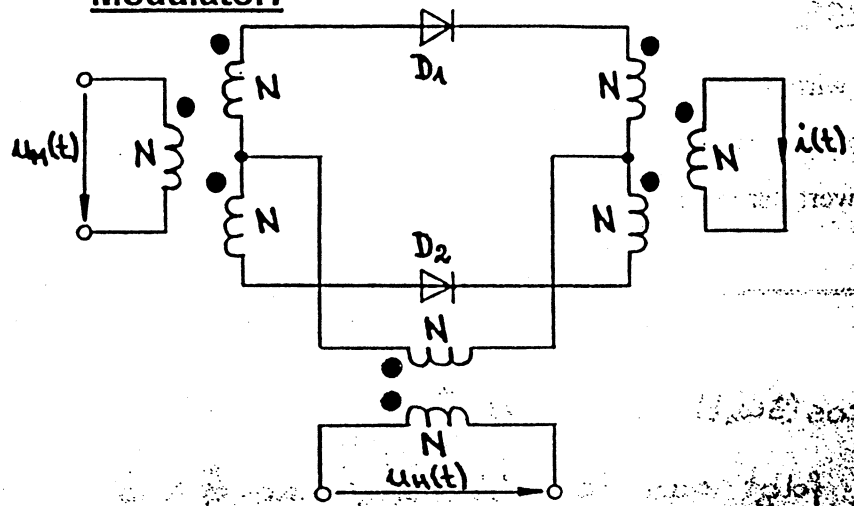
Die Integrationskonstante wird null gesetzt.

$$\underline{u}(t) = 477{,}465V\,\sin(\omega_1 t) + 424{,}413V\sin(3\omega_1 t)$$

Der Effektivwert beträgt

$$\underline{\underline{U = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(477{,}465V)^2 + (424{,}413V)^2} = 451{,}7185V}}.$$

Modulator:



An den Eingängen der skizzierten (Gegentakt-) Modulatorschaltung liegen die Spannungen

$$u_H(t) = \hat{U}_H \cdot cos(\omega_H \cdot t) ,$$

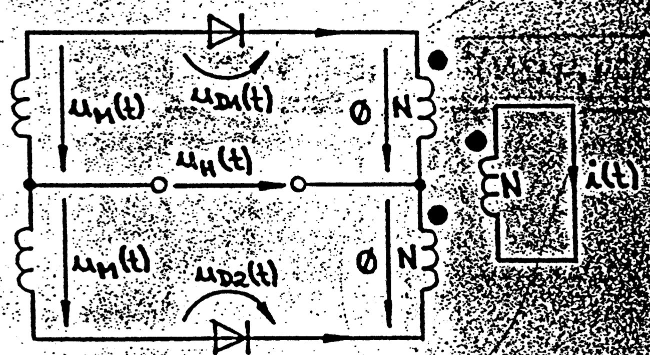
$$u_M(t) = \hat{U}_M \cdot cos(\omega_M \cdot t) .$$

Berechnen Sie den Ausgangsstrom $i(t)$ wenn die Diodenkennlinien durch die quadratische Funktion

$$i_D = a \cdot u_D + b \cdot u_D^2$$

approximiert werden.

LÖSUNG:



Die eingetragenen Ströme und Spannungen ergeben sich aus den Eigenschaften der Streuungsfreiheit und des Durchflutungsausgleichs eines idealen Transformators.

Die Diodenspannungen ergeben sich zu

$$u_{D1}(t) = u_H(t) + u_M(t) = \hat{U}_H \cos(\omega_H t) + \hat{U}_M \cos(\omega_M t) , \quad (1)$$

$$u_{D2}(t) = u_H(t) - u_M(t) = \hat{U}_H \cos(\omega_H t) - \hat{U}_M \cos(\omega_M t) . \quad (2)$$

siehe eigene Rechnung bzw. Prechtl

Nichtlinearer Widerstand:

An einem nichtlinearen Widerstand, dargestellt durch die Spannungs-Strom-Kennlinie

$$\frac{i}{1A} = 1 + \frac{u}{20V} + \left(\frac{u}{50V}\right)^2 \qquad u(t)=\hat{U}\cos(\omega t)$$

liegt eine Sinusspannung mit dem Effektivwert $U = 100V$ und der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi 50\,Hz$.

Berechnen Sie das Verhältnis der Effektivwerts der ersten Oberschwingung zum Effektivwert der Grundschwingung.

LÖSUNG:

$u(t) = \sqrt{2}\,U\cos(\omega t)$ mit $U = 100V$ und $\omega = 2\pi 50Hz$.

Einsetzen $u(t)$ in die Spannungs-Strom-Kennlinie

$$\frac{i}{1A} = 1 + \frac{u}{20V} + \left(\frac{u}{50V}\right)^2$$

liefert

$$\frac{i}{1A} = 1 + \frac{\sqrt{2}\,U\cos(\omega t)}{20V} + \frac{2U^2\cos^2(\omega t)}{2500V^2}.$$

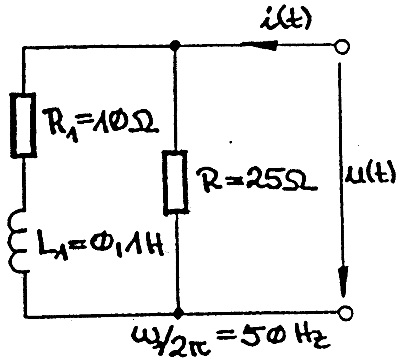
Mit $\underline{\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}[1+\cos(2\alpha)]}$ folgt

$$i = 1A + \frac{U^2}{2500V^2}1A + \frac{\sqrt{2}\,U}{20V}1A\cos(\omega t) + \frac{U^2}{2500V^2}1A\cos(2\omega t).$$

$$\underline{i(t) = \underbrace{5A}_{\text{Gleichanteil}} + \underbrace{\sqrt{2}\,5A\cos(\omega t)}_{\text{Grundschwingung}} + \underbrace{4A\cos(2\omega t)}_{\text{1. Oberschwingung}}}$$

$$\underline{\underline{\frac{\text{Effektivwert der ersten Oberschwingung}}{\text{Effektivwert der Grundschwingung}}}} = \frac{\frac{4A}{\sqrt{2}}}{5A} = \underline{\underline{\frac{4}{5}\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}566}}.$$

Oberwellenbehafteter Strom:



An die dargestellte Schaltung wird eine Eingangsspannung $u(t) = 30V \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + 55V \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(3 \cdot \omega_1 \cdot t - \pi / 6)$ gelegt.

Berechnen Sie den Zeitverlauf $i(t)$ und den Effektivwert I_{eff} des Stromes.

LÖSUNG:

Zeitverlauf:

$$u(t) = Re[30V\sqrt{2}\, e^{j\omega_1 t}] + Re[55V\sqrt{2}\, e^{j\omega_1 3t - j\frac{\pi}{6}}]$$

$$\underline{Z} = \frac{R(R_1 + j\omega L_1)}{R + R_1 + j\omega L_1} = \underline{Z}(\omega)$$

$\hat{U}_1 = 1 \cdot e^{j0}$

$$\underline{\hat{I}}_1(\omega_1) = \frac{\hat{U}_1(\omega_1)}{\underline{Z}(\omega_1)} = \frac{30V\sqrt{2}}{\frac{R(R_1 + j\omega_1 L_1)}{R + R_1 + j\omega_1 L_1}} = 2{,}42A\, e^{-j0{,}531}$$

$$\underline{\hat{I}}_3(3\omega_1) = \frac{\hat{U}_3(3\omega_1)}{\underline{Z}(3\omega_1)} = \frac{55V\sqrt{2}\, e^{-j\frac{\pi}{6}}}{\frac{R(R_1 + j3\omega_1 L_1)}{R + R_1 + j3\omega_1 L_1}} = 3{,}3A\, e^{-j0{,}25}\, e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

$$i(t) = Re[\underline{I}_1 e^{j\omega_1 t}] + Re[\underline{I}_3 e^{j3\omega_1 t}]$$

$$i(t) = 2{,}42A \cos(\omega_1 t - 0{,}531) + 3{,}3A \cos(3\omega_1 t - 0{,}774)$$

Effektivwert:

$$I_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(2{,}42A)^2 + (3{,}3A)^2} = 4{,}093A/\sqrt{2} = 2{,}894A$$

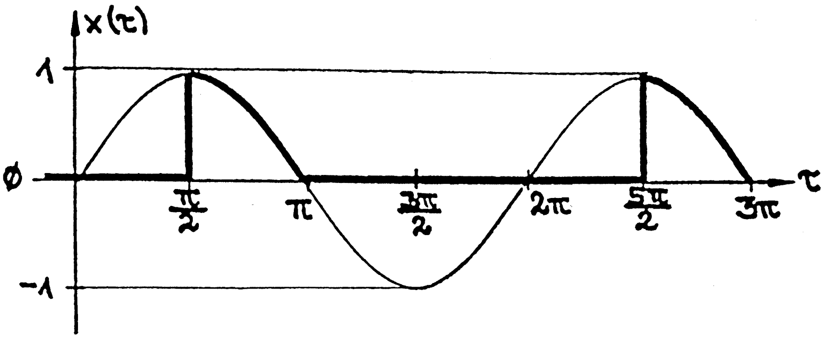
$180° = \pi$ rad

$30° = x$ rad

$x = \frac{30\pi}{180}$

$\frac{180}{\pi} = \frac{30}{x}$

Phasenanschnitt:



Durch Phasenanschnitt wird die dargestellte Form eines periodischen Stromverlaufes erzeugt. Wie groß ist

(*i*) der Gleichanteil $\overline{X}$ von $x(\tau)$?

(*ii*) die Amplitude der 1. (~~nichtverschwindenden~~) Oberschwingung ?

LÖSUNG:

$x(\tau)$ ist ein 2π-periodisches Signal.

(i) $$\overline{X} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(\tau)\,d\tau = -\frac{\cos(\tau)}{2\pi}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}.$$

(ii) Die Fourier-Koeffizienten werden über ihr Definitionsintegral berechnet.

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\tau)e^{-jk\tau}\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{e^{j\tau}-e^{-j\tau}}{j2}e^{-jk\tau}\,d\tau$$

$$c_k = \frac{1}{j4\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{j(1-k)\tau}\,d\tau - \frac{1}{j4\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-j(1+k)\tau}\,d\tau$$

$$c_k = \frac{1}{j4\pi}\,\frac{e^{j(1-k)\tau}}{j(1-k)}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{1}{j4\pi}\,\frac{e^{-j(1+k)\tau}}{-j(1+k)}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

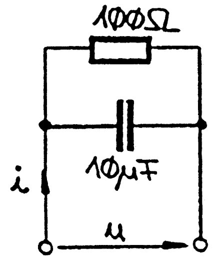
$$c_k = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{j(1-k)\frac{\pi}{2}}-e^{j(1-k)\pi}}{1-k} - \frac{e^{-j(1+k)\frac{\pi}{2}}-e^{-j(1+k)\pi}}{1+k}\right]$$

$$c_2 = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{0-j+1+0}{-1} + \frac{0-j+1+0}{3}\right] = \frac{1}{4\pi}\left[-1+j+\frac{1}{3}-j\frac{1}{3}\right]$$

$$c_2 = \frac{1}{4\pi}\left[-\frac{2}{3}+j\frac{2}{3}\right] = \frac{1}{6\pi}[-1+j].$$

Die Amplitude der 1. nichtverschwindenden Oberwelle $(k=2)$ ist somit $\hat{X}_2 = 2|c_2| = \frac{\sqrt{2}}{3\pi}$.

RC-Parallelschaltung 2:



In der Schaltung wird der Strom

$$i(t) = 0{,}8\,A + 1{,}2\,A \cdot \cos(\omega \cdot t) + 1{,}5\,A \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t + \pi/4)\ ,$$
$$\omega / 2\pi = 50\,Hz\ .$$

eingeprägt.
Berechnen Sie den Effektivwertbetrag der Spannung u.

LÖSUNG:

$$\underline{Z}(j\omega) = \frac{\frac{R}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{1 + j\omega CR}\ ,\ R = 1ØØ\,\Omega\ ,\ C = 1Ø\,\mu F\ ,\ \omega = 2\pi 5Ø\,Hz$$

$$i(t) = I_0 + \hat{I}_1 \cos(\omega t) + \hat{I}_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) = I_0 + Re[\hat{I}_1 e^{j\omega t}] + Re[\hat{I}_2 e^{j\frac{\pi}{4}} e^{j2\omega t}]$$

mit $I_0 = Ø{,}8A$; $\hat{I}_1 = 1{,}2A$; $\hat{I}_2 = 1{,}5A$ folgt $u(t)$.

Die Spannung u folgt aus dem Überlagerungsprinzip:

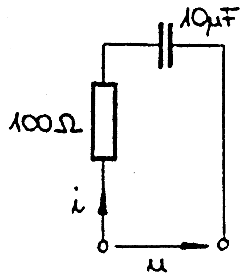
$$u(t) = \underline{Z}(jØ) I_0 + Re[\underline{Z}(j\omega)\hat{I}_1 e^{j\omega t}] + Re[\underline{Z}(j2\omega)\hat{I}_2 e^{j(\omega t + \frac{\pi}{4})}]$$

$$u(t) = 8Ø\,V + 114{,}483\,V \cos(\omega t - Ø{,}3Ø4) + 127\,V \cos(2\omega t + Ø{,}224)$$

Der Effektivwert beträgt

$$\underline{\underline{U = \sqrt{(8ØV)^2 + (114{,}483V/\sqrt{2})^2 + (127V/\sqrt{2})^2} = 144{,}975\,V}}\ .$$

RC-Reihenschaltung:



An der Schaltung liegt die Spannung

$u(t) = 5V \cdot \cos(\omega \cdot t) + 10V \cdot \cos(3 \cdot \omega \cdot t + \pi / 3)$,
$\omega / 2\pi = 50\,Hz$.

Berechnen Sie den Effektivwertbetrag des Stromes i.

LÖSUNG:

$\underline{Z}(j\omega) = R + \frac{1}{j\omega C} = R - \frac{j}{\omega C}$, $R = 100\Omega$, $C = 10\mu F$, $\omega = 2\pi 50\,Hz$

$u(t) = \hat{U}_1 \cos(\omega t) + \hat{U}_3 \cos(3\omega t + \frac{\pi}{3}) = \mathrm{Re}[\hat{U}_1 e^{j\omega t}] + \mathrm{Re}[\hat{U}_3 e^{j\frac{\pi}{3}} e^{j\omega t}]$

mit $\hat{U}_1 = 5V$ und $\hat{U}_3 = 10V$.

Der Strom i folgt aus dem Überlagerungsprinzip:

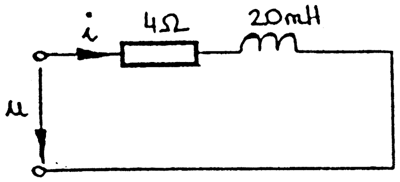
$i(t) = \mathrm{Re}\left[\frac{\hat{U}_1 e^{j\omega t}}{\underline{Z}(j\omega)}\right] + \mathrm{Re}\left[\frac{\hat{U}_3 e^{j3\omega t}}{\underline{Z}(j3\omega)}\right]$

$i(t) = 14{,}986\,mA \cos(\omega t + 1{,}266) + 68{,}587\,mA \cos(3\omega t + 0{,}815)$

Der Effektivwert beträgt

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\hat{I}_1^2 + \hat{I}_3^2} = 49{,}642\,mA .$$

RL-Reihenschaltung:



An der Schaltung liegt die Spannung

$$u(t) = 2V + 5V \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) \ ,$$
$$\omega_1 = 100 \cdot \pi s^{-1} \ .$$

Berechnen Sie den Effektivwert des Stromes *i*.

LÖSUNG:

$\underline{Z}(j\omega_1) = R + j\omega_1 L$, $R = 4\Omega$, $L = 20mH$, $\omega_1 = 100\pi s^{-1}$

$u(t) = U_0 + \hat{U}_1 \cos(\omega_1 t) = U_0 + \mathrm{Re}[\hat{U}_1 e^{j\omega_1 t}]$ mit $U_0 = 2V$ und $\hat{U}_1 = 5V$.

Der Strom i folgt aus dem Überlagerungsprinzip:

$$i(t) = \frac{U_0}{\underline{Z}(j0)} + \mathrm{Re}\left[\frac{\hat{U}_1 e^{j\omega_1 t}}{\underline{Z}(j\omega_1)}\right] = 0{,}5A + 0{,}671A\cos(\omega_1 t - 1{,}004)$$

Der Effektivwert beträgt

$$\underline{\underline{I = \sqrt{(0{,}5A)^2 + (0{,}671A/\sqrt{2})^2} = 0{,}689A}} \ .$$

Schwarzsche Ungleichung:

Für Korrelationsfunktionen gilt

$$|\varphi_{12}(\tau)| \le \sqrt{\varphi_{11}(0)\cdot\varphi_{22}(0)}\ .$$

Beweisen Sie mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|^2 \le \int_a^b |f(x)|^2 dx \int_a^b |g(x)|^2 dx$$

deren Gültigkeit.

LÖSUNG:

Die AKF und die KKF sind über die Integrale

$$\varphi_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^*(\tau')\, x_2(\tau+\tau')\, d\tau' \qquad (1)$$

$$\varphi_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^*(\tau')\, x_1(\tau+\tau')\, d\tau' \qquad (2)$$

$$\varphi_{22}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2^*(\tau')\, x_2(\tau+\tau')\, d\tau' \qquad (3)$$

definiert.

Für $\tau = \emptyset$ vereinfacht sich Gl. (2) und (3) zu

$$\varphi_{11}(\emptyset) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^*(\tau')\, x_1(\tau')\, d\tau' = \int_{-\infty}^{\infty} |x_1(\tau')|^2 d\tau' \ ,$$

nur bei $\tau = 0 \Rightarrow \varphi_{22}(0) =$

$$\varphi_{22}(\emptyset) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2^*(\tau')\, x_2(\tau')\, d\tau' = \int_{-\infty}^{\infty} |x_2(\tau')|^2 d\tau' \overset{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |x_2(\tau+\tau')|^2 d\tau' \ .$$

Einsetzen in die Schwarzsche Ungleichung mit $f(x) = x_1(\tau')$ und $g(x) = x_2(\tau+\tau')$ und Spezialisierung auf reelle Signale ergibt

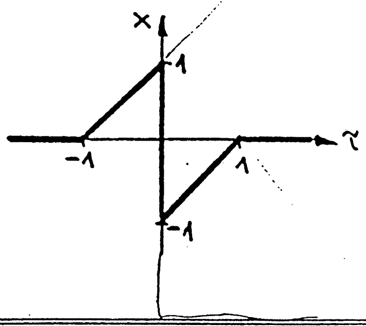
$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau')\, x_2(\tau+\tau')\, d\tau'\right|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} |x_1(\tau')|^2 d\tau' \int_{-\infty}^{\infty} |x_2(\tau')|^2 d\tau' \ .$$

Diese Beziehung ist identisch mit

$$|\varphi_{12}(\tau)| \le \sqrt{\varphi_{11}(\emptyset)\, \varphi_{22}(\emptyset)}$$

womit der Beweis erbracht wurde.

Signalenergie:



Berechnen Sie die Signalenergie des dargestellten Signals.

LÖSUNG:

Wir erhalten die Signalenergie durch auswerten der Parseval-Formel im Zeitbereich.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|^2 d\tau = 2\int_{-1}^{0} |(\tau+1)|^2 d\tau = 2\int_{-1}^{0} (\tau+1)^2 d\tau = 2\,\frac{(\tau+1)^3}{3}\Big|_{-1}^{0} = \frac{2}{3}$$

$\tau^2 + 2\tau + 1$

$\frac{\tau^3}{3} + \frac{2\tau^2}{2} + \tau$

Signalenergie 2:

Berechnen Sie die Signalenergie von $x(\tau) = \dfrac{\sin(\tau)}{\tau}$.

Hinweis: $\mathcal{F}\left[\dfrac{\sin(\tau)}{\tau}\right] = \begin{cases} \pi \text{ für } |v| < 1 \\ 0 \text{ für } |v| > 1 \end{cases}$

LÖSUNG:

Wir erhalten die Signalenergie durch auswerten der Parseval-Formel

~ Frequenzbereich.

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\nu)|^2 d\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \pi^2 d\nu = \frac{1}{2\pi} \pi^2 \nu \Big|_{-1}^{1} = \pi$$

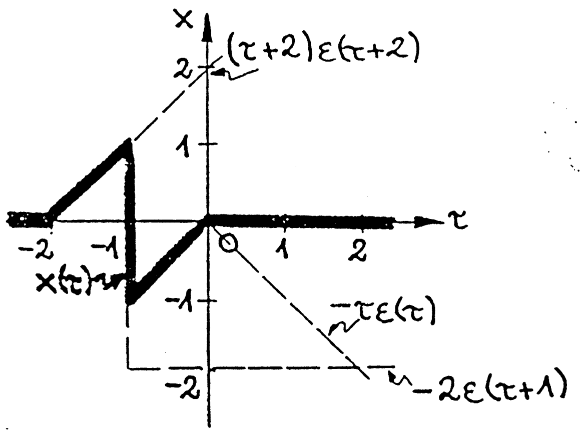
Signalenergie 3:

Skizzieren Sie den Verlauf des Signals

$$x(\tau) = (\tau+2)\cdot\varepsilon(\tau+2) - 2\cdot\varepsilon(\tau+1) - \tau\cdot\varepsilon(\tau)$$

und berechnen Sie seine Signalenergie.

LÖSUNG:



Die Signalenergie wird aus der Parseval-Gleichung im Zeitbereich berechnet.

$$\underline{\underline{E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|^2 d\tau}} = 2\int_{-2}^{-1} (\tau+2)^2 d\tau = 2\,\frac{(\tau+2)^3}{3}\Bigg|_{-2}^{-1} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

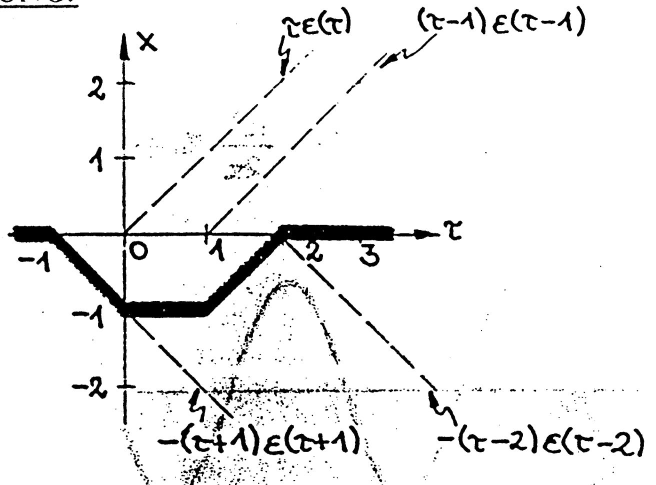
Signalenergie 5:

Skizzieren Sie den Verlauf des Signals

$$x(\tau) = -(\tau+1)\cdot\varepsilon(\tau+1) + \tau\cdot\varepsilon(\tau) + (\tau-1)\cdot\varepsilon(\tau-1) - (\tau-2)\cdot\varepsilon(\tau-2)$$

und berechnen Sie seine Signalenergie.

LÖSUNG:



Die Signalenergie wird aus der Parseval-Gleichung im Zeitbereich berechnet.

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{\int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|^2 d\tau}} = 2\int_{-1}^{0} (-(\tau+1))^2 d\tau + 2\int_{0}^{1/2} (-1)^2 d\tau$$

$$E = 2\,\frac{(\tau+1)^3}{3}\Bigg|_{-1}^{0} + 2\tau\Bigg|_{0}^{1/2} = \frac{2}{3} + 1 = \underline{\underline{\frac{5}{3}}}$$

Spektrum eines Signals:

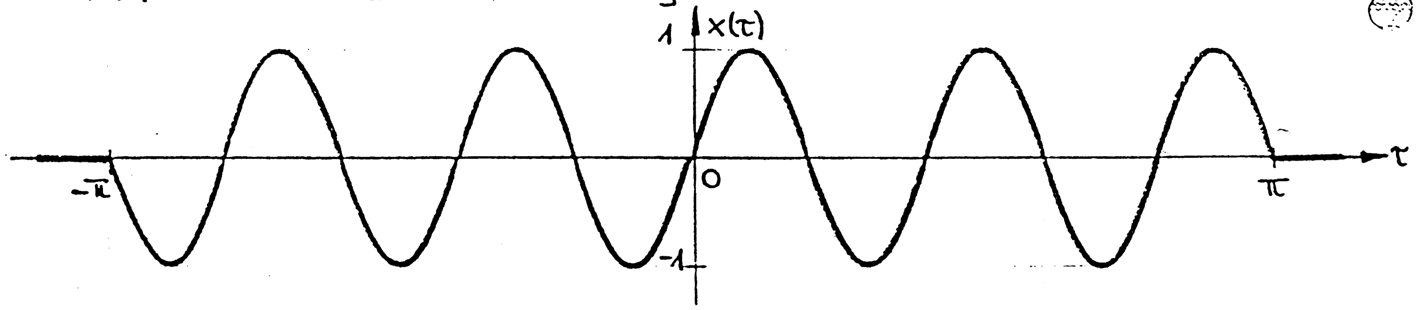
Skizzieren Sie das Signal $x(\tau) = sin(5 \cdot \tau) \cdot rect(\tau / (2\pi))$ und berechnen Sie sein Spektrum.

LÖSUNG:

Das Spektrum von $x(\tau)$ erhält man durch Faltung der Teilspektren im Frequenzbereich.

$$x(\tau) = \sin(5\tau)\, \mathrm{rect}\left(\frac{\tau}{2\pi}\right) \quad , \quad \mathrm{rect}\left(\frac{\tau}{2\pi}\right) = 1 \quad \text{für} \quad \frac{|\tau|}{2\pi} < \frac{1}{2} \rightarrow |\tau| < \pi$$

$$x(\tau) = \sin(5\tau)\left[\varepsilon(\tau+\pi) - \varepsilon(\tau-\pi)\right]$$



Mit Hilfe von Tab. 3.1

Zeile 4: $\mathrm{rect}(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{\sin\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\frac{\nu}{2}}$

Zeile 9: $\sin(\nu_1 \tau) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \ -j\pi\left[\delta(\nu-\nu_1) - \delta(\nu+\nu_1)\right]$

und dem Zeitdehnungssatz $x(a\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{1}{|a|} X\left(j\dfrac{\nu}{a}\right)$ folgt

$$\mathrm{rect}\left(\frac{\tau}{2\pi}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet\ 2\pi \frac{\sin\left(\frac{2\pi\nu}{2}\right)}{\frac{2\pi\nu}{2}} = 2\pi \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} \quad \text{und} \quad \sin(5\tau) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet\ -j\pi[\delta(\nu-5) - \delta(\nu+5)]$$

Faltung im Frequenzbereich liefert

$$X(j\nu) = \frac{1}{\cancel{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -j\cancel{\pi}\left[\delta(\nu-5-\nu') - \delta(\nu+5-\nu')\right] \cancel{2\pi} \frac{\sin(\pi\nu')}{\cancel{\pi}\nu'}\, d\nu'$$

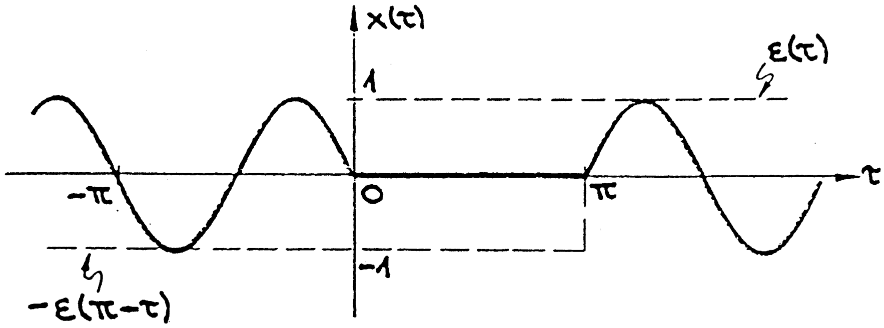
$$\underline{\underline{X(j\nu)}} = -j\left(\frac{\sin(\pi[\nu-5])}{\nu-5} - \frac{\sin(\pi[\nu+5])}{\nu+5}\right) = \underline{\underline{j\pi\left(si(\pi[\nu+5]) - si(\pi[\nu-5])\right)}}$$

Spektrum eines Signals 2:

Skizzieren Sie das Signal $x(\tau) = sin(2\cdot\tau)\cdot\varepsilon(\tau) - sin(2\cdot\tau)\cdot\varepsilon(\pi-\tau)$ und berechnen Sie sein Spektrum.

LÖSUNG:

$$x(\tau) = \sin(2\tau)\,[\,\varepsilon(\tau) - \varepsilon(\pi-\tau)\,]$$



Aus Tab. 3.1 Zeile 12 folgt

$$\sin(\nu_1\tau)\,\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{\pi}{j2}[\delta(\nu-\nu_1) - \delta(\nu+\nu_1)] + \frac{\nu_1}{\nu_1^2-\nu}\ .$$

Das Spektrum von $x(\tau)$ erhalten wir durch <u>Überlagerung der</u> beiden <u>Teilspektren von $-\sin(2\tau)\varepsilon(\tau)$ und $\sin(2(\tau-\pi))\,\varepsilon(\tau-\pi)$</u>. Mit Hilfe des Zeitverschiebungs= satzes $x(\tau-\tau_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\ e^{-j\nu\tau_0}X(j\nu)$ erhalten wir

$$X(j\nu) = -\frac{\pi}{j2}[\delta(\nu-2)-\delta(\nu+2)] - \frac{2}{4-\nu^2} + e^{-j\nu\pi}\left\{\frac{\pi}{j2}[\delta(\nu-2)-\delta(\nu+2)] + \frac{2}{4-\nu^2}\right\}$$

$$\underline{\underline{X(j\nu) = \left\{\frac{\pi}{j2}[\delta(\nu-2)-\delta(\nu+2)] + \frac{2}{4-\nu^2}\right\}[e^{-j\nu\pi} - 1]}}\ .$$

$$\delta(-\tau) = \delta(\tau)$$

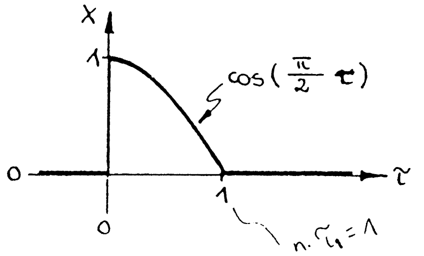
$$-\sin(2\tau)\,.\,\varepsilon(\pi-\tau) = \sin(-2\tau)\,.\,\varepsilon[-(\tau-\pi)] = \sin(-2\tau+2\pi)\,.\,\varepsilon(-(\tau-\pi))$$

$$= \sin[-2(\tau-\pi)]\,.\,\varepsilon(-(\tau-\pi))$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet\ e^{-j\nu\pi}\left[\frac{\pi}{j2}\cdot[\underbrace{\delta(-(\nu+2))}_{=\delta(\nu+2)} - \underbrace{\delta(-(\nu-2))}_{=\delta(\nu-2)}] + \frac{2}{4-\nu^2}\right]$$

$$= e^{-j\nu\pi}\left[-\frac{\pi}{2j}[\delta(\nu-2) - \delta(\nu+2)] + \frac{2}{4-\nu^2}\right]$$

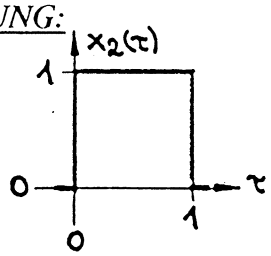
Spektrum eines Signals 3:



$rect(\tau - \frac{1}{2})$

Berechnen Sie die Spektralfunktion des dargestellten Signalverlaufs.

LÖSUNG:



$$\left.\begin{aligned} x_1(\tau) &= \cos(\tfrac{\pi}{2}\tau) \\ x_2(\tau) &= rect(\tau - \tfrac{1}{2}) \end{aligned}\right\} \quad x(\tau) = x_1(\tau)\, x_2(\tau)$$

Mit Hilfe von Tab. 3.1

Zeile 4: $rect[\tau] \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{\sin(\frac{\nu}{2})}{\frac{\nu}{2}}$

Zeile 8: $\cos(\nu_1 \tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \pi[\delta(\nu - \nu_1) + \delta(\nu + \nu_1)]$

und dem Zeitverschiebungssatz $x(\tau - \tau_0) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-j\nu\tau_0} X(j\nu)$ folgt

$$X_2(j\nu) = e^{-j\frac{\nu}{2}} \frac{\sin(\frac{\nu}{2})}{\frac{\nu}{2}} .$$

Das Spektrum von $x(\tau)$ erhält man durch Faltung der Teilspektren im Frequenzbereich.

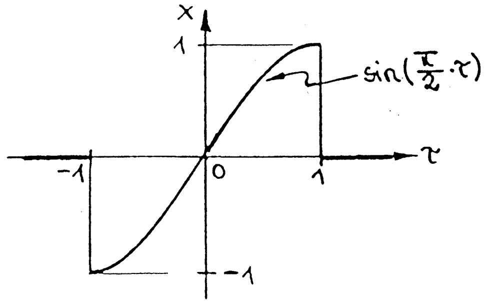
$$X(j\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \pi[\delta(\nu - \tfrac{\pi}{2} - \nu') + \delta(\nu + \tfrac{\pi}{2} - \nu')] e^{-j\frac{\nu'}{2}} \frac{\sin(\frac{\nu'}{2})}{\frac{\nu'}{2}} d\nu'$$

$$X(j\nu) = \frac{1}{2}\left[e^{-j\frac{\nu - \frac{\pi}{2}}{2}} \frac{\sin(\frac{\nu - \frac{\pi}{2}}{2})}{\frac{\nu - \frac{\pi}{2}}{2}} + e^{-j\frac{\nu + \frac{\pi}{2}}{2}} \frac{\sin(\frac{\nu + \frac{\pi}{2}}{2})}{\frac{\nu + \frac{\pi}{2}}{2}} \right]$$

$$\underline{\underline{X(j\nu) = \frac{1}{2}\left[e^{-j\frac{\nu - \frac{\pi}{2}}{2}} si(\tfrac{\nu - \frac{\pi}{2}}{2}) + e^{-j\frac{\nu + \frac{\pi}{2}}{2}} si(\tfrac{\nu + \frac{\pi}{2}}{2}) \right]}} .$$

Spektrum eines Signals 4:

rect ($\frac{\tau}{2}$)



Berechnen Sie die Spektralfunktion des dargestellten Signalverlaufs.

LÖSUNG:

$\underline{x_1(\tau) = \sin(\frac{\pi}{2}\tau)}$ $\quad$ $\underline{x_2(\tau) = \mathrm{rect}(\frac{\tau}{2})}$ $\quad$ $\underline{x(\tau) = x_1(\tau)\, x_2(\tau)}$

Mit Hilfe von Tab. 3.1

Zeile 4: $\mathrm{rect}(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, si(\frac{\nu}{2})$

Zeile 9: $\sin(\nu_1\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, -j\pi[\delta(\nu-\nu_1) - \delta(\nu+\nu_1)]$

und dem Zeitdehnungssatz $x(a\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{|a|} X(j\frac{\nu}{a})$ folgt

$\mathrm{rect}(\frac{\tau}{2}) \circ\!\!-\!\!\bullet\, 2\, si(\nu)$

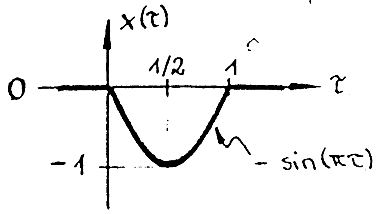
$\sin(\frac{\pi}{2}\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, -j\pi[\delta(\nu-\frac{\pi}{2}) - \delta(\nu+\frac{\pi}{2})]$

Das Spektrum von $x(\tau)$ erhält man durch Faltung der Teilspektren $X_1(j\nu)$ und $X_2(j\nu)$ im Frequenzbereich.

$$X(j\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -j\pi[\delta(\nu-\frac{\pi}{2}-\nu') - \delta(\nu+\frac{\pi}{2}-\nu')]\, 2\, si(\nu')\, d\nu'$$

$$\underline{\underline{X(j\nu)}} = -j[si(\nu-\frac{\pi}{2}) - si(\nu+\frac{\pi}{2})] = \underline{\underline{j[si(\nu+\frac{\pi}{2}) - si(\nu-\frac{\pi}{2})]}}\,.$$

Spektrum eines Signals 5:



Berechnen Sie die Spektralfunktion des angegebenen Signals.

LÖSUNG:

$x_1(\tau) = -\sin(\pi\tau)$ $\qquad$ $x_2(\tau) = \mathrm{rect}(\tau - \frac{1}{2})$ $\qquad$ $x(\tau) = x_1(\tau)x_2(\tau)$

Mit Hilfe von Tab. 3.1

Zeile 4: $\mathrm{rect}(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathrm{si}(\frac{\nu}{2})$

Zeile 9: $\sin(\nu_1\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\ -j\pi\,[\delta(\nu-\nu_1) - \delta(\nu+\nu_1)]$

und dem Zeitdehnungssatz $x(\tau-\tau_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\ e^{-j\nu\tau_0}X(j\nu)$ folgt

$$\mathrm{rect}(\tau - \tfrac{1}{2}) \circ\!\!-\!\!\bullet\ e^{-j\frac{\nu}{2}}\,\mathrm{si}(\tfrac{\nu}{2})$$

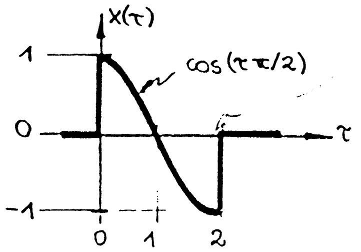
$$-\sin(\pi\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\ j\pi\,[\delta(\nu-\pi) - \delta(\nu+\pi)]$$

Das Spektrum von $x(\tau)$ erhält man durch Faltung der Teilspektren $X_1(j\nu)$ und $X_2(j\nu)$ im Frequenzbereich.

$$X(j\nu) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} j\pi\,[\delta(\nu-\pi-\nu') - \delta(\nu+\pi-\nu')]\,e^{-j\frac{\nu'}{2}}\,\mathrm{si}(\tfrac{\nu'}{2})\,d\nu'$$

$$X(j\nu) = \frac{j}{2}\left[e^{-j\frac{\nu-\pi}{2}}\,\mathrm{si}(\tfrac{\nu-\pi}{2}) - e^{-j\frac{\nu+\pi}{2}}\,\mathrm{si}(\tfrac{\nu+\pi}{2})\right].$$

Spektrum eines Signals 6:



Berechnen Sie die Spektralfunktion des angegebenen Signals.

LÖSUNG:

$x_1(\tau) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\tau\right) \qquad x_2(\tau) = \mathrm{rect}\left[\frac{\tau}{2} - \frac{1}{2}\right] = \mathrm{rect}\left[\frac{1}{2}(\tau - 1)\right]$

$x(\tau) = x_1(\tau)\, x_2(\tau)$

Mit Hilfe von Tab. 3.1

Zeile 4: $\mathrm{rect}(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathrm{si}\left(\frac{\nu}{2}\right)$

Zeile 8: $\cos(\nu_1\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \pi[\delta(\nu-\nu_1) + \delta(\nu+\nu_1)]$

dem Zeitverschiebungssatz $x(\tau-\tau_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\ e^{-j\nu\tau_0} X(j\nu)$ und

dem Zeitdehnungssatz $x(a\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\nu}{a}\right)$ folgt

$\mathrm{rect}\left[\frac{1}{2}(\tau-1)\right] \circ\!\!-\!\!\bullet\ 2\,\mathrm{si}(\nu)\, e^{-j\nu}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}\tau\right) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \pi\left[\delta\left(\nu - \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\nu + \frac{\pi}{2}\right)\right]$

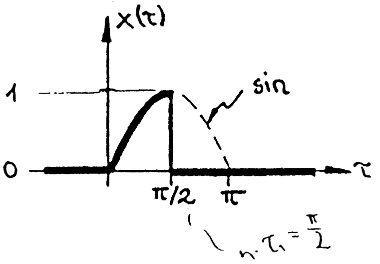
Das Spektrum von $x(\tau)$ erhält man durch Faltung der Teilspektren $X_1(j\nu)$ und $X_2(j\nu)$ im Frequenzbereich.

$$X(j\nu) = \frac{1}{\cancel{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cancel{\pi}\left[\delta\left(\nu - \frac{\pi}{2} - \nu'\right) + \delta\left(\nu + \frac{\pi}{2} - \nu'\right)\right] \cancel{2}\,\mathrm{si}(\nu')\, e^{-j\nu'}\, d\nu'$$

$$X(j\nu) = \mathrm{si}\left(\nu - \frac{\pi}{2}\right) e^{-j\left(\nu - \frac{\pi}{2}\right)} + \mathrm{si}\left(\nu + \frac{\pi}{2}\right) e^{-j\left(\nu + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\underline{\underline{X(j\nu) = j\left[\mathrm{si}\left(\nu - \frac{\pi}{2}\right) - \mathrm{si}\left(\nu + \frac{\pi}{2}\right)\right] e^{-j\nu} = \frac{-j2\nu\cos(\nu)}{\nu^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\, e^{-j\nu}}}$$

Spektrum eines Signals 7:



Berechnen Sie die Spektralfunktion des angegebenen Signals.

LÖSUNG:

$x_1(\tau)=\sin(\tau) \qquad x_2(\tau)=\mathrm{rect}\left[\frac{2}{\pi}\left(\tau-\frac{\pi}{4}\right)\right] \qquad x(\tau)=x_1(\tau)\,x_2(\tau)$

Mit Hilfe von Tab. 3.1

Zeile 4: $\mathrm{rect}(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathrm{si}\left(\frac{\nu}{2}\right)$

Zeile 9: $\sin(\nu_1\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet -j\pi\left[\delta(\nu-\nu_1)-\delta(\nu+\nu_1)\right]$,

dem Zeitverschiebungssatz $x(\tau-\tau_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\ e^{-j\nu\tau_0}X(j\nu)$ und

dem Zeitdehnungssatz $x(a\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{|a|}X\left(j\frac{\nu}{a}\right)$ folgt

$$\mathrm{rect}\left[\frac{2}{\pi}\left(\tau-\frac{\pi}{4}\right)\right] \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{\pi}{2}\,\mathrm{si}\left(\frac{\pi}{4}\nu\right)e^{-j\nu\frac{\pi}{4}}$$

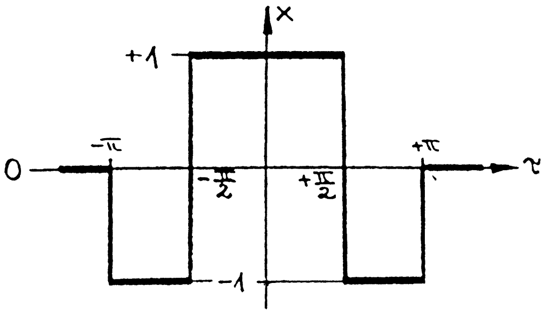
$$\sin(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet -j\pi\left[\delta(\nu-1)-\delta(\nu+1)\right].$$

Das Spektrum von $x(\tau)$ erhält man durch Faltung der Teilspektren $X_1(j\nu)$ und $X_2(j\nu)$ im Frequenzbereich.

$$X(j\nu)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}-j\pi\left[\delta(\nu-1-\nu')-\delta(\nu+1-\nu')\right]\frac{\pi}{2}\,\mathrm{si}\left(\frac{\pi}{4}\nu'\right)e^{-j\nu'\frac{\pi}{4}}\,d\nu'$$

$$\underline{\underline{X(j\nu)=-\frac{j\pi}{4}\left[\mathrm{si}\left(\frac{\pi}{4}[\nu-1]\right)e^{-j\frac{\pi}{4}(\nu-1)}-\mathrm{si}\left(\frac{\pi}{4}[\nu+1]\right)e^{-j\frac{\pi}{4}(\nu+1)}\right]}}$$

Spektrum eines Signals 8:



Berechnen Sie die Spektralfunktion des angegebenen Signals.

LÖSUNG:

Die Spektralfunktion von $x(\tau)$ erhält man beispielsweise durch auswerten des Transformationsintegrals.

$$X(j\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\nu\tau} d\tau = \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} -e^{-j\nu\tau} d\tau + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-j\nu\tau} d\tau + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -e^{-j\nu\tau} d\tau$$

$$X(j\nu) = \frac{e^{-j\nu\tau}}{j\nu}\Bigg|_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} + \frac{e^{-j\nu\tau}}{-j\nu}\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{e^{-j\nu\tau}}{j\nu}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$X(j\nu) = \frac{e^{j\nu\frac{\pi}{2}} - e^{j\nu\pi} + e^{j\nu\frac{\pi}{2}} - e^{-j\nu\frac{\pi}{2}} + e^{-j\nu\pi} - e^{-j\nu\frac{\pi}{2}}}{j\nu} = \frac{2(e^{j\nu\frac{\pi}{2}} - e^{-j\nu\frac{\pi}{2}}) - (e^{j\nu\pi} - e^{-j\nu\pi})}{j\nu}$$

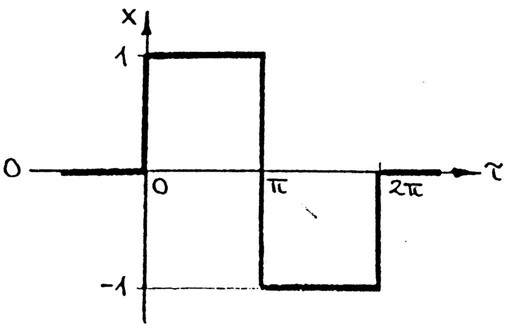
$$\underline{\underline{X(j\nu)}} = 4\,\frac{\sin(\nu\frac{\pi}{2})}{\nu} - 2\,\frac{\sin(\nu\pi)}{\nu} = \underline{\underline{\frac{4}{\nu}\sin(\tfrac{\pi}{2}\nu) - \frac{2}{\nu}\sin(\pi\nu)}} = \pi[2si(\tfrac{\pi}{2}\nu) - 2si(\pi\nu)]$$

$$\underline{\underline{X(j\nu) = 2\pi[\,si(\tfrac{\pi}{2}\nu) - si(\pi\nu)]}}$$

oder $$X(j\nu) = 2\cdot\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot\cos(\nu\tau)\,d\tau = 2\cdot\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos(\nu\tau)\cdot d\tau - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos(\nu\tau)\cdot d\tau =$$

$$= 4\cdot\frac{\sin(\nu\frac{\pi}{2})}{\nu} - 2\cdot\frac{\sin(\nu\pi)}{\nu} = - - - - -$$

Spektrum eines Signals 9:



Berechnen Sie die Spektralfunktion des angegebenen Signals.

LÖSUNG:

Die Spektralfunktion von $x(\tau)$ erhält man beispielsweise durch auswerten des Transformationsintegrals.

$$X(j\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\nu\tau}\, d\tau = \int_{0}^{\pi} e^{-j\nu\tau}\, d\tau + \int_{\pi}^{2\pi} -e^{-j\nu\tau}\, d\tau = \left.\frac{e^{-j\nu\tau}}{-j\nu}\right|_{0}^{\pi} + \left.\frac{e^{-j\nu\tau}}{j\nu}\right|_{\pi}^{2\pi}$$

$$X(j\nu) = \frac{1-e^{-j\nu\pi}}{j\nu} + \frac{e^{-j\nu 2\pi} - e^{-j\nu\pi}}{j\nu} = 2\frac{\left(1-e^{-j\nu\pi}\right)\cdot e^{j\nu\pi}}{j\nu} = 4\,\frac{e^{j\nu\frac{\pi}{2}} - e^{-j\nu\frac{\pi}{2}}}{j2\nu}\, e^{-j\nu\frac{\pi}{2}}$$

$$X(j\nu) = \frac{4}{\nu}\sin\left(\frac{\pi}{2}\nu\right) e^{-j\nu\frac{\pi}{2}} = 2\pi\, si\left(\frac{\pi}{2}\nu\right) e^{-j\nu\frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{e^{-j\nu 2\pi} \neq 1}$$

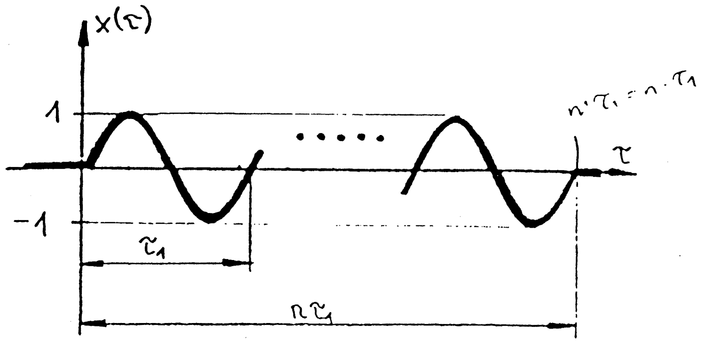
$$\boxed{\frac{e^{j\nu\frac{\pi}{2}} - e^{-j\nu\frac{\pi}{2}}}{j2} = \sin\left(\nu\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\cancel{X(j\nu) = 2\left(1-e^{-j\nu\pi}\right)\cdot e^{j\nu\pi}}\left(1-\right.$$

$$X(j\nu) = \frac{1-e^{-j\nu\pi}}{j\nu} + \frac{\left(e^{-j\nu\pi}-1\right)\cdot e^{-j\nu\pi}}{j\nu} = \frac{\left(1-e^{-j\nu\pi}\right)\cdot\left(1-e^{-j\nu\pi}\right)}{j\nu} =$$

$$=$$

Spektrum einer zeitbegrenzten Sinusschwingung:



Berechnen Sie das Spektrum der zeitbegrenzten Sinusschwingung.

LÖSUNG:

$$x_1(\tau) = \sin(2\pi \frac{\tau}{\tau_1}) \qquad x_2(\tau) = \mathrm{rect}\left[\frac{\tau}{n\tau_1} - \frac{1}{2}\right] = \mathrm{rect}\left[\frac{1}{n\tau_1}\left(\tau - \frac{n\tau_1}{2}\right)\right]$$

$$x(\tau) = x_1(\tau)\, x_2(\tau)$$

Mit Hilfe von Tab. 3.1

Zeile 4: $\mathrm{rect}(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\ si(\frac{\nu}{2})$

Zeile 9: $\sin(\nu_1 \tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\ -j\pi[\delta(\nu - \nu_1) - \delta(\nu + \nu_1)]$

dem Zeitverschiebungssatz $x(\tau - \tau_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\ e^{-j\nu\tau_0} X(j\nu)$ und

dem Zeitdehnungssatz $x(a\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{|a|} X(j\frac{\nu}{a})$ folgt

$$\mathrm{rect}\left[\frac{1}{n\tau_1}\left(\tau - \frac{n\tau_1}{2}\right)\right] \circ\!\!-\!\!\bullet\ n\tau_1\, si\left(\frac{n\tau_1\nu}{2}\right) e^{-j\nu\frac{n\tau_1}{2}}$$

$$\sin(2\pi\frac{\tau}{\tau_1}) \circ\!\!-\!\!\bullet\ -j\pi\left[\delta\left(\nu - \frac{2\pi}{\tau_1}\right) - \delta\left(\nu + \frac{2\pi}{\tau_1}\right)\right]$$

Das Spektrum von $x(\tau)$ erhält man durch Faltung der Teilspektren $X_1(j\nu)$ und $X_2(j\nu)$ im Frequenzbereich.

$$X(j\nu) = \frac{1}{2\cancel{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -j\cancel{\pi}\left[\delta\left(\nu - \frac{2\pi}{\tau_1} - \nu'\right) - \delta\left(\nu + \frac{2\pi}{\tau_1} - \nu'\right)\right] n\tau_1\, si\left(\frac{n\tau_1\nu'}{2}\right) e^{-j\nu'\frac{n\tau_1}{2}}\, d\nu'$$

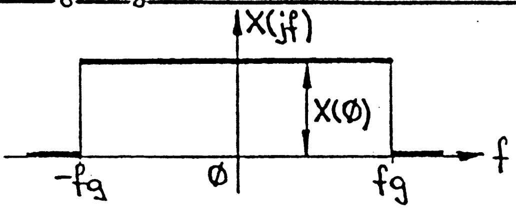
$$\underline{\underline{X(j\nu) = -\frac{jn\tau_1}{2}\left[si\left(\frac{n\tau_1}{2}\left[\nu - \frac{2\pi}{\tau_1}\right]\right) e^{-j\frac{n\tau_1}{2}\left[\nu - \frac{2\pi}{\tau_1}\right]} - si\left(\frac{n\tau_1}{2}\left[\nu + \frac{2\pi}{\tau_1}\right]\right) e^{-j\frac{n\tau_1}{2}\left[\nu + \frac{2\pi}{\tau_1}\right]}\right]}}$$

Stoßantwort eines idealen Tiefpaßfilters:

Berechnen Sie formal die Stoßantwort eines idealen Tiefpaßfilters der Grenzfrequenz f_g. Skizzieren Sie das Ergebnis und machen Sie deutlich, daß ein ideales Tiefpaßfilter ein nichtkausales System darstellt.

LÖSUNG: $\delta(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\ 1 \qquad g(\tau) = g(\tau) * \delta(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\ X(j\nu)\cdot 1$

Frequenzgang eines idealen Tiefpaßfilters:



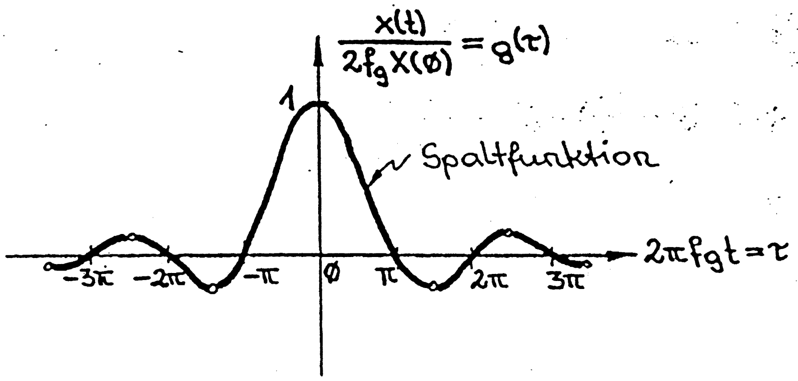
$$X(jf) = \begin{cases} X(\emptyset) & \text{für } f < |f_g| \\ \emptyset & \text{für } f > |f_g| \end{cases}$$

Inverse Fourier-Transformation liefert

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} X(jf) e^{j2\pi f t} df = \int_{-f_g}^{f_g} X(\emptyset) e^{j2\pi f t} df$$

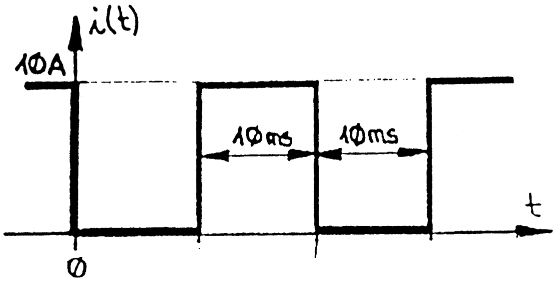
$$x(t) = X(\emptyset) \left. \frac{e^{j2\pi f t}}{j2\pi t} \right|_{-f_g}^{f_g} = X(\emptyset) \frac{e^{j2\pi f_g t} - e^{-j2\pi f_g t}}{j2\pi t}$$

$$\underline{\underline{x(t)}} = \frac{X(\emptyset)}{\pi t} \frac{e^{j2\pi f_g t} - e^{-j2\pi f_g t}}{j2} = \underline{\underline{\frac{X(\emptyset)}{\pi t} \sin(2\pi f_g t) = 2f_g X(\emptyset)\, si(2\pi f_g t) = g(t)}}$$



Die Stoßantwort ist bekanntlich die Nullzustandsantwort des Systems auf einem zum Zeitpunkt t=Ø zentrierten Eingangs-Dirac-Stoß. Wie ersichtlich ist eine Systemantwort bereits vor dem Stoß vorhanden (g(τ) verschwindet für t<Ø nicht), d.h. ein ideales Tiefpaßfilter stellt ein nichtkausales System dar.

tromrichtersignal:



Ein Stromrichter erzeugt unipolare (einseitige) Stromblöcke der Größe *10 A* und der Dauer *10 ms* mit stromfreien Pausen der Dauer *10 ms*.
Berechnen Sie die Amplituden der beiden Oberwellen, die der Frequenz *500 Hz* am nächsten liegen.

ich glaube es ist falsch $\hat{\underline{I}}_k = \frac{2}{T_1}\int_0^{T_1} i(t)\cdot e^{-jk\omega_1 t}\,dt$ $\qquad c_k = \frac{1}{T_1}\cdot\int_0^{T_1} i(t)\cdot e^{-jk\omega_1 t}\,dt$

ÖSUNG:

e Fourier-Koeffizienten des Signals ergeben sich in chtbezogener Form zu:

$$C_k = \frac{2}{T_1}\int_0^{T_1} i(t)\, e^{-jk\omega_1 t}\, dt = \frac{2}{T_1}\int_0^{T_1/2} 0\, dt + \frac{2}{T_1}\int_{T_1/2}^{T_1} I e^{-jk\omega_1 t}\, dt$$

$$C_k = \frac{2I}{T_1}\,\frac{e^{-jk\omega_1 t}}{-jk\omega_1}\Bigg|_{T_1/2}^{T_1} = \frac{2I}{T_1}\,\frac{e^{-jk\frac{2\pi}{T_1}\frac{T_1}{2}} - e^{-jk\frac{2\pi}{T_1}T_1}}{jk\frac{2\pi}{T_1}} = \frac{I}{jk\pi}\left(e^{-jk\pi} - e^{-jk2\pi}\right)$$

$$\underline{C_k = \frac{I}{jk\pi}\left[(-1)^k - 1\right]}\,.$$

$= 10A$ und $T_1 = 20ms$ stellt die Fundamentalperiodendauer dar.

$= \frac{1}{T_1} = 50\,Hz$, d.h. die der Frequenz $500\,Hz$ am nächsten eg den Oberwellen sind für $k=9$ und $k=11$, da c_k für $=10$ null ist. Die Oberwellenamplituden der 9. und der 1. Oberwelle sind somit

$$\hat{I}_9 = |C_9| = \frac{2I}{9\pi} = \frac{2\cdot 10A}{9\pi} = 0{,}707A\,,$$

$$\hat{I}_{11} = |C_{11}| = \frac{2I}{11\pi} = \frac{2\cdot 10A}{11\pi} = 0{,}579A\,.$$

System-Differentialgleichung aus Frequenzgang:

Ein System besitzt den Frequenzgang

$$G(j\cdot v) = -\frac{3+10\cdot v^2 - j\cdot 29\cdot v}{2-v^2+j\cdot 3\cdot v}.$$

Geben Sie die zugehörige System-Differentialgleichung an.

LÖSUNG:

$$G(jv) = -\frac{3+10v^2-j29v}{2-v^2+j3v} = \frac{10(jv)^2+29(jv)-3}{(jv)^2+3(jv)+2}$$

Ersetzt man jv durch s, so gelangt man zur Übertragungsfunktion

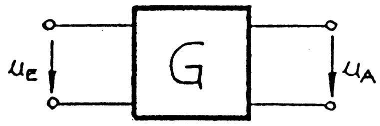
$$G(s) = \frac{10s^2+29s-3}{s^2+3s+2}$$

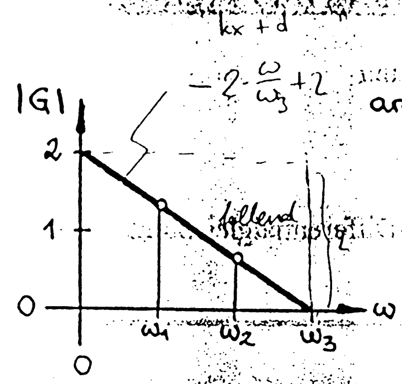
aus der unmittelbar die System-Differentialgleichung zu

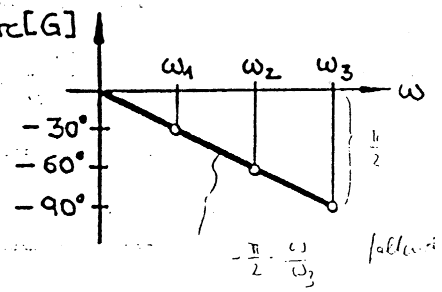
$$y^{(2)} + 3y^{(1)} + 2y = 10u^{(2)} + 29u^{(1)} - 3u$$

abgelesen werden kann.

Übertragungsfunktion aus Frequenzgang:







Von einem LTI-System sind der oben skizzierte Betrags- und Phasenfrequenzgang bekannt. Berechnen Sie die Ausgangsspannung $u_A(t)$ im eingeschwungenen Zustand für

$$u_E(t)=\hat{U}_1\cdot cos(\omega_1\cdot t+\varphi_1)+\hat{U}_2\cdot cos(\omega_2\cdot t+\varphi_2)+\hat{U}_3\cdot cos(\omega_3\cdot t+\varphi_3)$$

LÖSUNG:

Da es sich um ein LTI-System handelt, gilt das Überlagerungsprinzip.

$$\underline{u_A(t)=u_{A1}(t)+u_{A2}(t)+u_{A3}(t)}$$

Aus dem Betrags- und Phasendiagramm folgt unmittelbar

$$\underline{|\underline{G}|=-2\frac{\omega}{\omega_3}+2=2\left(1-\frac{\omega}{\omega_3}\right)}$$

$$\underline{\arg(\underline{G})=-\frac{\pi}{2}\frac{\omega}{\omega_3}}$$

$$\underline{u_{A1}(t)=2\hat{U}_1\left(1-\frac{\omega_1}{\omega_3}\right)\cos\left(\omega_1 t+\varphi_1-\frac{\pi}{2}\frac{\omega_1}{\omega_3}\right)}$$

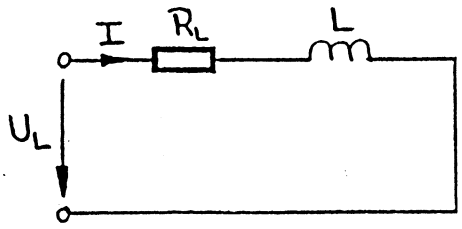
$$\underline{u_{A2}(t)=2\hat{U}_2\left(1-\frac{\omega_2}{\omega_3}\right)\cos\left(\omega_2 t+\varphi_2-\frac{\pi}{2}\frac{\omega_2}{\omega_3}\right)}$$

$$\underline{u_{A3}(t)=\emptyset} \quad \ldots 2\hat{U}_3\left(1-1\right)\left(\frac{\omega_3}{\omega_3}\right)$$

Durch Überlagerung der drei Teilantworten erhält man das Gesamtergebnis

$$\underline{\underline{u_A(t)=2\hat{U}_1\left(1-\frac{\omega_1}{\omega_3}\right)\cos\left(\omega_1 t+\varphi_1-\frac{\pi}{2}\frac{\omega_1}{\omega_3}\right)}}$$
$$\underline{\underline{+\,2\hat{U}_2\left(1-\frac{\omega_2}{\omega_3}\right)\cos\left(\omega_2 t+\varphi_2-\frac{\pi}{2}\frac{\omega_2}{\omega_3}\right)}}$$

Verlustbehaftete Spule:



$U_L = 80V \;\; ; f = 50\,Hz$

Der Strom (Effektivwert $I = 7\,A$) durch eine verlustbehaftete Spule ($R_L = 6\,\Omega$, $L = 25\,mH$) besteht näherungsweise nur aus der 1. und der 3. Harmonischen. Wie groß sind $|I_1|$ und $|I_3|$?

LÖSUNG:

$$U_L^2 = U_{L1}^2 + U_{L3}^2$$

$$I^2 = I_1^2 + I_3^2$$

$$U_{L1} = \sqrt{R_L^2 + (2\pi f L)^2}\, I_1$$

$$U_{L3} = \sqrt{R_L^2 + (6\pi f L)^2}\, I_3$$

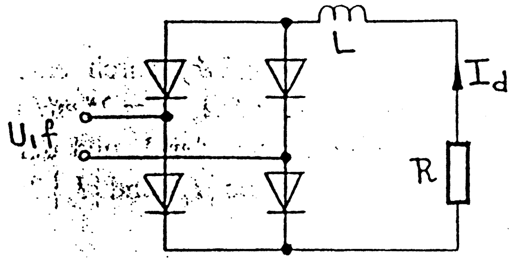
$$U_L^2 = (R_L^2 + (2\pi f L)^2)\, I_1^2 + (R_L^2 + (6\pi f L)^2)\, I_3^2 \quad \text{mit } I_3^2 = I^2 - I_1^2 \text{ folgt}$$

$$U_L^2 = (R_L^2 + (2\pi f L)^2)\, I_1^2 + (R_L^2 + (6\pi f L)^2)\, I^2 - (R_L^2 + (6\pi f L)^2)\, I_1^2$$

$$\underline{\underline{I_1}} = \sqrt{\frac{U_L^2 - (R_L^2 + (6\pi f L)^2)\, I^2}{\cancel{R_L^2} + (2\pi f L)^2 - \cancel{R_L^2} - (6\pi f L)^2}} = \underline{\underline{6{,}762A}}$$

$$\underline{\underline{I_3}} = \sqrt{I^2 - I_1^2} = \underline{\underline{1{,}808A}}$$

Vollweggleichrichter mit Glättungsdrossel:



Am Eingang der näherungsweise idealen Gleichrichterbrücke liegt eine Sinusspannung mit dem Effektivwert U und der Frequenz f. Die Glättungsinduktivität L ist so groß, daß annähernd mit einem idealen Gleichstrom I_d gerechnet werden kann. Berechnen Sie I_d.

LÖSUNG:

$u(t) = U\sqrt{2}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ für $\emptyset < t < \frac{T}{2}$

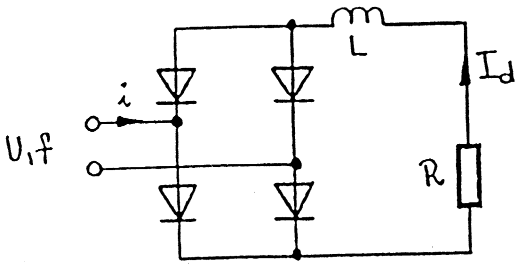
Der Mittelwert $\bar{u}$ der Eingangsspannung folgt mit $T_1 = \frac{T}{2}$ zu

$$\bar{u} = \frac{1}{T_1}\int_{\emptyset}^{T_1} U\sqrt{2}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt = \frac{2}{T}\int_{\emptyset}^{\frac{T}{2}} U\sqrt{2}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt$$

$$\bar{u} = \frac{2\sqrt{2}U}{T}\left.\frac{-\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)}{\frac{2\pi}{T}}\right|_{\emptyset}^{\frac{T}{2}} = \frac{\sqrt{2}U}{\pi}\left[\cos(\emptyset) - \cos\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right)\right] = \underline{\frac{2\sqrt{2}U}{\pi}}$$

$$\underline{\underline{I_d = \bar{i} = \frac{\bar{u}}{R} = \frac{2\sqrt{2}U}{\pi R}}}$$

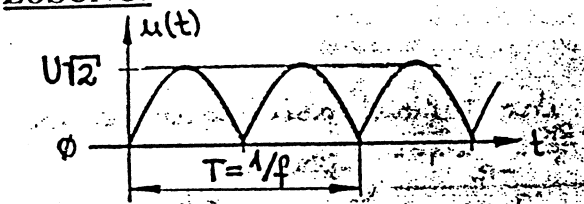
Vollweggleichrichter mit Glättungsdrossel 2:



Am Eingang der idealen Gleichrichterbrücke liegt eine Sinusspannung mit der Frequenz f und dem Effektivwert U. Die Glättungsinduktivität L ist so groß, daß näherungsweise mit einem idealen Gleichstrom I_d gerechnet werden kann.

(*i*) Berechnen Sie I_d.
(*ii*) Zeichnen Sie die Eingangsspannung und den Eingangsstrom in ein Diagramm.
(*iii*) Berechnen Sie die insgesamt aufgenommene Wirkleistung, Scheinleistung und den Leistungsfaktor.

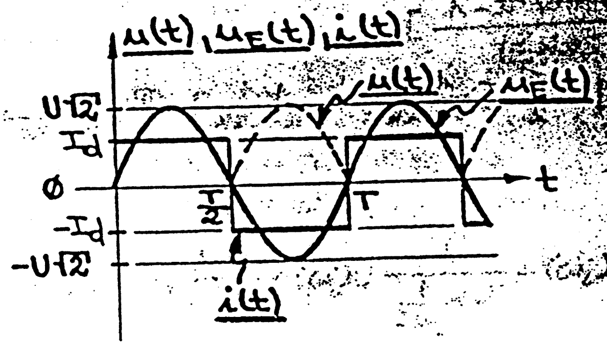
LÖSUNG:



$$u(t) = U\sqrt{2}\,\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad \text{für } 0<t<\frac{T}{2}$$

(i) $$I_d = \bar{i} = \frac{\bar{u}}{R} = \frac{2}{T}\cdot\frac{1}{R}\int_0^{\frac{T}{2}} U\sqrt{2}\,\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt = \frac{2\sqrt{2}\,U}{\pi R}$$

(ii)

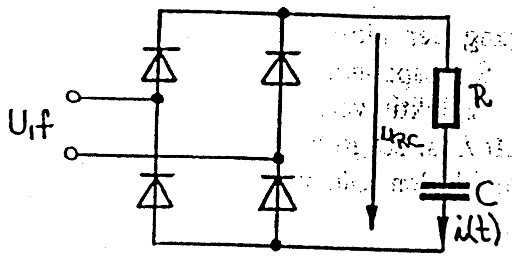


(iii) $$P = I_d^2 R = \frac{4\cdot 2\cdot U^2}{\pi^2 R^2}R = \frac{8U^2}{\pi^2 R}$$

$$S = U I_d = \frac{2\sqrt{2}\,U^2}{\pi R}$$

$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{\frac{8U^2}{\pi^2 R}}{\frac{2\sqrt{2}\,U^2}{\pi R}} = \frac{4}{\sqrt{2}\,\pi}$$

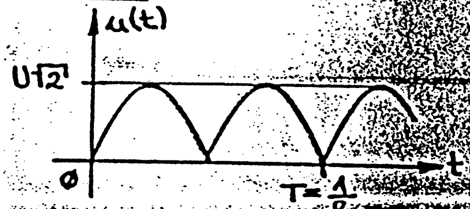
Vollweggleichrichter mit RC-Glättung:



Am Eingang der näherungsweise idealen Gleichrichterbrücke liegt eine Sinusspannung mit dem Effektivwert U und der Frequenz f. Das nachgeschaltete RC-Glied dient zur Glättung des Ausgangsstromes $i(t)$ des Gleichrichters.

Berechnen Sie die Fourier-Reihe des Stromes $i(t)$.

LÖSUNG:



u(t) ist eine gerade Funktion!

$$u(t) = U\sqrt{2}\,\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad \text{für } 0<t<\frac{T}{2}$$

Die Fourier-Koeffizienten werden über ihr Definitionsintegral berechnet.

$$C_{uk} = \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} u(t)\,e^{-j2\pi k f_1 t}\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} U\sqrt{2}\,\frac{e^{j\frac{2\pi}{T}t}-e^{-j\frac{2\pi}{T}t}}{j2}\,e^{-j2\pi k f_1 t}\,dt$$

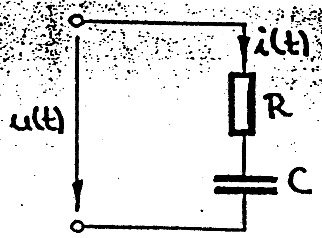
$$C_{uk} = \frac{\sqrt{2}U}{jT}\int_0^{T/2}\left[e^{j\left(\frac{2\pi}{T}-2\pi k f_1\right)t}-e^{-j\left(\frac{2\pi}{T}+2\pi k f_1\right)t}\right]dt$$

$$C_{uk} = \frac{\sqrt{2}U}{jT}\left[\frac{e^{j\left(\frac{2\pi}{T}-2\pi k\frac{2}{T}\right)t}}{j\left(\frac{2\pi}{T}-2\pi k\frac{2}{T}\right)}\Bigg|_0^{T/2} - \frac{e^{-j\left(\frac{2\pi}{T}+2\pi k\frac{2}{T}\right)t}}{-j\left(\frac{2\pi}{T}+2\pi k\frac{2}{T}\right)}\Bigg|_0^{T/2}\right]$$

$$C_{uk} = \frac{\sqrt{2}U}{jT}\left[\frac{e^{j\left(\frac{2\pi}{T}-2\pi k\frac{2}{T}\right)\frac{T}{2}}-1}{j\left(\frac{2\pi}{T}-2\pi k\frac{2}{T}\right)} + \frac{e^{-j\left(\frac{2\pi}{T}+2\pi k\frac{2}{T}\right)\frac{T}{2}}-1}{j\left(\frac{2\pi}{T}+2\pi k\frac{2}{T}\right)}\right]$$

$$C_{uk} = \sqrt{2}U\left[\frac{1-e^{j(\pi-2\pi k)}}{2\pi-4\pi k} + \frac{1-e^{-j(\pi+2\pi k)}}{2\pi+4\pi k}\right] = \frac{\sqrt{2}U}{2}\left[\frac{1+1}{\pi-2\pi k}+\frac{1+1}{\pi+2\pi k}\right] = \frac{\sqrt{2}U}{\pi}\left[\frac{1}{1-2k}+\frac{1}{1+2k}\right]$$

$$\underline{\underline{C_{uk} = \frac{2\sqrt{2}U}{\pi}\,\frac{1}{1-4k^2}}}$$



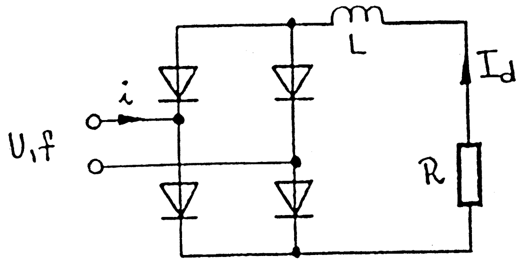
$$\boxed{I(j\omega) = G(j\omega)\,U(j\omega) = \frac{1}{R+\frac{1}{j\omega C}}\,U(j\omega)} = \boxed{\frac{1}{R-j\frac{1}{\omega C}}\,U(j\omega)}$$

$$\boxed{C_{Ik} = G(jk\omega)\cdot C_{Uk} =} \frac{1}{R-j\frac{1}{k\omega C}}\,\frac{2\sqrt{2}U}{\pi}\,\frac{1}{1-4k^2}$$

Die Fourier-Reihe lautet somit

$$\underline{\underline{i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{Ik}\,e^{jk\omega_1 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\sqrt{2}U}{\pi}\,\frac{1}{\left(R-j\frac{1}{\omega C}\right)(1-4k^2)}\,e^{j4\pi k f t}}}\,.$$

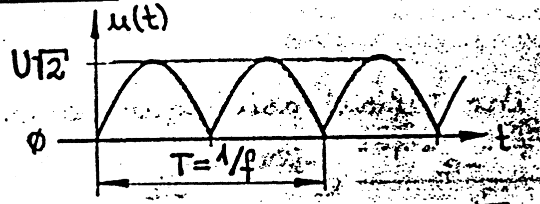
Vollweggleichrichter mit Glättungsdrossel 2:



Am Eingang der idealen Gleichrichterbrücke liegt eine Sinusspannung mit der Frequenz f und dem Effektivwert U. Die Glättungsinduktivität L ist so groß, daß näherungsweise mit einem idealen Gleichstrom I_d gerechnet werden kann.

(*i*) Berechnen Sie I_d.
(*ii*) Zeichnen Sie die Eingangsspannung und den Eingangsstrom in ein Diagramm.
(*iii*) Berechnen Sie die insgesamt aufgenommene Wirkleistung, Scheinleistung und den Leistungsfaktor.

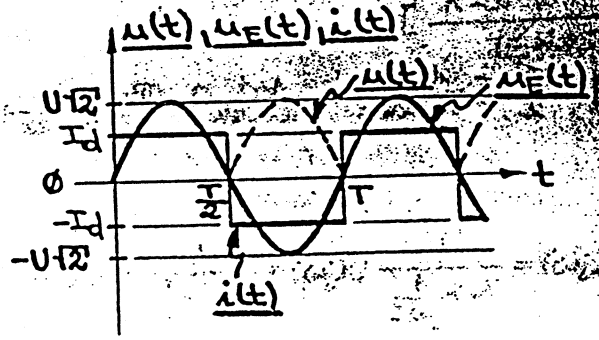
LÖSUNG:



$$u(t) = U\sqrt{2}\,\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad \text{für } 0 < t < \frac{T}{2}$$

(i) $$I_d = \bar{i} = \frac{\bar{u}}{R} = \frac{2}{T}\cdot\frac{1}{R}\int_0^{\frac{T}{2}} U\sqrt{2}\,\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt = \frac{2\sqrt{2}\,U}{\pi R}$$

(ii)

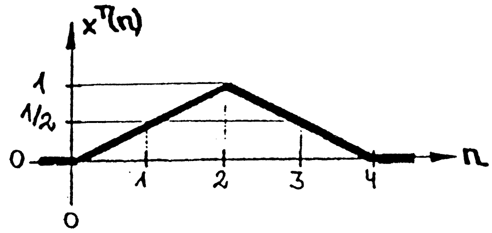


(iii) $$P = I_d^2 R = \frac{4\cdot 2\cdot U^2}{\pi^2 R^2} R = \frac{8U^2}{\pi^2 R}$$

$$S = U I_d = \frac{2\sqrt{2}\,U^2}{\pi R}$$

$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{\frac{8U^2}{\pi^2 R}}{\frac{2\sqrt{2}\,U^2}{\pi R}} = \frac{4}{\sqrt{2}\,\pi}$$

Zeitdiskrete Fourier-Transformation (DFT):



Berechnen Sie die DFT des skizzierten Signals.

Hinweis: Runge-Formeln: $\tilde{X}_d(jk) = \sum_{n=0}^{N-1} x_d(n) e^{-j2\pi nk/N}$, $k = 0, 1, \cdots, N-1$

$$x_d(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_d(jk) e^{j2\pi nk/N}, \quad n = 0, 1, \cdots, N-1$$

LÖSUNG:

Für das angegebene Signal $x^T(k)$ ist $N=5$.

Dies eingesetzt in die Runge-Transformationsformel

$$\tilde{X}_d(jk) = \sum_{n=0}^{N-1} x_d(n) e^{-j2\pi nk/N}$$

liefert

$$\tilde{X}_d(jk) = \sum_{n=0}^{4} x_d(n) e^{-j2\pi n \frac{k}{5}}$$

$$\tilde{X}_d(jk) = x_d(0) e^{-j0} + x_d(1) e^{-j2\pi \frac{k}{5}} + x_d(2) e^{-j4\pi \frac{k}{5}} + x_d(3) e^{-j6\pi \frac{k}{5}} + x_d(4) e^{-j8\pi \frac{k}{5}}$$

$$\tilde{X}_d(jk) = 0 + \frac{1}{2} e^{-j2\pi \frac{k}{5}} + e^{-j4\pi \frac{k}{5}} + \frac{1}{2} e^{-j6\pi \frac{k}{5}} + 0$$

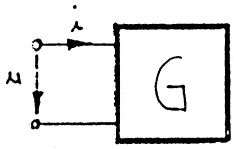
$$\tilde{X}_d(jk) = e^{-j4\pi \frac{k}{5}} \left[\frac{1}{2} e^{j2\pi \frac{k}{5}} + 1 + \frac{1}{2} e^{-j2\pi \frac{k}{5}} \right]$$

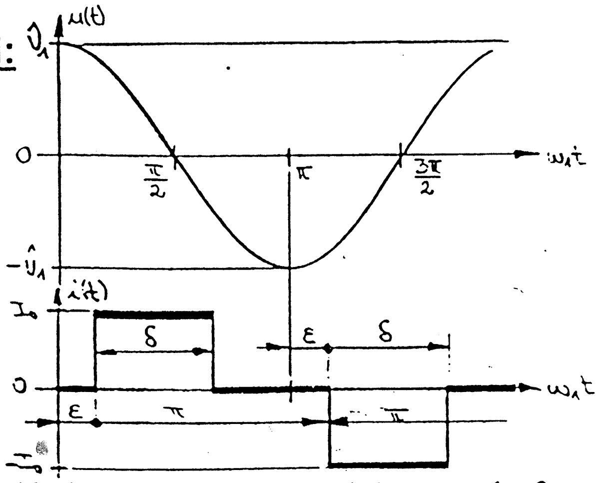
$$\tilde{X}_d(jk) = e^{-j4\pi \frac{k}{5}} \left[1 + \cos\left(2\pi \frac{k}{5}\right) \right] = e^{-j4\pi \frac{k}{5}} \left[\cos\left(\pi \frac{k}{5}\right) \right]^2$$

und schließlich das Endergebnis

$$\underline{\underline{\tilde{X}_d(jk) = \left[e^{-j2\pi \frac{k}{5}} \cos\left(\pi \frac{k}{5}\right) \right]^2}}\ .$$

Wirkleistung an einem Zweipol:





An dem gegebenen Zweipol wurde der skizzierte Spannungs- und Stromverlauf gemessen. Berechnen Sie die aufgenommene Wirkleistung und den Leistungsfaktor der Grundwelle.

LÖSUNG:

Spannungsgrundschwingung:

$$u_1(t) = u(t) = \hat{U}_1 \cos(\omega_1 t)$$

Stromgrundschwingung: $\tau = \omega_1 t$

$$\hat{I}_1 = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\delta} I_0 e^{-j\tau}\,d\tau + \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon+\pi}^{\varepsilon+\pi+\delta} -I_0 e^{-j\tau}\,d\tau = \frac{I_0}{\pi}e^{-j\varepsilon}\left\{\int_0^{\delta} e^{-j\tau}\,d\tau + \int_{\pi}^{\pi+\delta} -e^{-j\tau}\,d\tau\right\}$$

$$\hat{I}_1 = \frac{I_0}{\pi}e^{j\varepsilon}\left\{\left.\frac{e^{-j\tau}}{-j}\right|_0^{\delta} - \left.\frac{e^{-j\tau}}{-j}\right|_{\pi}^{\pi+\delta}\right\} = \frac{I_0}{j\pi}e^{j\varepsilon}\left\{1-e^{-j\delta}+e^{-j(\pi+\delta)}-e^{-j\pi}\right\}$$

$$\hat{I}_1 = \frac{2I_0}{j\pi}e^{-j\varepsilon}\left[1-e^{-j\delta}\right] = \frac{4I_0}{\pi}e^{j\varepsilon}\frac{e^{j\delta/2}-e^{-j\delta/2}}{j2}e^{-j\delta/2} = \frac{4I_0}{\pi}\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)e^{j\left(\varepsilon-\frac{\delta}{2}\right)}$$

$$i_1(t) = \frac{4I_0}{\pi}\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)\cos\left(\omega_1 t+\varepsilon-\frac{\delta}{2}\right)$$

Wirkleistung der Grundwelle:

$$P_1 = \frac{|\hat{U}_1||\hat{I}_1|}{2}\cos(\varphi_{u1}-\varphi_{i1}) = \frac{2\hat{U}I_0}{\pi}\left|\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)\right|\cos\left(\frac{\delta}{2}-\varepsilon\right)$$

Scheinleistung der Grundwelle:

$$S_1 = \frac{|\hat{U}_1||\hat{I}_1|}{2} = \frac{2\hat{U}I_0}{\pi}\left|\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)\right|$$

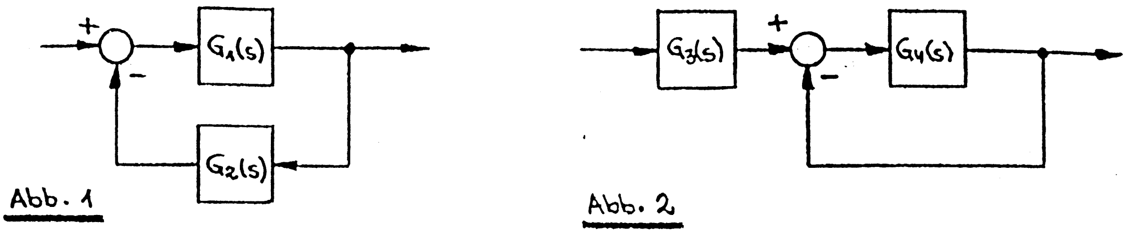
Leistungsfaktor der Grundwelle:

$$\lambda = \frac{P_1}{S_1} = \cos\left(\frac{\delta}{2}-\varepsilon\right)$$

$Z_1 = Z_2$

$N_1 = N_2$

Äquivalenter Regelkreis:



Der in *Abb.1* dargestellte Regelkreis soll in einen nach *Abb. 2* äquivalenten Regelkreis umgerechnet werden, der die gleiche Gesamtübertragungsfunktion besitzt.
Berechnen Sie die dazu erforderlichen Teilübertragungsfunktionen $G_3 = f[G_1(s), G_2(s)]$ und $G_4 = f[G_1(s), G_2(s)]$.

LÖSUNG:

Gesamtübertragungsfunktion des Regelkreises nach Abb. 1:

$$G(s) = \frac{G_1}{1+G_1G_2} \qquad (1)$$

Gesamtübertragungsfunktion des Regelkreises nach Abb. 2:

$$G(s) = \frac{G_3G_4}{1+G_4} \qquad (2)$$

Die Bedingungen für äquivalente Übertragungsfunktionen der beiden Regelkreise erhalten wir durch gleichsetzen von Gl. (1) und (2).

$$\frac{G_1}{1+G_1G_2} = \frac{G_3G_4}{1+G_4} \rightarrow 1+G_1G_2 = 1+G_4 \rightarrow G_4 = G_1G_2$$

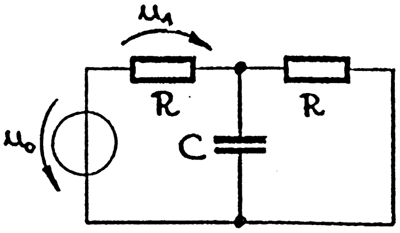
$$\rightarrow G_3 = \frac{G_1}{G_4} = \frac{G_1}{G_1G_2} = \frac{1}{G_2}$$

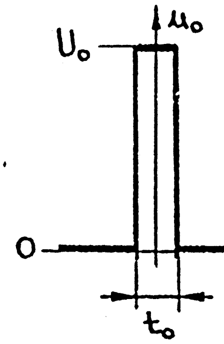
IV

1-1

1

Dirac-Stoß an RC-Kombination:





$u(\tau) = \delta(\tau)$

$\rightarrow y_{oz}(\tau) = g(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, G(s)$

In der links angegebenen Schaltung ist - als LTI-System betrachtet - u_0 die Eingangsgröße und u_1 die Ausgangsgröße. Die Eingangsgröße kann wegen der relativ kurzen Dauer als Dirac-Stoß gemäß $u_0(t) = U_0 t_0 \delta(t)$ dargestellt werden.

(*i*) Die Analyse liefert mit den Bezugswerten

$$U_{EB} = U_{AB} = U_0 t_0 / T_B \;,\; T_B = RC/2$$

die System-Differentialgleichung in der bezogenen Form

$$y' + y = u' + u/2 \;,\; u(\tau) = \delta(\tau)$$

Bestimmen Sie deren Lösung (Nullzustandsantwort).

(*ii*) Geben Sie diese Lösung als Funktion $u_1(t)$ in Originalvariablen an und skizzieren Sie den Verlauf.

LÖSUNG:

(i) Aus der System-DGL kann die Übertragungsfunktion unmittelbar abgelesen werden.

$$G(s) = \frac{s+\frac{1}{2}}{s+1} = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{s+1}$$ Polynomdivision

Wegen $u(\tau) = \delta(\tau)$ gilt $y_{oz}(\tau) = g(\tau)$.

Mit Hilfe von Tab. 4.1

Zeile 6: $e^{-a\tau}\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+a}$ folgt

$$y_{oz}(\tau) = g(\tau) = \delta(\tau) - \frac{1}{2}e^{-\tau}\varepsilon(\tau) .$$

(ii) Mit $y_{0z}(t)=\frac{u_1(\frac{t}{T_B})}{U_{AB}}$ und $T_B=\frac{RC}{2}$ folgt

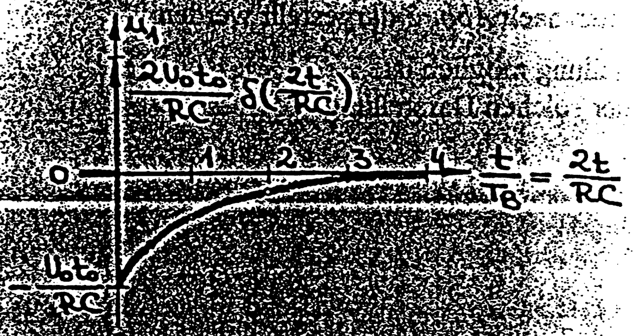
$$u_1(\tfrac{t}{T_B})=U_{AB}\,y_{0z}(\tfrac{t}{T_B}) \; , \; u_1(t)=U_{AB}\left[\delta(\tfrac{t}{T_B})-\tfrac{1}{2}e^{-\frac{t}{T_B}}\varepsilon(\tfrac{t}{T_B})\right] .$$

Achtung: $\varepsilon(\frac{t}{T_B})\hat{=}\,\varepsilon(t)$ aber $\delta(\frac{t}{T_B})\neq\delta(t)$! $\boxed{\text{WARUM}}$

$$u_1(t)=\frac{2U_0t_0}{RC}\left[\delta(\tfrac{t}{T_B})-\tfrac{1}{2}e^{-\frac{2t}{RC}}\varepsilon(t)\right]$$

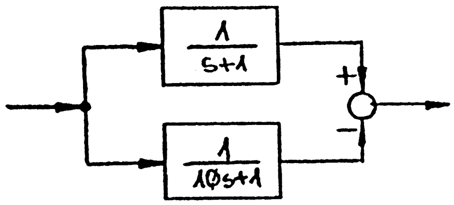
Die gesuchte Spannung in nichtbezogener Form lautet somit

$$u_1(t)=\frac{2U_0t_0}{RC}\left[\delta(\tfrac{2t}{RC})-\tfrac{1}{2}e^{-\frac{2t}{RC}}\varepsilon(t)\right] .$$



IV

V Bode-Diagramm einer Kombination rückwirkungsfreier Teilsysteme:



Zeichnen Sie Betragsteil und Winkelteil des Bode-Diagramms für das Gesamtsystem.

LÖSUNG:

Das Gesamtsystem besitzt die Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{10s+1} = \frac{10s+1-s-1}{(s+1)(10s+1)} = \frac{9}{10}\,\frac{s}{(s+0{,}1)(s+1)} = s\,G_0(s)$$

Nullstelle: $q_1 = 0$

Pole: $p_1 = -0{,}1$; $p_2 = -1$

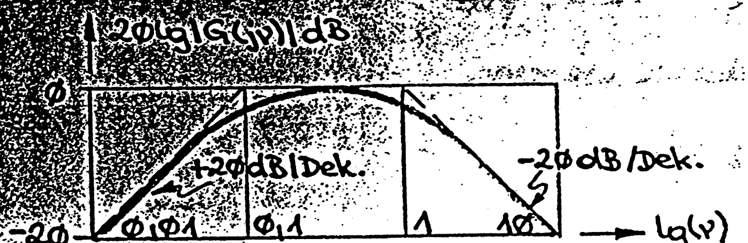
Knickfrequenzen: $\nu_1 = 0{,}1$; $\nu_2 = 1$

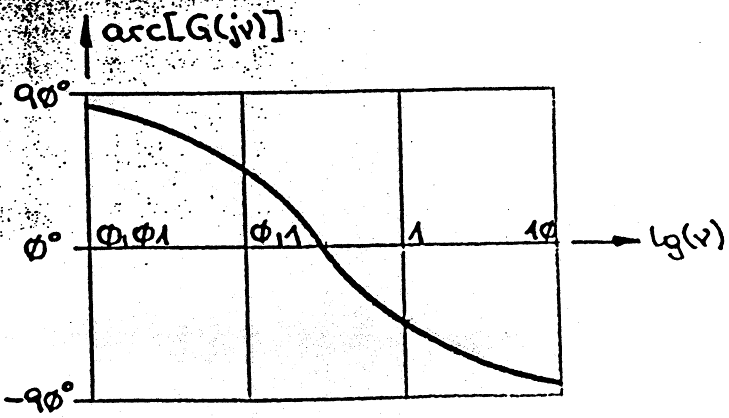
Skalenweite der Frequenzskala: $0{,}01 < \nu < 10$

Asymptotische Form: $G_0(s) = \frac{9}{10}\,\frac{1}{(s+0{,}1)(s+1)} \rightarrow G_0(0) = 9$

Randwerte: $-20{,}9$ dB ; $-20{,}9$ dB

Randsteigung: $+20$ dB/Dekade ; -20 dB/Dekade





IV

Ersatzschaltung durch Kombination von Teilsysteme:

3

$G_1 G_2 = \frac{k}{1+s} \Rightarrow G_1 = k\,,\ G_2 = \frac{1}{1+s}$

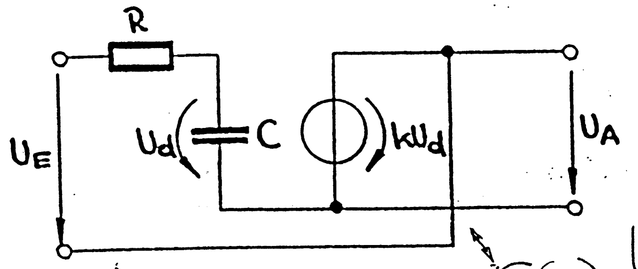


Abb. 1

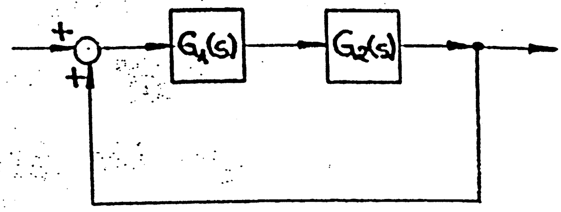


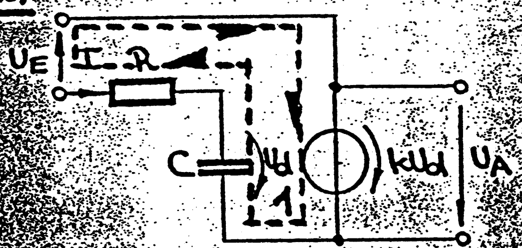
Abb. 2

Die in *Abb. 1* angegebene Schaltung mit einer spannungsgesteuerten Spannungsquelle soll durch eine Kombination von Teilsystemen nach *Abb. 2* dargestellt werden.

(i) Zeigen Sie, daß eine solche Darstellung möglich ist.
(ii) Untersuchen Sie die Stabilität einer solchen Darstellung.

LÖSUNG:

(i)



Masche 1: $kU_d - U_d - IR + U_E = 0$ (1)

Kondensatorgleichung: $I = C\frac{dU_d}{dt}$ (2)

Ausgang: $U_A = kU_d \rightarrow U_d = \frac{U_A}{k}$ (3)

(2) in (1): $(k-1)U_d - RC\frac{dU_d}{dt} + U_E = 0$ (1)'

(3) in (1)': $\frac{k-1}{k}U_A - \frac{RC}{k}\frac{dU_A}{dt} + U_E = 0$

$$\frac{dU_A}{dt} + \frac{1-k}{RC}U_A = \frac{k}{RC}U_E$$

Einführung bezogener Größen: $U_A = U_B y\,,\ U_E = U_B u\,,\ t = T_B \tau$

$$y^{(1)} + (1-k)\frac{T_B}{RC}y = k\frac{T_B}{RC}u$$

mit $T_B = RC$ folgt

$$y^{(1)} + (1-k)y = ku.$$

Die Übertragungsfunktion lautet somit $G(s) = \frac{k}{s+(1-k)}$. (4)

Faltungsprodukt 4:

Transf. – Berechnung – Transf.

Berechnen Sie das Faltungsprodukt

$$x(t) = \varepsilon(t) * \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a-b}{(s-a)(s-b)}\right]$$

LÖSUNG:

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}[\varepsilon(t)]\,\frac{a-b}{(s-a)(s-b)}$$

Mit Hilfe von Tab. 4.1

Zeile 2: $\varepsilon(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$ folgt

$$\mathcal{L}[x(t)] = \frac{a-b}{s(s-a)(s-b)} = \frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{s-a} + \frac{r_3}{s-b}.$$

Die Residuen errechnen sich zu

$$r_1 = sX(s)\Big|_{s=0} = \frac{a-b}{(s-a)(s-b)}\Big|_{s=0} = \frac{a-b}{ab},$$

$$r_2 = (s-a)X(s)\Big|_{s=a} = \frac{a-b}{s(s-b)}\Big|_{s=a} = \frac{1}{a},$$

$$r_3 = (s-b)X(s)\Big|_{s=b} = \frac{a-b}{s(s-a)}\Big|_{s=b} = -\frac{1}{b}.$$

$$X(s) = \frac{a-b}{ab}\,\frac{1}{s} + \frac{1}{a}\,\frac{1}{s-a} - \frac{1}{b}\,\frac{1}{s-b}$$

Die Rücktransformation in den Zeitbereich erfolgt mit Hilfe von Tab. 4.1

Zeile 2: $\varepsilon(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$,

Zeile 6: $\frac{1}{s+a} \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-at}\varepsilon(t)$

Das Faltungsprodukt ergibt also ausgewertet

$$x(t) = \frac{a-b}{ab}\,\varepsilon(t) + \frac{1}{a}e^{at}\varepsilon(t) - \frac{1}{b}e^{bt}\varepsilon(t).$$

V Fourier- und Laplace-Transformierte:

Berechnen Sie die Fourier- und die Laplace-Transformierte von $x(\tau) = \cos(2 \cdot \tau) \cdot \cos(4 \cdot \tau)$.

!

LÖSUNG:

$$x(\tau) = \cos(2\tau)\cos(4\tau) = \frac{e^{j2\tau} + e^{-j2\tau}}{2} \cdot \frac{e^{j4\tau} + e^{-j4\tau}}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{j6\tau} + e^{-j6\tau}}{2} + \frac{e^{j2\tau} + e^{-j2\tau}}{2}\right]$$

$$\underline{x(\tau) = \frac{1}{2}\cos(6\tau) + \frac{1}{2}\cos(2\tau)}$$

Fourier-Transformierte:

Mit Hilfe von Tab. 3.1 Zeile 8: $\cos(\nu_1\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \pi[\delta(\nu-\nu_1) + \delta(\nu+\nu_1)]$ folgt

$$\underline{X(j\nu) = \mathcal{F}\{x(\tau)\} = \frac{\pi}{2}[\delta(\nu-6) + \delta(\nu+6) + \delta(\nu-2) + \delta(\nu+2)]}\ .$$

Laplace-Transformierte:

Mit Hilfe von Tab. 4.1 Zeile 9: $\cos(\nu_1\tau)\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{s}{s^2+\nu_1^2}$ folgt

$$\underline{X(s) = \mathcal{L}\{x(\tau)\} = \frac{1}{2}\left[\frac{s}{s^2+36} + \frac{s}{s^2+4}\right]}\ .$$

6

$\mathcal{L} \to \mathcal{B} \to \mathcal{L}^{-1}$

Integralgleichung vom Faltungstypus:

Ein System mit der Zustandsgröße $x(\tau)$ wird durch die Integralgleichung vom Faltungstypus

$$x(\tau)=\tau+2\int_0^\tau cos(\tau-\tau')x(\tau')d\tau' \ , \ \tau\geq 0 \ ,$$

beschrieben. Berechnen Sie daraus $x(\tau)$.

Hinweis: Laplace-Transformation.

LÖSUNG:

$$x(\tau)=\tau+2\int_0^\tau \cos(\tau-\tau')\,x(\tau')\,d\tau' = \tau+2\,\cos(\tau) * x(\tau) \quad , \ \tau\geq 0$$

Mit Hilfe von Tab. 4.1

Zeile 4: $\tau\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2}$

Zeile 9: $\cos(\nu_1\tau)\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+\nu_1^2}$

und der Faltungseigenschaft $\mathcal{L}[x_1(\tau) * x_2(\tau)] = X_1(s)\,X_2(s)$ folgt

$$X(s)=\frac{1}{s^2}+\frac{2s}{s^2+1}X(s) \rightarrow X(s)\left[1-\frac{2s}{s^2+1}\right]=\frac{1}{s^2}=X(s)\frac{s^2-2s+1}{s^2+1}$$

$$\underline{X(s)}=\frac{s^2+1}{s^2(s^2-2s+1)}=\underline{\frac{s^2+1}{s^2(s-1)^2}=\frac{r_1}{s}+\frac{r_2}{s^2}+\frac{r_3}{s-1}+\frac{r_4}{(s-1)^2}}$$

Die Residuen errechnen sich zu

$$\underline{r_1}=\frac{d}{ds}[s^2X(s)]\Big|_{s=0}=\frac{d}{ds}\left[\frac{s^2+1}{(s-1)^2}\right]\Big|_{s=0}=\frac{2s(s-1)^2-(s^2+1)2(s-1)}{(s-1)^4}\Big|_{s=0}\underline{=2}$$

$$\underline{r_2}=s^2X(s)\Big|_{s=0}=\frac{s^2+1}{(s-1)^2}\Big|_{s=0}\underline{=1}$$

$$\underline{r_3}=\frac{d}{ds}[(s-1)^2X(s)]\Big|_{s=1}=\frac{d}{ds}\left[\frac{s^2+1}{s^2}\right]\Big|_{s=1}=\frac{d}{ds}[1+s^{-2}]\Big|_{s=1}=-2s^{-3}\Big|_{s=1}\underline{\underline{=-2}}$$

$$\underline{r_4}=(s-1)^2X(s)\Big|_{s=1}=\frac{s^2+1}{s^2}\Big|_{s=1}\underline{=2}$$

Mit Hilfe von Tab. 4.1

Zeile 2: $\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$

Zeile 4: $\tau\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2}$

Zeile 6: $e^{-a\tau}\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+a}$

Zeile 7: $\tau e^{-a\tau}\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{(s+a)^2}$ folgt

$$\underline{\underline{x(\tau)}}=2\varepsilon(\tau)+\tau\varepsilon(\tau)-2e^{\tau}\varepsilon(\tau)+2\tau e^{\tau}\varepsilon(\tau)\underline{\underline{=[2+\tau+2e^{\tau}(\tau-1)]\varepsilon(\tau)}}$$

2

Integralgleichung vom Faltungstypus 2:

Ein System mit der Zustandsgröße $x(\tau)$ wird durch die Integralgleichung vom Faltungstypus

$$x(\tau)=2+\int_0^{\tau} x(\tau-\tau')\cos(\tau')d\tau' \ , \ \tau\geq 0 \ ,$$

beschrieben. Berechnen Sie daraus $x(\tau)$.

Hinweis: Laplace-Transformation.

LÖSUNG:

$$x(\tau)=2+\int_0^{\tau} x(\tau-\tau')\cos(\tau')d\tau' = 2+x(\tau)*\cos(\tau) \quad ,\tau\geq 0$$

Mit Hilfe von Tab. 4.1

Zeile 2: $\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$

Zeile 9: $\cos(\nu_1\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+\nu_1^2} \quad , \tau\geq 0$

und der Faltungseigenschaft $\mathcal{L}[x_1(\tau)*x_2(\tau)]=X_1(s)\,X_2(s)$ folgt

$$X(s)=\frac{2}{s}+X(s)\frac{s}{s^2+1} \rightarrow X(s)\left[1-\frac{s}{s^2+1}\right]=\frac{2}{s}$$

$$X(s)\cdot\frac{s^2-s+1}{s^2+1}=\frac{2}{s} \rightarrow \underline{X(s)=\frac{2(s^2+1)}{s(s^2-s+1)}}$$

$$\underline{X(s)=\frac{r_1}{s}+\frac{as+b}{s^2-s+1}}$$

Bestimmung der Konstanten r_1, a, b:

$$X(1)=\frac{2}{s}+\frac{as+b}{(s^2-s+1)}=4$$

$$\underline{r_1}=sX(s)\big|_{s=0}=\frac{2(s^2+1)}{s^2-s+1}\Big|_{s=0}\underline{=2}$$

$s=1$: $4=2+\frac{a+b}{1} \rightarrow a+b=2$

$s=-1$: $-\frac{4}{3}=-2+\frac{-a+b}{3} \rightarrow -a+b=2$

$\underline{a=0}$

$\underline{b=2}$

$$X(s)=\frac{2}{s}+\frac{2}{s^2-s+1}=\frac{2}{s}+2\frac{1}{(s-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=\frac{2}{s}+2\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

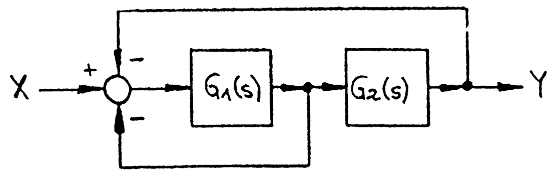
mit Hilfe von Tab. 4.1

Zeile 2: $\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$

Zeile 12: $e^{-a\tau}\sin(\nu_1\tau)\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{\nu_1}{(s+a)^2+\nu_1^2}$ folgt für die ges. Zeitfunktio

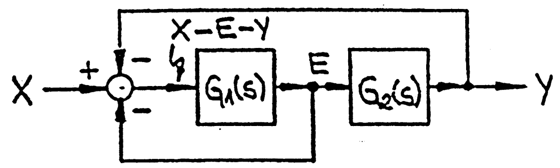
$$\underline{\underline{x(\tau)=2\varepsilon(\tau)+\frac{4}{\sqrt{3}}e^{\frac{\tau}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tau\right)\varepsilon(\tau)}} \ .$$

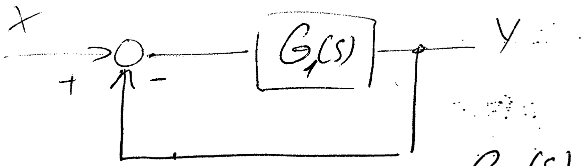
Kombination von Teilsystemen:



Berechnen Sie die Übertragungsfunktion der skizzierten Kombination rückwirkungsfreier Teilsysteme.

LÖSUNG:





$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1+G_1(s)}$$

$$E = G_1(X-E-Y) \qquad (1)$$

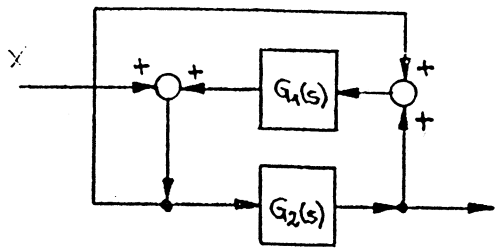
$$Y = G_2 E \qquad (2)$$

aus (1) folgt $E(1+G_1) = (X-Y)G_1 \rightarrow E = \frac{(X-Y)G_1}{1+G_1}$ in (2) ergibt

$$Y = \frac{(X-Y)G_1G_2}{1+G_1} \rightarrow Y(1+G_1) = XG_1G_2 - YG_1G_2 \rightarrow Y(1+G_1+G_1G_2) = XG_1G_2$$

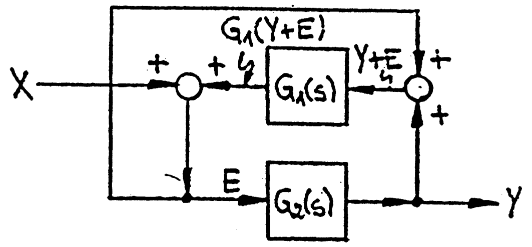
$$\underline{\underline{G(s) = \frac{Y}{X} = \frac{G_1G_2}{1+G_1+G_1G_2}}}$$

Kombination von Teilsystemen 2:



Berechnen Sie die Übertragungsfunktion der Kombination rückwirkungsfreier Teilsysteme.

LÖSUNG:



$$E = G_1(Y+E) + X \qquad (1)$$

$$Y = G_2 E \qquad (2)$$

aus (1) folgt $E = G_1Y + G_1E + X \rightarrow E(1-G_1) = G_1Y + X \rightarrow E = \frac{G_1Y+X}{1-G_1}$

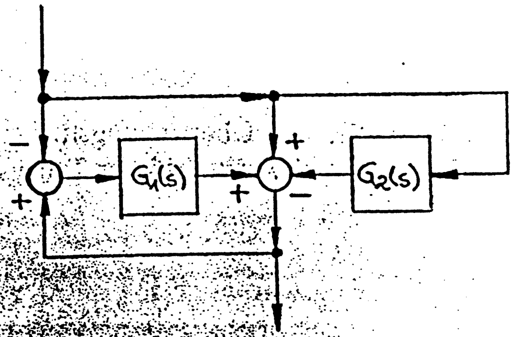
in (2) $Y = G_2 \frac{G_1Y+X}{1-G_1} \rightarrow Y(1-G_1) = G_1G_2Y + G_2X$

$$Y(1-G_1-G_1G_2) = G_2X$$

$$\underline{\underline{G(s) = \frac{Y}{X} = \frac{G_2}{1-G_1-G_1G_2}}}$$

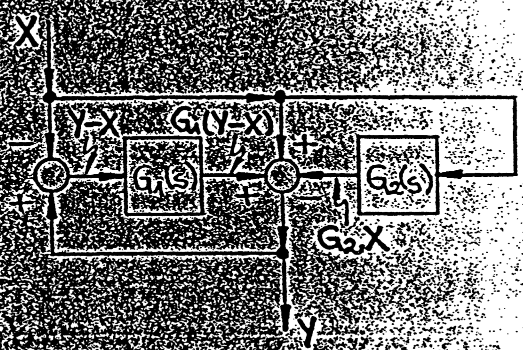
10

Kombination von Teilsystemen 3:



Berechnen Sie die Übertragungsfunktion der Kombination rückwirkungsfreier Teilsysteme.

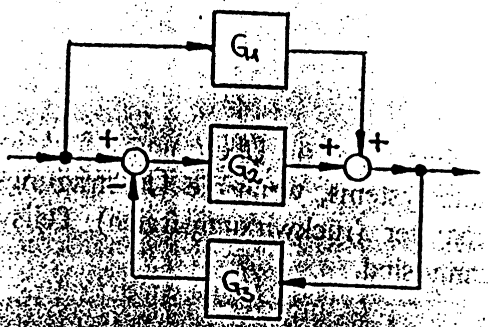
LÖSUNG:



$$Y = G_1(Y-X) + X - G_2X \rightarrow Y = G_1Y - G_1X + X - G_2X$$

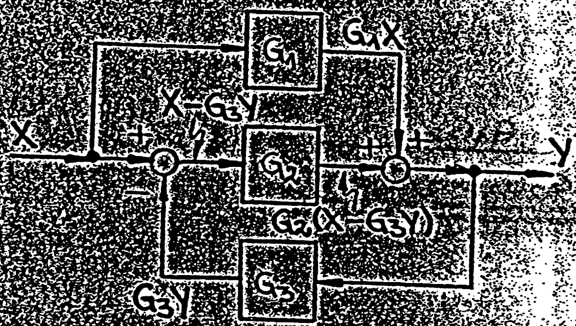
$$Y(1-G_1) = (1-G_1-G_2)X \rightarrow \underline{\underline{G(s) = \frac{Y}{X} = \frac{1-G_1-G_2}{1-G_1} = 1 - \frac{G_2}{1-G_1}}}$$

Kombination von Teilsystemen 4:



Berechnen Sie die Übertragungsfunktion der Kombination rückwirkungsfreier Teilsysteme.

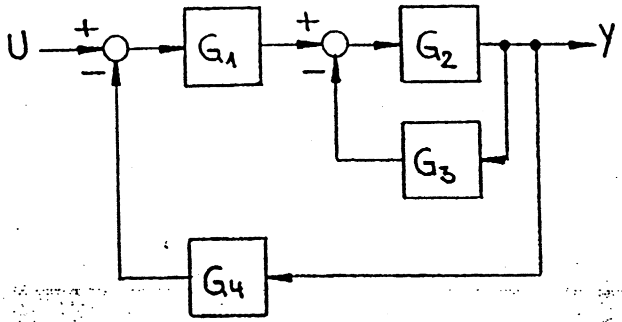
LÖSUNG:



$$Y = G_2(X - G_3Y) + G_1X = G_2X - G_2G_3Y + G_1X$$

$$Y(1 + G_2G_3) = (G_1 + G_2)X \longrightarrow \underline{\underline{G(s) = \frac{Y}{X} = \frac{G_1 + G_2}{1 + G_2G_3}}}$$

Kombination von Teilsystemen 5:



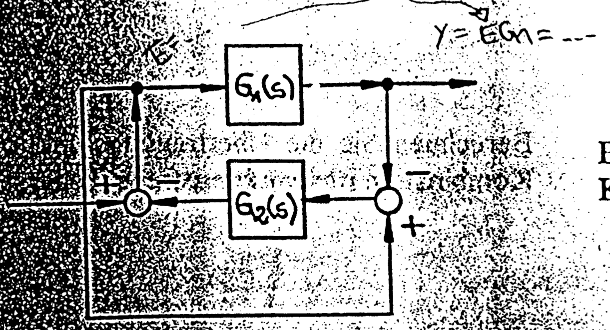
Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems, wenn die Übertragungsfunktionen der (rückwirkungsfreien) Teilsysteme bekannt sind.

LÖSUNG:

$$\underline{\underline{G(s)}} = \frac{G_1 \frac{G_2}{1+G_2G_3}}{1 + G_1G_4 \frac{G_2}{1+G_2G_3}} = \underline{\underline{\frac{G_1G_2}{1+G_2G_3+G_1G_2G_4}}}$$

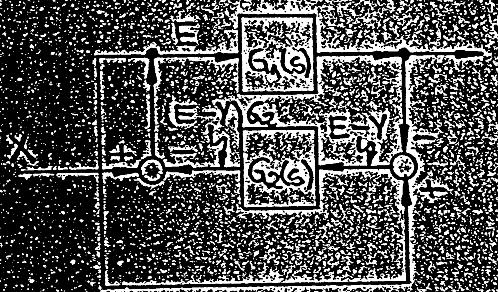
IV 13

Kombination von Teilsystemen 7:



Berechnen Sie die Übertragungsfunktion der Kombination rückwirkungsfreier Teilsysteme.

LÖSUNG:



$$E = X - (E-Y)G_2 = X - EG_2 + YG_2 \longrightarrow E = \frac{X+YG_2}{1+G_2} \text{ in}$$

$$Y = G_1E = G_1\frac{X+YG_2}{1+G_2} \longrightarrow Y(1+G_2-G_1G_2) = G_1X$$

$$G(s) = \frac{Y}{X} = \frac{G_1}{1+G_2-G_1G_2}$$

Laplace-Rücktransformation:

Berechnen Sie die zur Laplace-Transformierten

$$X(s)=\frac{2a^4 s}{s^4+4a^4}$$

gehörende Originalfunktion $x(\tau)$.

LÖSUNG:

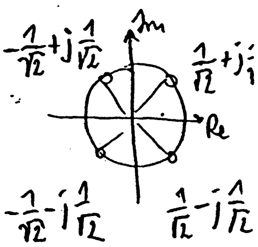
Die Pole von $X(s)=\frac{2a^4 s}{s^4+4a^4}$ findet man aus den Wurzeln der Gleichung $s^4+4a^4=0$.

$$s^4=-4a^4 \Rightarrow s=\sqrt[4]{-4a^4}=\sqrt{2}\sqrt[4]{-1}\,a = \begin{cases} p_1=a(1+j) \\ p_2=a(1-j)=p_1^* \\ p_3=-a(1+j) \\ p_4=-a(1-j)=p_3^* \end{cases}$$

TRICK:

$p^4=4\cdot a^4\cdot e^{j\pi}$

$\Rightarrow \sqrt{2}\,a\cdot e^{j\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{4}\right)}$



$\Rightarrow a\cdot(\pm1\pm j)$

Partialbruchzerlegung von $X(s)$:

$$X(s)=\frac{2a^4 s}{s^4+4a^4}=\frac{2a^4 s}{[s-a(1+j)][s-a(1-j)][s+a(1+j)][s+a(1-j)]}$$

$$X(s)=\frac{r_1}{s-a(1+j)}+\frac{r_2}{s-a(1-j)}+\frac{r_3}{s+a(1+j)}+\frac{r_4}{s+a(1-j)}$$

Die Residuen werden berechnet zu:

$$r_1=[(s-a(1+j))X(s)]\Big|_{s=a(1+j)}=\frac{2a^4 a(1+j)}{[a(1+j)-a(1-j)][a(1+j)+a(1+j)][a(1+j)+a(1-j)]}$$

$$\underline{r_1}=\frac{2a^5\cancel{(1+j)}}{j2a\,2a\cancel{(1+j)}\,2a}=\frac{a^2}{j4}=\underline{-j\frac{a^2}{4}}\quad,\quad \underline{r_2=r_1^*=-\frac{a^2}{j4}=j\frac{a^2}{4}}$$

$$r_3=[(s+a(1+j))X(s)]\Big|_{s=-a(1+j)}=\frac{-2a^4 a(1+j)}{[-a(1+j)-a(1+j)][-a(1+j)-a(1-j)][-a(1+j)+a(1-j)]}$$

$$\underline{r_3}=\frac{-2a^5\cancel{(1+j)}}{-2a\cancel{(1+j)}(-2a)(-j2a)}=\frac{a^2}{j4}=\underline{-j\frac{a^2}{4}}\quad,\quad \underline{r_4=r_3^*=-\frac{a^2}{j4}=j\frac{a^2}{4}}$$

$$\underline{X(s)=\frac{a^2}{j4}\left[\frac{1}{s-a(1+j)}-\frac{1}{s-a(1-j)}+\frac{1}{s+a(1+j)}-\frac{1}{s+a(1-j)}\right]}$$

Mit Hilfe von Tab. 4.1 Zeile 6: $e^{-a\tau}\varepsilon(\tau)\circ\!\!-\!\!\bullet\frac{1}{s+a}$ folgt

$$x(\tau)=\frac{a^2}{j4}\left[e^{a\tau}\left(e^{ja\tau}-e^{-ja\tau}\right)-e^{-a\tau}\left(e^{ja\tau}-e^{-ja\tau}\right)\right]\varepsilon(\tau)$$

$$\underline{x(\tau)=\frac{a^2}{2}\left[e^{a\tau}\sin(a\tau)-e^{-a\tau}\sin(a\tau)\right]\varepsilon(\tau)}$$

$$\underline{\underline{x(\tau)=\frac{a^2}{2}\left[e^{a\tau}-e^{-a\tau}\right]\sin(a\tau)\,\varepsilon(\tau)}}\,.$$

τ

Laplace-Rücktransformation 2:

Berechnen und skizzieren Sie die zur Laplace-Transformierten

$$X(s) = \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{(s+1)^3}$$

gehörende Originalfunktion $x(\tau)$.

LÖSUNG:

$$X(s) = \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{(s+1)^3}$$

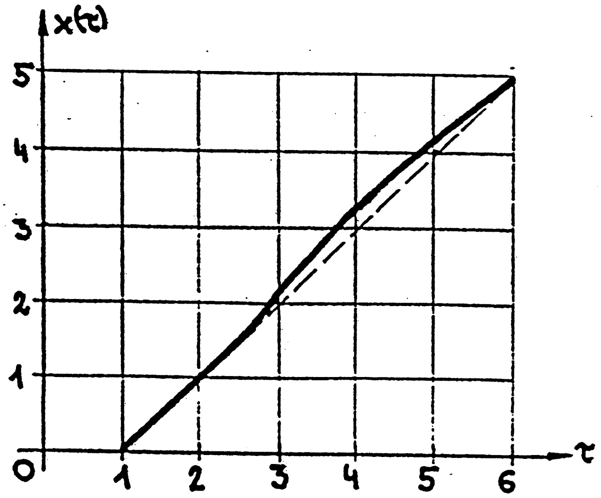
Mit Hilfe von Tab. 4.1

Zeile 6: $\tau\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2}$

Zeile 5: $\frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!}\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^n}$

und dem Zeitverschiebungssatz $x(\tau-\tau_0) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-s\tau_0}X(s)$ folgt

$$\underline{\underline{x(\tau) = (\tau-1)\varepsilon(\tau-1) + \frac{(\tau-2)^2}{2}e^{-(\tau-2)}\varepsilon(\tau-2)}}.$$



IV

Andere Berechnungsmöglichkeit:

Zerlegung von $X(s)$ in quadratische Anteile ergibt

$$\underline{X(s)} = \frac{2a^4 s}{s^4+4a^4} = \frac{a^3}{2(2a^2-2as+s^2)} - \frac{a^3}{2(2a^2+2as+s^2)}$$

$$\underline{X(s)} = \frac{a^3}{2}\left[\frac{1}{(s-a)^2+a^2} - \frac{1}{(s+a)^2+a^2}\right] = \underline{\frac{a^2}{2}\left[\frac{a}{(s-a)^2+a^2} - \frac{a}{(s+a)^2+a^2}\right]} .$$

Mit Hilfe von Tab. 4.1

Zeile 12: $e^{-a\tau}\sin(\nu_1\tau)\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{\nu_1}{(s+a)^2+\nu_1^2}$ folgt

$$x(\tau) = \frac{a^2}{2}\left[e^{a\tau}\sin(a\tau) - e^{-a\tau}\sin(a\tau)\right]\varepsilon(\tau)$$

$$\underline{\underline{x(\tau) = \frac{a^2}{2}\left[e^{a\tau} - e^{-a\tau}\right]\sin(a\tau)\,\varepsilon(\tau)}} .$$

Laplace-Transformierte antiperiodischer Signale:

Eine Funktion $x(\tau)$ heißt antiperiodisch, wenn für ein festes $\tau_1 > 0$ und alle τ die Beziehung

$$x(\tau+\tau_1) = -x(\tau)$$

gilt. Zeigen Sie, daß ihre Laplace-Transformation durch

$$\mathscr{L}[x(\tau)] = \left(1+e^{-s\tau_1}\right)^{-1} \int_{0-}^{\tau_1} x(\tau)\cdot e^{-s\tau}\, d\tau$$

gegeben ist.

LÖSUNG:

$$\underline{x_0} = \begin{cases} 0 & \text{für } \tau<0 \\ x(\tau) & \text{für } 0 \le \tau \le \tau_1 \\ 0 & \text{für } \tau>\tau_1 \end{cases}$$

?

$$x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, x_0(\tau - k\tau_1)$$

Die Laplace-Transformierte von $x(\tau)$ ergibt sich mit dem Zeitverschiebungssatz $x(\tau-\tau_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\, e^{-s\tau_0} X(s)$ zu

$$\mathscr{L}[x(\tau)] = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-s\tau_1})^k (-1)^k \mathscr{L}[x_0(\tau)] = \sum_{k=0}^{\infty} (-e^{-s\tau_1})^k \mathscr{L}[x_0(\tau)]$$

Der Ausdruck $\sum_{k=0}^{\infty} (-e^{-s\tau_1})^k$ stellt eine <u>geometrische Reihe</u> dar, dessen Summe geschlossen dargestellt werden kann.

$$\underline{\sum_{k=0}^{\infty} (-e^{s\tau_1})^k = \frac{1}{1+e^{-s\tau_1}}}.$$

Das Ergebnis lautet somit

$$\underline{\underline{\mathscr{L}[x(\tau)] = \frac{1}{1+e^{-s\tau_1}} \int_{0-}^{\tau_1} x(\tau) e^{-s\tau}\, d\tau}}$$

was zu beweisen war.

Laplace-Rücktransformation mit Faltungssatz:

Berechnen Sie mit Hilfe des Faltungssatzes die zur Laplace-Transformierten

$$X(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)} \quad \multimap \text{ HP}$$

gehörende Originalfunktion $x(\tau)$.

LÖSUNG:

$$\underline{X(s)} = \frac{1}{s^2}\,\frac{1}{s^2+1} = \underline{X_1(s)\,X_2(s)}$$

Mit Hilfe von Tab. 4.1

Zeile 4: $\tau\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2}$

Zeile 10: $\sin(\nu_1\tau)\,\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{\nu_1}{s^2+\nu_1^2}$ folgt

$\underline{x_1(\tau) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = \tau\varepsilon(\tau)}$ und $\underline{x_2(\tau) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = \sin(\tau)\varepsilon(\tau)}$.

Einsetzen in den Faltungssatz der Laplace-Transformation

$$\underline{x_1(\tau) * x_2(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet X_1(s)X_2(s)}$$

ergibt

$$x(\tau) = x_1(\tau) * x_2(\tau) = \int_{0-}^{\infty} \tau'\varepsilon(\tau')\,\sin(\tau-\tau')\,\varepsilon(\tau-\tau')\,d\tau'.$$

Durch partielle Integration erhalten wir

$$x(\tau) = \varepsilon(\tau)\int_0^{\tau} \tau'\sin(\tau-\tau')\,d\tau' = \left[\tau'\cos(\tau-\tau')\Big|_0^{\tau} - \int_0^{\tau}\cos(\tau-\tau')\,d\tau'\right]\varepsilon(\tau)$$

$$\underline{\underline{x(\tau)}} = \left[\tau + \sin(\tau-\tau')\Big|_0^{\tau}\right]\varepsilon(\tau) = \underline{\underline{\left[\tau - \sin(\tau)\right]\varepsilon(\tau)}}.$$

<u>Probe:</u> $X(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} \bullet\!\!-\!\!\circ [\tau - \sin(\tau)]\,\varepsilon(\tau) = x(\tau)$

Laplace-Transformierte periodischer Signale:

$x(\tau)$ sei ein stückweise stetiges, für $\tau > 0$ periodisches Signal der bezogenen Periodendauer τ_1. Zeigen Sie, daß sich seine Laplace-Transformierte gemäß

$$\mathscr{L}[x(\tau)] = \frac{1}{1-e^{-s\tau_1}} \int_{0-}^{\tau_1} x(\tau)\cdot e^{-s\tau}\, d\tau$$

berechnen läßt.

LÖSUNG:

$$\underline{x_0} = \begin{cases} 0 & \text{für } \tau<0 \\ x(\tau) & \text{für } 0<\tau<\tau_1 \\ 0 & \text{für } \tau>\tau_1 \end{cases}$$

$$x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} x_0(\tau - k\tau_1)$$

Die Laplace-Transformierte von $x(\tau)$ ergibt sich mit dem Zeitverschiebungssatz zu

$$\mathscr{L}[x(\tau)] = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-s\tau_1})^k \mathscr{L}[x_0(\tau)]$$

Der Ausdruck $\sum_{k=0}^{\infty} (e^{-s\tau_1})^k$ stellt eine <u>geometrische Reihe</u> dar, deren Summe geschlossen dargestellt werden kann.

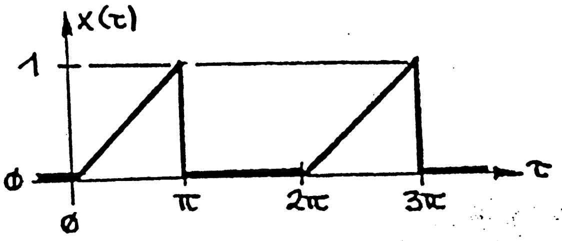
$$\underline{\sum_{k=0}^{\infty} (e^{-s\tau_1})^k = \frac{1}{1-e^{-s\tau_1}}}$$

Das Endergebnis lautet somit

$$\underline{\underline{\mathscr{L}[x(\tau)] = \frac{1}{1-e^{-s\tau_1}} \int_{0-}^{\tau_1} x(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau}}$$

was zu beweisen war.

Laplace-Transformierte einer periodischen Dreieckimpulsfolge:



Geben Sie einen geschlossenen Ausdruck für die Laplace-Transformierte der 2π-periodischen Dreieckimpulsfolge an.

LÖSUNG:

Die Laplace-Transformierte einer τ_1-periodischen stückweise stetigen Funktion $x(\tau)$ wird über das Integral

$$\mathcal{L}[x(\tau)] = \frac{1}{1-e^{-s\tau_1}} \int_{\emptyset-}^{\tau_1} x(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

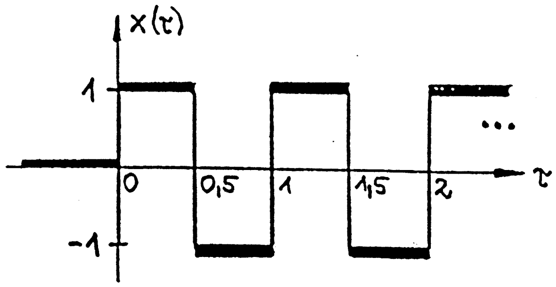
berechnet.

$$\mathcal{L}[x(\tau)] = \frac{1}{1-e^{-s2\pi}} \int_{\emptyset}^{\pi} \frac{\tau}{\pi} e^{-s\tau} d\tau = \frac{1}{1-e^{-s2\pi}} \left[\frac{\tau}{\pi} \frac{e^{-s\tau}}{-s} \Big|_{\emptyset}^{\pi} - \int_{\emptyset}^{\pi} \frac{1}{\pi} \frac{e^{-s\tau}}{-s} d\tau \right]$$

$$\mathcal{L}[x(\tau)] = \frac{1}{1-e^{-s2\pi}} \left[-\frac{e^{-s\pi}}{s} - \frac{1}{\pi} \frac{e^{-s\tau}}{s^2} \Big|_{\emptyset}^{\pi} \right] = \frac{1}{1-e^{-s2\pi}} \left[-\frac{e^{-s\pi}}{s} + \frac{1}{\pi} \frac{1-e^{-s\pi}}{s^2} \right]$$

$$\underline{\underline{X(s) = \mathcal{L}[x(\tau)] = \frac{1}{\pi} \frac{1}{s^2(1+e^{-s\pi})} - \frac{e^{-s\pi}}{s(1-e^{-s\pi})}}}$$

Laplace-Transformierte einer Rechteckschwingung:



Geben Sie einen geschlossenen Ausdruck an für die Laplace-Transformierte der dargestellten, rechtsseitigen Rechteckschwingung.

LÖSUNG:

Die Laplace-Transformierte einer τ_1-periodischen stückweise stetigen Funktion $x(\tau)$ wird über das Integral

$$\mathcal{L}[x(\tau)] = \frac{1}{1-e^{-s\tau_1}} \int_{0-}^{\tau_1} x(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau$$

berechnet.

$$\mathcal{L}[x(\tau)] = \frac{1}{1-e^{-s}} \left[\int_{0-}^{0,5} e^{-s\tau} d\tau + \int_{0,5}^{1} -e^{-s\tau} d\tau \right] = \frac{1}{1-e^{-s}} \left[\frac{e^{-s\tau}}{-s}\Big|_{0}^{0,5} - \frac{e^{-s\tau}}{-s}\Big|_{0,5}^{1} \right]$$

$$X(s) = \mathcal{L}[x(\tau)] = \frac{1}{1-e^{-s}} \left[\frac{1-e^{-\frac{s}{2}}}{s} + \frac{e^{-s}-e^{-\frac{s}{2}}}{s} \right] = \frac{1}{1-e^{-s}} \; \frac{1-2e^{-\frac{s}{2}}+e^{-s}}{s}$$

$$X(s) = \frac{1}{1-e^{-s}} \; \frac{(1-e^{-s\frac{1}{2}})^2}{s} = \frac{(1-e^{-s\frac{1}{2}})^{\cancel{2}}}{\cancel{(1-e^{-s\frac{1}{2}})} \cdot (1+e^{-s\frac{1}{2}})\, s}$$

$$\underline{\underline{X(s) = \mathcal{L}[x(\tau)] = \frac{1-e^{-s\frac{1}{2}}}{1+e^{-s\frac{1}{2}}} \; \frac{1}{s}}}$$

oder besser: antiperiodisches Signal mit Periode $\tau_1 = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\, x[\tau] = \frac{1}{1+e^{-\frac{1}{2}s}} \cdot \int_{0}^{1/2} 1\, e^{-s\tau}\, d\tau$$

Laplace-Transformierte einer Potenzreihe:

Angenommen, ein rechtsseitiges Signal läßt sich durch eine Potenzreihe gemäß

$$x(\tau)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}\tau^n\right]\varepsilon(\tau)$$

darstellen.

Geben Sie eine entsprechende Reihendarstellung für die Laplace-Transformierte $X(s)$ an.

LÖSUNG:

$$x(\tau)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}\tau^n\right]\varepsilon(\tau)$$

Mit Hilfe von Tab. 4.1

Zeile 5: $\frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!}\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^n}$ $\quad n=1,2,3,\ldots$ folgt

$\frac{\tau^n}{n!}\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^{n+1}}$ $\quad n=0,1,2,3,\ldots$

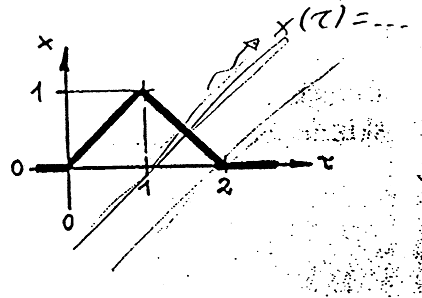
$$\underline{\underline{\mathcal{L}[x(\tau)]}}=\mathcal{L}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}\tau^n\right]\varepsilon(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\mathcal{L}\left[\frac{\tau^n}{n!}\varepsilon(\tau)\right]=\underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{s^{n+1}}}}$$

Also $n-1=a \Rightarrow$ $\frac{\tau^a}{a!}\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^{a+1}}$

$\Rightarrow$ ~~a~~ $= n = a+1$

$/ \; a=0,1,2,3,\ldots$

Laplace-Transformierte eines Dreiecksignals:



Berechnen Sie die Laplace-Transformierte des angegebenen Signals.

LÖSUNG:

Die Laplace-Transformierte von $x(\tau)$ erhält man durch auswerten des Transformationsintegrals oder mit

$$x(\tau) = \tau\varepsilon(\tau) - 2(\tau-1)\varepsilon(\tau-1) + (\tau-2)\varepsilon(\tau-2)$$

mit Hilfe von Tab. 3.1

Zeile 4: $\tau\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2}$

und dem Zeitverschiebungssatz $x(\tau-\tau_0) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-s\tau_0} X(s)$:

$$\underline{\underline{X(s)}} = \frac{1}{s^2} - 2\frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} \underline{\underline{= \frac{1}{s^2}\left(1-2e^{-s}+e^{-2s}\right)}}$$

IV

23

Laplace-Transformierte von Laguerre-Polynomen:

In der Signalanalyse wird die Signalklasse

$$\varphi_n(\tau) = e^{-\tau/2} L_n(\tau)\,\varepsilon(\tau)\ ,\ n = 0, 1, 2, \dots$$

mit den Laguerre-Polynomen

$$L_n(\tau) = \frac{e^{\tau}}{n!}\frac{d^n}{d\tau^n}\left(\tau^n e^{-\tau}\right)$$

verwendet.

Bestimmen Sie die zugehörige Klasse der Laplace-Transformierten $\Phi_n(s)$.

LÖSUNG:

$$\varphi_n(\tau) = e^{-\frac{\tau}{2}} L(\tau)\varepsilon(\tau) = e^{-\frac{\tau}{2}} \frac{e^{\tau}}{n!}\frac{d^n}{d\tau^n}\left(\tau^n e^{-\tau}\right)\varepsilon(\tau) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\varphi_n(\tau) = \frac{e^{\frac{\tau}{2}}}{n!}\frac{d^n}{d\tau^n}\left(\tau^n e^{-\tau}\right)\varepsilon(\tau)$$

mit der Abkürzung $x(\tau) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\tau^n}\left(\tau^n e^{-\tau}\right)\varepsilon(\tau)$ erhalten wir

$$\varphi_n(\tau) = e^{\frac{\tau}{2}} x(\tau)$$

Durch anwenden des Frequenzverschiebungssatzes $e^{s_0\tau} ∘\!\!-\!\!\bullet\ X(s-s_0)$

folgt für die Laplace-Transformierte

$$\Phi_n(s) = \mathcal{L}[\varphi_n(s)] = X\left(s-\tfrac{1}{2}\right).$$

Mit Hilfe von Tab. 4.1

Zeile 8: $\frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} e^{-a\tau}\varepsilon(\tau) ∘\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{(s+a)^n} \qquad n = 1, 2, 3, \dots$

und des Differentiationssatzes für den Zeitbereich $x^{(k)}(\tau) ∘\!\!-\!\!\bullet\ s^k X(s)$

(verschwindende Anfangsbedingungen) ergibt sich

$$X(s) = \frac{s^n}{(s+1)^{n+1}}.$$

Das Endergebnis lautet somit

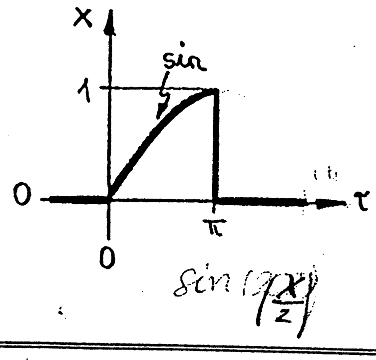
$$\Phi_n(s) = X\left(s-\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)^n}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^{n+1}}.$$

$\frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\tau^n}\left(\tau^n e^{-\tau}\right)\varepsilon(\tau)$

$\frac{\cancel{n}\ (n+1)!\ s^n}{\cancel{n}!\ (s+1)^{n+1}}$

$\frac{\tau^n}{(n...)}$

Laplace-Transformierte eines Sinusteils:



$\sin\left[\frac{2\pi\tau}{T_1}\right] = \sin\left(\frac{2\pi\tau}{2\cdot 4\pi}\right) = \sin\left(\frac{\tau}{2}\right)$! ZV —

Berechnen Sie die Laplace-Transformierte des angegebenen Signals.

LÖSUNG:

Die Laplace-Transformierte von

$x(\tau) = \sin\left(\frac{\tau}{2}\right), \quad 0<\tau<\pi$

erhält man durch auswerten des Transformationsintegrals oder mit

$$x(\tau) = \sin\left(\frac{\tau}{2}\right)\varepsilon(\tau) - \sin\left(\frac{\tau}{2}\right)\varepsilon(\tau-\pi) = \sin\left(\frac{\tau}{2}\right)\varepsilon(\tau) - \overbrace{\sin\left(\frac{\tau-\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}^{\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})=\cos(\alpha)}\varepsilon(\tau-\pi)$$

$$x(\tau) = \sin\left(\frac{\tau}{2}\right)\varepsilon(\tau) - \cos\left(\frac{\tau-\pi}{2}\right)\varepsilon(\tau-\pi)$$

Mit Hilfe von Tab. 4.1

Zeile 9: $\cos(\nu_1\tau)\,\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+\nu_1^2}$

Zeile 10: $\sin(\nu_1\tau)\,\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{\nu_1}{s^2+\nu_1^2}$

und dem Zeitverschiebungssatz $x(\tau-\tau_0) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-s\tau_0}X(s)$ folgt ?

$$\underline{\underline{X(s)}} = \frac{\frac{1}{2}}{s^2+\frac{1}{4}} - \frac{s}{s^2+\frac{1}{4}}e^{-s\pi} = \underline{\underline{\frac{1}{s^2+\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2} - s e^{-s\pi}\right)}}$$

$\cos\left(\frac{\tau}{2} - \pi\right.$ $\qquad \varepsilon(\tau')$

$\sin\left(\frac{\tau}{2}\right)$ $\qquad \tau' = (\tau - \pi)$

$\qquad \tau = \tau' + \pi$

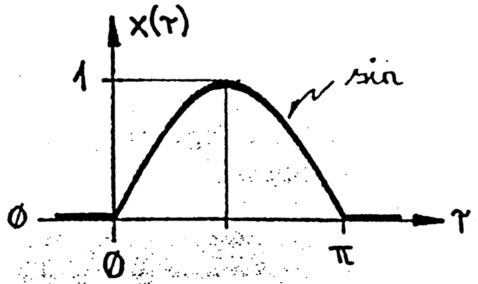
$\sin\left(\frac{\tau'}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$

$\cos\left(\frac{\tau'}{2}\right)\varepsilon(\tau') \circ\!\!-\!\!\bullet$

$\cos\left(\frac{\tau-\pi}{2}\right)\varepsilon$

Laplace-Transformierte eines Sinusteils 2:

25



Berechnen Sie die Laplace-Transformierte des angegebenen Signals.

LÖSUNG:

Die Laplace-Transformierte von

$x(\tau) = \sin(\tau)\,,\ \emptyset < \tau < \pi$

erhält man durch auswerten des Transformationsintegrals

oder mit

$$x(\tau) = \sin(\tau)\,\varepsilon(\tau) - \sin(\tau)\,\varepsilon(\tau-\pi) = \sin(\tau)\,\varepsilon(\tau) - \overbrace{\sin(\tau-\pi+\pi)}^{\sin(\alpha+\pi)=-\sin(\alpha)}\,\varepsilon(\tau-\pi)$$

$$x(\tau) = \sin(\tau)\,\varepsilon(\tau) + \sin(\tau-\pi)\,\varepsilon(\tau-\pi)$$

Mit Hilfe von Tab. 4.1

Zeile 1∅: $\sin(\nu_1\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{\nu_1}{s^2+\nu_1^2}$

und dem Zeitverschiebungssatz $x(\tau-\tau_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\ e^{-s\tau_0}X(s)$ folgt

$$\underline{\underline{X(s)}} = \frac{1}{s^2+1} + \frac{e^{-s\pi}}{s^2+1} = \underline{\underline{\frac{1}{s^2+1}\left(1+e^{-s\pi}\right)}}\,.$$

o.k. gut

$\int_0 (\sin t\, e^{-st})\, dt$ partielle Integration!

$\cos t\, e^{-st} + s\int \sin t\, dt$

$\cos t\, e^{-st} \cdot s \cos t$ π

$\cos t\,(e^{-st} - s)$

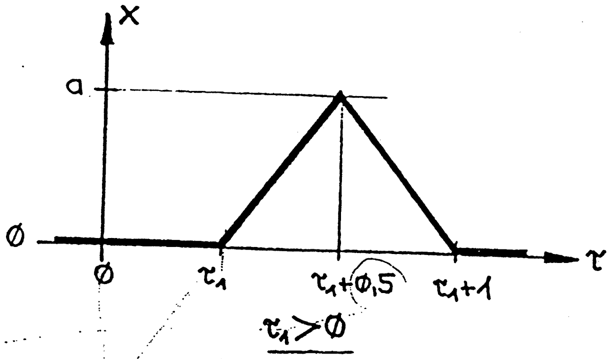
$\cos t\,(e^{-s\pi} - \pi)$

$\pi - e^{-st} - (1 \cdot s)$

IV

2 6

Laplace-Transformierte eines Dreieckimpulses:



Berechnen Sie die Laplace-Transformierte des skizzierten Dreieckimpulses.

LÖSUNG:

Die Laplace-Transformierte von $x(\tau)$ erhält man durch auswerten des Transformationsintegrals oder mit

$$x(\tau) = 2a(\tau-\tau_1)\varepsilon(\tau-\tau_1) - 4a(\tau-\tau_1-\emptyset{,}5)\varepsilon(\tau-\tau_1-\emptyset{,}5) + 2a(\tau-\tau_1-1)\varepsilon(\tau-\tau_1-1)$$

mit Hilfe von Tab. 4.1

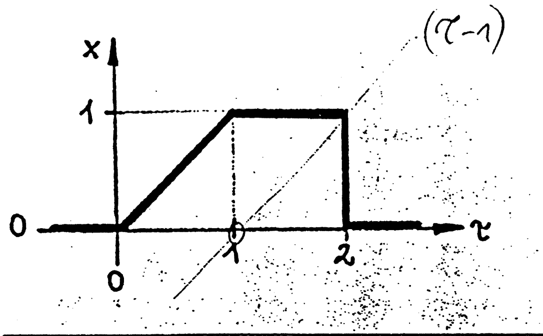
Zeile 4: $\tau\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2}$

und dem Zeitverschiebungssatz $x(\tau-\tau_0) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-s\tau_0}X(s)$:

$$X(s) = 2a\frac{e^{-s\tau_1}}{s^2} - 4a\frac{e^{-s(\tau_1+\emptyset{,}5)}}{s^2} + 2a\frac{e^{-s(\tau_1+1)}}{s^2}$$

$$X(s) = \frac{2a}{s^2}\left(e^{-s\tau_1} - 2e^{-s(\tau_1+\emptyset{,}5)} + e^{-s(\tau_1+1)}\right)$$

Laplace-Transformierte eines Trapezsignals:



Berechnen Sie die Laplace-Transformierte des angegebenen Signals.

LÖSUNG:

Die Laplace-Transformierte von $x(\tau)$ erhält man durch auswerten des Transformationsintegrals oder mit

$$x(\tau) = \tau\varepsilon(\tau) - (\tau-1)\varepsilon(\tau-1) - \varepsilon(\tau-2) .$$

Mit Hilfe von Tab. 4.1

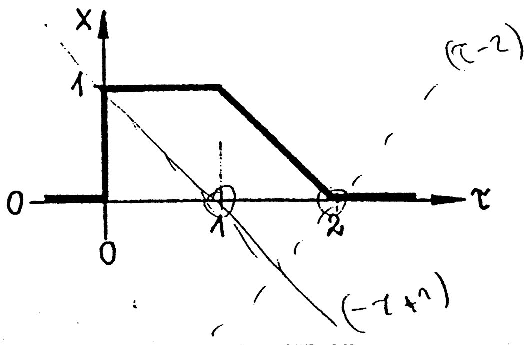
Zeile 2: $\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$

Zeile 4: $\tau\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2}$

und dem Zeitverschiebungssatz $x(\tau-\tau_0) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-s\tau_0} X(s)$ folgt

$$\underline{\underline{X(s)}} = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-2s}}{s} = \underline{\underline{\frac{1}{s^2}\left(1 - e^{-s} - s e^{-2s}\right)}}$$

Laplace-Transformierte eines Trapezsignals 2:



Berechnen Sie die Laplace-Transformierte des angegebenen Signals.

LÖSUNG:

Die Laplace-Transformierte von $x(\tau)$ erhält man durch auswerten des Transformationsintegrals oder mit

$$x(\tau) = \varepsilon(\tau) - (\tau-1)\,\varepsilon(\tau-1) + (\tau-2)\,\varepsilon(\tau-2).$$

Mit Hilfe von Tab. 4.1

Zeile 2: $\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$

Zeile 4: $\tau\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2}$

und dem Zeitverschiebungssatz $x(\tau-\tau_0) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-s\tau_0}X(s)$ folgt

$$\underline{\underline{X(s)}} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} = \underline{\underline{\frac{1}{s^2}\left(s - e^{-s} + e^{-2s}\right)}}$$

Nullzustandsantwort als Faltungsintegral:

Ein System wird durch die Differentialgleichung

$y^{(1)} + a \cdot y = K \cdot u$ $\rightarrow G(s) \rightarrow g(\tau) \rightarrow$ F. für $y_{0Z}(\tau)$

beschrieben (a und K sind Konstanten). Geben Sie die Nullzustandsantwort für allgemeine Eingänge u und den Anfangszeitpunkt $\tau = 0$ in Form eines Faltungsintegrals an.

LÖSUNG:

Die Übertragungsfunktion läßt sich unmittelbar aus der System-Differentialgleichung ablesen

$$G(s) = \frac{K}{s+a}.$$

Die Stoßantwort ist die inverse Laplace-Transformierte der Übertragungsfunktion.

Mit Hilfe von Tab. 4.1

Zeile 6: $e^{-a\tau}\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+a}$ folgt

$$g(\tau) = K e^{-a\tau}\varepsilon(\tau)$$

Durch einsetzen der Stoßantwort ins Faltungsintegral $\int_0^\tau g(\tau-\tau')u(\tau')\,d\tau'$ erhält man die Nullzustandsantwort in Faltungsintegraldarstellung.

$$\underline{\underline{y_{0Z}(\tau) = \int_0^\tau K e^{-a(\tau-\tau')} u(\tau')\,d\tau'}}$$

Nullzustandsantwort im Bild- und Originalbereich:

Ein lineares, zeitinvariantes System wird durch die bezogene Differentialgleichung

$$y^{(2)} + 4y^{(1)} + 3y = 4u \quad \to G(s) \to Y_{0z}(s) \to y_{0z}(\tau)$$

beschrieben.

Berechnen Sie die Nullzustandsantwort im Bildbereich (Laplace-Bereich) und im Originalbereich (Zeit-Bereich) auf das Eingangssignal

$$u(\tau) = \delta(\tau) - 2\varepsilon(\tau) \quad \to U(s)$$

LÖSUNG:

Die Übertragungsfunktion kann unmittelbar aus der System-DGL abgelesen werden: $G(s) = \dfrac{4}{s^2+4s+3} = \dfrac{4}{(s+1)(s+3)}$

Die Laplace-Transformierte des Eingangs erhält man mit Hilfe von Tab. 4.1

Zeile 1: $\delta(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, 1$

Zeile 2: $\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \dfrac{1}{s}$.

Die Nullzustandsantwort im Bildbereich lautet

$$\underline{\underline{Y_{0z}(s) = G(s)\,U(s)}} = \frac{4}{s^2+4s+3}\left(1 - \frac{2}{s}\right) = \frac{4s-8}{s(s^2+4s+3)} = \underline{\underline{\frac{4s-8}{s(s+1)(s+3)}}}.$$

Die Nullzustandsantwort im Zeitbereich folgt mit Hilfe von Tab. 4.1

Zeile 2: $\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \dfrac{1}{s}$,

Zeile 6: $e^{-a\tau}\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \dfrac{1}{s+a}$.

$$y_{0z}(\tau) = r_1\,\varepsilon(\tau) + r_2 e^{-\tau}\varepsilon(\tau) + r_3 \cdot e^{-3\tau}\varepsilon(\tau)$$

Residuen:

$$\underline{r_1} = s\,Y_{0z}(s)\big|_{s=0} = \underline{-\frac{8}{3}}$$

$$\underline{r_2} = (s+1)\,Y_{0z}(s)\big|_{s=-1} = \underline{6}$$

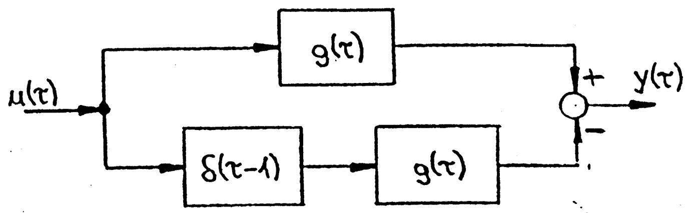
$$\underline{r_3} = (s+3)\,Y_{0z}(s)\big|_{s=-3} = \underline{-\frac{10}{3}}$$

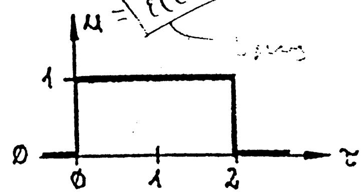
Die Nullzustandsantwort im Zeitbereich lautet somit

$$\underline{y_{0z}(\tau) = \left(-\frac{8}{3} + 6e^{-\tau} - \frac{10}{3}e^{-3\tau}\right)\varepsilon(\tau)}.$$

Nullzustandsantwort eines Gesamtsystems:

$u = \varepsilon(\tau) - \varepsilon(\tau-2) \Rightarrow y(\tau) = h(\tau)-$





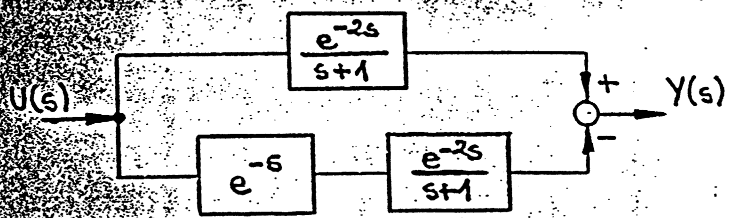
$$g(\tau) = e^{-(\tau-2)}\,\varepsilon(\tau-2)$$

$G(s)$ $H(s) = \frac{G(s)}{s} \rightarrow h(\tau)$

Berechnen und skizzieren Sie für die angegebene Kombination den Ausgang y zum vorliegenden Eingang.

LÖSUNG:

Ersatzschaltung im Laplace-Bereich:



Die Gesamtübertragungsfunktion lautet somit

$$Y(s) = U(s)\frac{e^{-2s}}{s+1} - U(s)\left[e^{-s}\frac{e^{-2s}}{s+1}\right] \rightarrow \underline{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+1}\left[e^{-2s} - e^{-3s}\right]}\,.$$

Laplace-Transformierte der Sprungantwort:

$$\underline{H(s)} = \frac{G(s)}{s} = \frac{1}{s(s+1)}\left[e^{-2s} - e^{-3s}\right] = \underline{\left[\frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{s+1}\right]\left[e^{-2s} - e^{-3s}\right]}$$

Residuen: $\underline{r_1 = \frac{1}{s+1}\Big|_{s=0} = 1}$ $\qquad \underline{r_2 = \frac{1}{s}\Big|_{s=-1} = -1}$

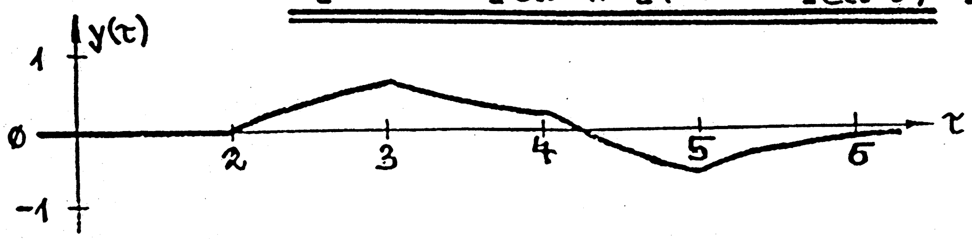
Mit Hilfe von Tab. 4.1 Zeile 2: $\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$ und Zeile 6: $e^{-a\tau}\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+a}$

und dem Zeitverschiebungssatz $x(\tau-\tau_0) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-s\tau_0}X(s)$ folgt

$$\underline{\underline{h(\tau) = \left[1 - e^{-(\tau-2)}\right]\varepsilon(\tau-2) - \left[1 - e^{-(\tau-3)}\right]\varepsilon(\tau-3).}}$$

Der Eingang $u(\tau) = \varepsilon(\tau) - \varepsilon(\tau-2)$ liefert den Ausgang

$$\underline{\underline{y(\tau) = h(\tau) - h(\tau-2) = \left[1-e^{-(\tau-2)}\right]\varepsilon(\tau-2) - \left[1-e^{-(\tau-3)}\right]\varepsilon(\tau-3)}}$$
$$\underline{\underline{- \left[1-e^{-(\tau-4)}\right]\varepsilon(\tau-4) + \left[1-e^{-(\tau-5)}\right]\varepsilon(\tau-5)}}\,.$$



Parallelschaltung von Teilsystemen:

Durch welche Parallelschaltung dreier rückwirkungsfreier Teilsysteme kann das System mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{K}{(s+a)(s+b)(s+c)}$$

dargestellt werden?

LÖSUNG:

Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{K}{(s+a)(s+b)(s+c)} = \frac{r_1}{s+a} + \frac{r_2}{s+b} + \frac{r_3}{s+c} \quad (1)$$

Residuen:

$$r_1 = (s+a)\,G(s)\Big|_{s=-a} = \frac{K}{(s+b)(s+c)}\Big|_{s=-a} = \frac{K}{(b-a)(c-a)} \quad (2)$$

$$r_2 = (s+b)\,G(s)\Big|_{s=-b} = \frac{K}{(s+a)(s+c)}\Big|_{s=-b} = \frac{K}{(a-b)(c-b)} \quad (3)$$

$$r_3 = (s+c)\,G(s)\Big|_{s=-c} = \frac{K}{(s+a)(s+b)}\Big|_{s=-c} = \frac{K}{(a-c)(b-c)} \quad (4)$$

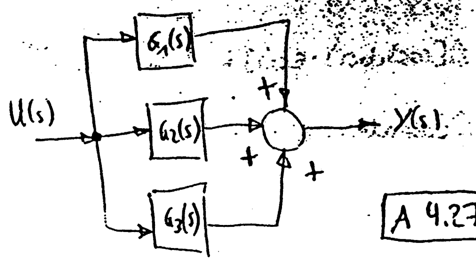
Das Gesamtsystem $G(s)$ kann also durch die Parallelschaltung der Teilsysteme

$$G_1(s) = \frac{K}{(b-a)(c-a)}\,\frac{1}{s+a},$$

$$G_2(s) = \frac{K}{(a-b)(c-b)}\,\frac{1}{s+b} \quad \text{und}$$

$$G_3(s) = \frac{K}{(a-c)(b-c)}\,\frac{1}{s+c}$$

dargestellt werden.



A 4.27

Ortskurve aus Übertragungsfunktion:

Ein lineares System besitzt die Übertragungsfunktion

$$G(s)=\frac{1-e^{-s}}{s} = \frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s}$$

(*i*) Skizzieren Sie die Ortskurve von $G(j\nu)$.
(*ii*) Geben Sie das zugehörige Strukturbild an unter Verwendung von idealen Integratoren, Verstärkern und Verzögerungsgliedern.
(*iii*) Berechnen und skizzieren Sie die Stoßantwort des Systems.

LÖSUNG:

$$G(s)=\frac{1-e^{-s}}{s}=\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s}$$

Frequenzgang: $G(j\nu)=\frac{1-e^{-j\nu}}{j\nu}=\frac{1}{j\nu}-\frac{\cos(\nu)-j\sin(\nu)}{j\nu}=\frac{\sin(\nu)}{\nu}+j\,\frac{\cos(\nu)-1}{\nu}$

$G(j\nu)$ stellt in der komplexen Ebene eine Spirale dar.

(i) Ortskurve:

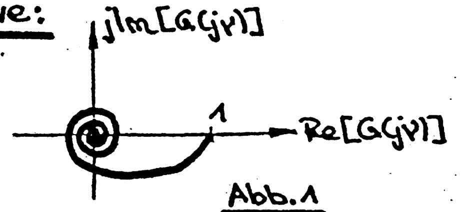


Abb.1

(ii) Strukturbild:

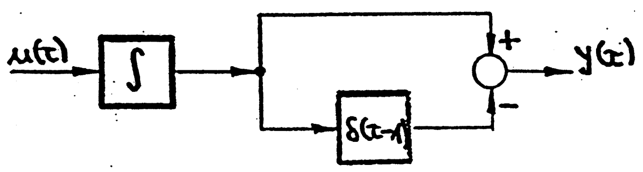


Abb.2.: Strukturbild im Zeitbereich

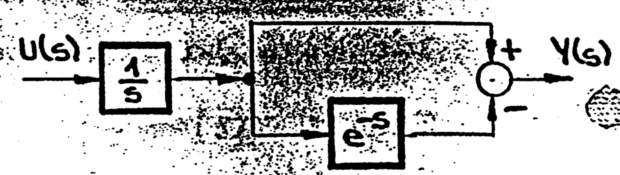


Abb.3.: Strukturbild im $\mathcal{L}$-Bereich

(iii) Stoßantwort:

Mit Hilfe von Tab.4.1

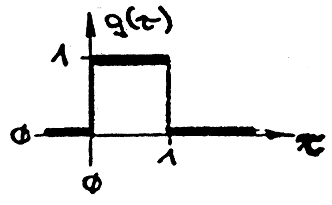
Zeile 2: $\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$

und dem Zeitverschiebungssatz $x(\tau-\tau_0) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-s\tau_0}X(s)$ folgt

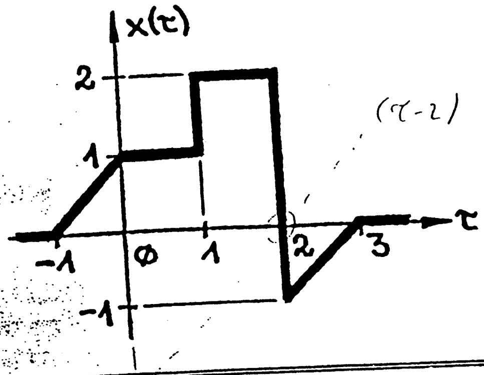
$\varepsilon(\tau-\tau_0)$

$$g(\tau)=\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s}\right\}$$

$$\underline{\underline{g(\tau)=\varepsilon(\tau)-\varepsilon(\tau-1)}}$$



V Rechtsseitige Laplace-Transformierte:



Berechnen Sie die rechtsseitige Laplace-Transformierte von $x(\tau)$, $x^{(1)}(\tau)$ und $x^{(2)}(\tau)$.

allg. diff

LÖSUNG:

$$x(\tau)=\varepsilon(\tau)+\varepsilon(\tau-1)-3\varepsilon(\tau-2)+(\tau-2)\varepsilon(\tau-2)-(\tau-3)\varepsilon(\tau-3)\,,\quad \tau\geq 0$$

$x(0-)=1$ und $x^{(1)}(0-)=1$

Mit Hilfe von Tab. 4.1

Zeile 2: $\varepsilon(\tau)\circ\!\!-\!\!\bullet\frac{1}{s}$

Zeile 4: $\tau\varepsilon(\tau)\circ\!\!-\!\!\bullet\frac{1}{s^2}$

und dem Zeitverschiebungssatz $x(\tau-\tau_0)\circ\!\!-\!\!\bullet e^{-s\tau_0}X(s)$ folgt

$$X(s)=\frac{1}{s}\left[1+e^{-s}+\left(-3+\frac{1}{s}\right)e^{-2s}-\frac{e^{-3s}}{s}\right],$$

$$X_1(s)=\mathcal{L}[x^{(1)}(\tau)]=sX(s)-x(0-)=1+e^{-s}+\left(-3+\frac{1}{s}\right)e^{-2s}-\frac{e^{-3s}}{s}-1,$$

$$X_2(s)=\mathcal{L}[x^{(2)}(\tau)]=s^2X(s)-sx(0-)-x^{(1)}(0-)$$

$$=s\left[1+e^{-s}+\left(-3+\frac{1}{s}\right)e^{-2s}-\frac{e^{-3s}}{s}\right]-s-1.$$

Rechtsseitige Hyperbelfunktionen:

Berechnen Sie die Laplace-Transformierten der rechtsseitigen Hyperbelfunktionen $sinh(\alpha\cdot\tau)\cdot\varepsilon(\tau)$ und $cosh(\alpha\cdot\tau)\cdot\varepsilon(\tau)$. Wie ist die Konvergenzabzisse σ zu wählen ?

LÖSUNG:

$$\sinh(\alpha\tau)\cdot\varepsilon(\tau) = \frac{e^{\alpha\tau}-e^{-\alpha\tau}}{2}\cdot\varepsilon(\tau) \qquad (1)$$

$$\cosh(\alpha\tau)\cdot\varepsilon(\tau) = \frac{e^{\alpha\tau}+e^{-\alpha\tau}}{2}\cdot\varepsilon(\tau) \qquad (2)$$

$e^{\mp\alpha\tau}$ $\quad e^{-s\tau}$ $\quad e^{-\tau(\alpha+s}$

1. Möglichkeit: $e^{-\alpha\tau}\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+\alpha}$ (3) ... aus Tab. 4.1/6

$e^{\alpha\tau}\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-\alpha}$ (4)

$$\mathcal{L}[\sinh(\alpha\tau)\cdot\varepsilon(\tau)] = \frac{1}{2}\cdot\mathcal{L}[e^{\alpha\tau}\varepsilon(\tau)] - \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-\alpha\tau}\varepsilon(\tau)] = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{s-\alpha} - \frac{1}{s+\alpha}\right]$$

$$\mathcal{L}[\sinh(\alpha\tau)\cdot\varepsilon(\tau)] = \frac{1}{2}\cdot\frac{s+\alpha-s+\alpha}{(s-\alpha)(s+\alpha)} = \frac{\alpha}{s^2-\alpha^2} \longrightarrow \underline{\underline{\sinh(\alpha\tau)\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{\alpha}{s^2-\alpha^2},\ \sigma = Re(s) > \alpha^*}}$$

$$\mathcal{L}[\cosh(\alpha\tau)\varepsilon(\tau)] = \frac{1}{2}\cdot\mathcal{L}[e^{\alpha\tau}\varepsilon(\tau)] + \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-\alpha\tau}\varepsilon(\tau)] = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{s-\alpha} + \frac{1}{s+\alpha}\right]$$

$$\mathcal{L}[\cosh(\alpha\tau)\cdot\varepsilon(\tau)] = \frac{1}{2}\cdot\frac{s+\alpha+s-\alpha}{(s-\alpha)(s+\alpha)} = \frac{s}{s^2-\alpha^2} \longrightarrow \underline{\underline{\cosh(\alpha\tau)\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2-\alpha^2},\ \sigma = Re(s) > \alpha^*}}$$

2. Möglichkeit (Auswertung des Transformationsintegrals):

$$\mathcal{L}[\sinh(\alpha\tau)\cdot\varepsilon(\tau)] = \int_{0-}^{\infty} \sinh(\alpha\tau)\cdot e^{-s\tau}d\tau = \int_{0-}^{\infty}\frac{e^{\alpha\tau}-e^{-\alpha\tau}}{2}\cdot e^{-s\tau}d\tau = \frac{1}{2}\int_{0-}^{\infty} e^{\tau\cdot(\alpha-s)}d\tau - \frac{1}{2}\int_{0-}^{\infty} e^{-\tau(\alpha+s)}d\tau$$

$\underbrace{\quad}_{\alpha-\sigma<0}$

$$\mathcal{L}[\sinh(\alpha\tau)\cdot\varepsilon(\tau)] = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{\tau(\alpha-s)}}{\alpha-s}\bigg|_{0-}^{\infty} - \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-\tau(\alpha+s)}}{-(\alpha+s)}\bigg|_{0-}^{\infty} = \frac{1}{2}\cdot\left[0-\frac{1}{\alpha-s}+0-\frac{1}{\alpha+s}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{-\alpha-s-\alpha+s}{(\alpha-s)(\alpha+s)}$$

$$\mathcal{L}[\sinh(\alpha\tau)\cdot\varepsilon(\tau)] = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2\alpha}{\alpha^2-s^2} = \frac{\alpha}{s^2-\alpha^2} \longrightarrow \underline{\underline{\sinh(\alpha\tau)\cdot\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{\alpha}{s^2-\alpha^2},\ \sigma = Re(s) > \alpha^*}}$$

$$\mathcal{L}[\cosh(\alpha\tau)\cdot\varepsilon(\tau)] = \int_{0-}^{\infty}\cosh(\alpha)\cdot e^{-s\tau}d\tau = \int_{0-}^{\infty}\frac{e^{\alpha\tau}+e^{-\alpha\tau}}{2}\cdot e^{-s\tau}d\tau = \frac{1}{2}\cdot\int_{0-}^{\infty} e^{\tau\cdot(\alpha-s)}d\tau + \frac{1}{2}\cdot\int_{0-}^{\infty} e^{-\tau(\alpha+s)}d\tau$$

$$\mathcal{L}[\cosh(\alpha\tau)\cdot\varepsilon(\tau)] = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{\tau(\alpha-s)}}{\alpha-s}\bigg|_{0-}^{\infty} + \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-\tau(\alpha+s)}}{-(\alpha+s)}\bigg|_{0-}^{\infty} = \frac{1}{2}\cdot\left[0-\frac{1}{\alpha-s}-0+\frac{1}{\alpha+s}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{-\alpha-s+\alpha-s}{(\alpha-s)(\alpha+s)}$$

$$\mathcal{L}[\cosh(\alpha\tau)\cdot\varepsilon(\tau)] = \frac{1}{2}\cdot\frac{-2s}{\alpha^2-s^2} = \frac{s}{s^2-\alpha^2} \longrightarrow \underline{\underline{\cosh(\alpha\tau)\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2-\alpha^2},\ \sigma = Re(s) > \alpha^*}}$$

* Wahl der Konvergenzabzisse σ:

Damit das Integral $\frac{1}{2}\int_{0-}^{\infty} e^{\tau\cdot(\alpha-s)}d\tau = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{\tau(\alpha-s)}}{\alpha-s}\bigg|_{0-}^{\infty}$ an der oberen Grenze konvergiert

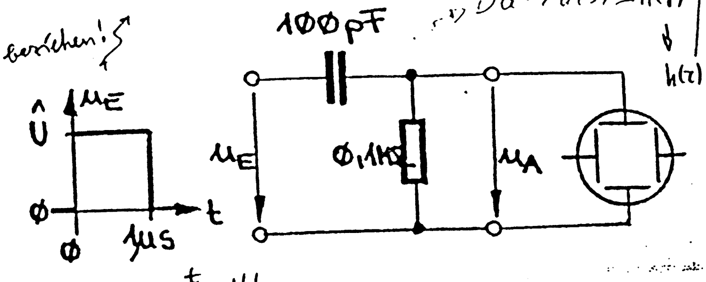
muß $\alpha-\sigma<0$, d.h. $\sigma = Re(s) > \alpha$ gelten.

Spannungsimpuls an CR-Glied:

$\varepsilon(\tau) - \varepsilon(\tau - 0{,}1) \rightarrow y(\tau) = h(\tau) - h(\tau - 0{,}1)$

$\rightarrow DG \rightarrow G(s) \rightarrow H(s) \downarrow h(\tau)$

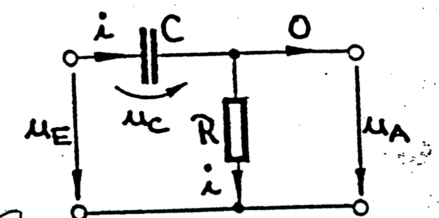
beachten!



$\tau = \frac{t}{T_B}$!!!

Am Eingang des CR-Übertragungsglieds liegt der skizzierte Spannungsimpuls. Am Ausgang wird mit einem Oszilloskop, dessen Eingangswiderstand sehr groß ist, der Spannungsverlauf von $u_a(t)$ nahezu belastungsfrei gemessen.
Berechnen und skizzieren Sie den Spannungsverlauf, der am Oszilloskop-bildschirm ersichtlich ist.

LÖSUNG:



$$i = C\frac{du_C}{dt} = C\left(\frac{du_E}{dt} - \frac{du_A}{dt}\right) \quad (1)$$

$$u_A = Ri = RC\left(\frac{du_E}{dt} - \frac{du_A}{dt}\right) \quad (2)$$

System-DGL in nichtbezogener Form:

$$\frac{du_A}{dt} + \frac{1}{RC}u_A = \frac{du_E}{dt} \quad (3)$$

Einführung bezogener Größen $u_A = \hat{U}y$, $u_E = \hat{U}u$, $t = T_B\tau$:

$$y^{(1)} + \frac{T_B}{RC}y = u^{(1)} \rightarrow \text{mit } T_B = RC = 10\mu s \text{ folgt } y^{(1)} + y = u^{(1)} \quad (4)$$

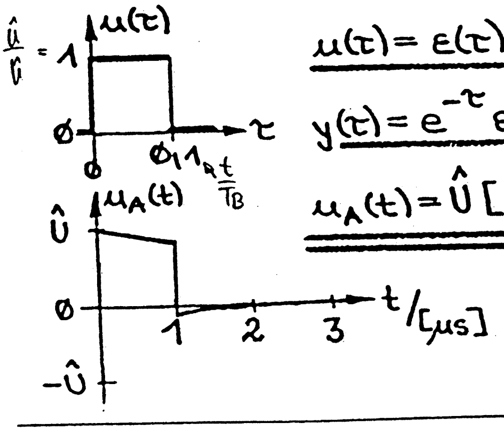
Übertragungsfunktion: $G(s) = \frac{s}{s+1}$ (5)

Laplace-Transf. der Sprungantwort: $H(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{1}{s+1}$ (6)

Mit Hilfe von Tab. 4.1 Zeile 6: $e^{-a\tau}\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+a}$ folgt aus (6)

$$h(\tau) = e^{-\tau}\varepsilon(\tau).$$

$\tau = \frac{t}{T_B}$!



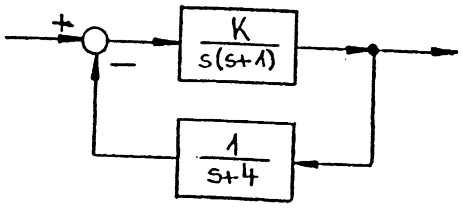
$$u(\tau) = \varepsilon(\tau) - \varepsilon(\tau - 0{,}1) \rightarrow y(\tau) = h(\tau) - h(\tau - 0{,}1)$$

$$y(\tau) = e^{-\tau}\varepsilon(\tau) - e^{-(\tau - 0{,}1)}\varepsilon(\tau - 0{,}1)$$

$$u_A(t) = \hat{U}\left[e^{-t/10\mu s}\varepsilon(t) - e^{-(t/10\mu s - 0{,}1)}\varepsilon\left(\frac{t}{10\mu s} - 0{,}1\right)\right].$$

$y = \frac{u}{U_{AD}} \rightarrow u = y \cdot U_{AD}$

Regelkreis mit einstellbarer Verstärkung:



Für welchen Wert der bezogenen Verstärkung $K > 0$ verhält sich das System grenzstabil ? Welchen Wert v der bezogenen Frequenz besitzt die sich dann einstellende Schwingung ?

LÖSUNG:

Die Gesamtübertragungsfunktion des Systems lautet

$$\underline{G(s)} = \frac{\frac{K}{s(s+1)}}{1+\frac{K}{s(s+1)}\frac{1}{s+4}} = \frac{K(s+4)}{s(s+1)(s+4)+K} = \underline{\frac{K(s+4)}{s^3+5s^2+4s+K}}.$$

Bei Grenzstabilität liegt ein konjugiert komplexes Polpaar auf der imaginären Achse.

Das charakteristische Polynom lautet $P(s) = s^3+5s^2+4s+K$.

Pole: $p_1 = j\nu$; $p_2 = p_1^* = -j\nu \longrightarrow (s-p_1)(s-p_2) = s^2+\nu^2$

Polynomdivision: $(s^3+5s^2+4s+K) : (s^2+\nu^2) = s+5$

$$\begin{array}{l} -s^3 \qquad -\nu^2 s \\ \hline \emptyset \quad 5s^2+(4-\nu^2)s+K \\ \quad -5s^2 \qquad\qquad -5\nu^2 \\ \hline \quad \emptyset \quad (4-\nu^2)s+K-5\nu^2 \end{array}$$

Der Rest $(4-\nu^2)s+K-5\nu^2$ muß bei Grenzstabilität für beliebiges s verschwinden. Daraus erhält man die beiden Bedingungen

$4-\nu^2 = \emptyset$

$K-5\nu^2 = \emptyset$

die ausgewertet auf

$\nu = 2$

$K = 20$

führen. Das System verhält sich also für $\underline{\underline{K=20}}$ grenzstabil mit einer sich einstellenden Schwingfrequenz von $\underline{\underline{\nu = 2}}$.

N

Sprungantwort mittels Laplace-Transformation:

Ein lineares, zeitinvariantes System besitzt die Differentialgleichung

$$y^{(2)} + 4y^{(1)} + 3y = 4u^{(1)} + u \quad .$$

Berechnen Sie seine Sprungantwort.

LÖSUNG:

Die Übertragungsfunktion des Systems kann unmittelbar aus der Differentialgleichung abgelesen werden.

$$\underline{G(s)} = \frac{4s+1}{s^2+4s+3} = \underline{\frac{4s+1}{(s+1)(s+3)}}$$

Laplace-Transformierte der Sprungantwort: $H(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{4s+1}{s(s+1)(s+3)}$

Die Partialbruchzerlegung $H(s) = \frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{s+1} + \frac{r_3}{s+3}$ mit den Residuen

$$r_1 = sH(s)\Big|_{s=0} = \frac{4s+1}{(s+1)(s+3)}\Big|_{s=0} = \frac{1}{3}$$

$$r_2 = (s+1)\,H(s)\Big|_{s=-1} = \frac{4s+1}{s(s+3)}\Big|_{s=-1} = \frac{3}{2}$$

$$r_3 = (s+3)\,H(s)\Big|_{s=-3} = \frac{4s+1}{s(s+1)}\Big|_{s=-3} = -\frac{11}{6}$$

ergibt $\underline{H(s) = \frac{1}{3}\frac{1}{s} + \frac{3}{2}\frac{1}{s+1} - \frac{11}{6}\frac{1}{s+3}}$.

Mit Hilfe von Tab. 4.1

Zeile 2: $\varepsilon(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$

Zeile 6: $e^{-at}\varepsilon(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+a}$ folgt

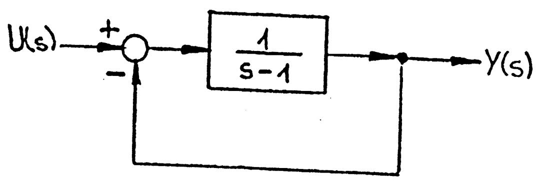
die Sprungantwort im Zeitbereich zu

$$\underline{\underline{h(t) = \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{11}{6}e^{-3t}\right)\varepsilon(t)}} \; .$$

IV

Sprungantwort eines Systems mit Rückführung:

$G(s) \rightarrow H(s) \rightarrow h(t)$



Berechnen Sie die Sprungantwort des Systems mit Rückführung.

LÖSUNG:

Die Gesamtübertragungsfunktion des Systems lautet

$$\underline{G(s)} = \frac{\frac{1}{s-1}}{1+\frac{1}{s-1}} = \frac{1}{s-1+1} = \underline{\frac{1}{s}}\,.$$

Die Laplace-Transformierte der Sprungantwort erhalten wir zu

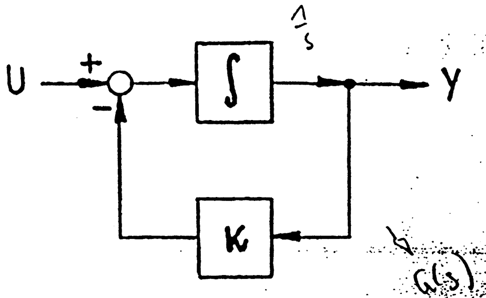
$$H(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{1}{s^2}\,.$$

Mit Hilfe von Tab. 4.1

Zeile 4: $\frac{1}{s^2} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \tau\varepsilon(\tau)$ folgt die Sprungantwort im Zeitbereich

$$\underline{\underline{h(\tau) = \tau\varepsilon(\tau)}}.$$

Stabilität und Sprungantwort eines Regelkreises:



Bestimmen Sie für den angegebenen Regelkreis mit idealem Verstärker und idealem Integrator, jenen Verstärkungsbereich von K in dem Gesamtsystem stabil ist. Berechnen Sie anschließend die Sprungantwort des Gesamtsystems.

LÖSUNG:

Die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems lautet

$$\underline{G(s)} = \frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{K}{s}} = \underline{\frac{1}{s+K}}$$

Damit das System stabil ist müssen alle Pole in der (abgeschlossenen) linken Halbebene des Pol/Nullstellen-Diagramms liegen. Daraus folgt $\underline{K>0}$ (bzw. werden auch komplexe Verstärkungsfaktoren betrachtet so muß $\mathrm{Re}(K)>0$ gelten).

Laplace-Transformierte der Sprungantwort: $H(s)=\frac{G(s)}{s}=\frac{1}{s(s+K)}$

Partialbruchzerlegung $\underline{H(s)=\frac{r_1}{s}+\frac{r_2}{s+K}}$ mit den Residuen

$$\underline{r_1} = \frac{1}{s+K}\Big|_{s=0} = \underline{\frac{1}{K}}$$

$$\underline{r_2} = \frac{1}{s}\Big|_{s=-K} = \underline{-\frac{1}{K}}$$

liefert $H(s)=\frac{1}{K}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+K}\right)$.

Mit Hilfe von Tab. 4.1

Zeile 2: $\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$

Zeile 6: $e^{-a\tau}\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+a}$ folgt

die <u>Sprungantwort im Zeitbereich</u> zu

$$\underline{\underline{h(\tau)=\frac{1}{K}\left(1-e^{-K\tau}\right)\varepsilon(\tau)}}.$$

IV

Stoßantwort:

$m \geq n$!!! ...

Wie lautet die zur Übertragungsfunktion

$$G(s)=\frac{s^3\cdot(s+2)}{(s+1)^2\cdot(s+3)}\,e^{-3\cdot s}$$

– Bei Residuen links liegen lassen. $\delta^{(1)}(\tau) \circ\!-\!\circ\, s$

gehörende Stoßantwort $g(\tau)$?

NICHT VERGESSEN AM SCHLUSS!!

LÖSUNG:

$$G(s)=\frac{s^3(s+2)}{(s+1)^2(s+3)}\,e^{-3s}$$

$$\frac{s^3(s+2)}{(s+1)^2(s+3)}=\frac{s^4+2s^3}{(s^2+2s+1)(s+3)}=\frac{s^4+2s^3}{s^3+2s^2+s+3s^2+6s+3}=\frac{s^4+2s^3}{s^3+5s^2+7s+3}$$

Polynomdivision:

$$(s^4+2s^3):(s^3+5s^2+7s+3)=s-3$$
$$\underline{-s^4-5s^3-7s^2-3s}$$
$$0\;-3s^3-7s^2-3s$$
$$\underline{3s^3+15s^2+21s+9}$$
$$0\;\;8s^2+18s+9$$

$$\frac{s^3(s+2)}{(s+1)^2(s+3)}=s-3+\frac{8s^2+18s+9}{s^3+5s^2+7s+3}=s-3+\frac{(s+0{,}75)(s+1{,}5)}{(s+1)^2(s+3)}=s-3+\frac{r_1}{s+1}+\frac{r_2}{(s+1)^2}+\frac{r_3}{s+3}$$

$$r_2=(s+1)^2\cdot\frac{s^3(s+2)}{(s+1)^2(s+3)}\Big|_{s=-1}=-\frac{1}{2}=-0{,}5\;;\quad r_3=(s+3)\frac{s^3(s+2)}{(s+1)^2(s+3)}\Big|_{s=-3}=6{,}75$$

$$r_1=\frac{d}{ds}\left[(s+1)^2\frac{s^3(s+2)}{(s+1)^2(s+3)}\right]\Big|_{s=-1}=\frac{(4s^3+6s^2)(s+3)-s^3(s+2)\cdot 1}{(s+3)^2}\Big|_{s=-1}=1{,}25$$

$$G(s)=\left[s-3+1{,}25\frac{1}{s+1}-0{,}5\frac{1}{(s+1)^2}+6{,}75\frac{1}{s+3}\right]e^{-3s}$$

Mit Hilfe von Tab. 4.1

Zeile 1: $\delta(\tau)\circ\!-\!\bullet\,1$ (mit Differentiationssatz folgt $\delta^{(1)}(\tau)\circ\!-\!\bullet\, s$),

Zeile 6: $e^{-a\tau}\circ\!-\!\bullet\,\frac{1}{s+a}$, Zeile 7: $\tau e^{-a\tau}\varepsilon(\tau)\circ\!-\!\bullet\,\frac{1}{(s+a)^2}$,

dem Zeitverschiebungssatz $x(\tau-\tau_0)\circ\!-\!\bullet\, e^{-s\tau_0}X(s)$ folgt

$$g(\tau)=\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}=\delta^{(1)}(\tau-3)-3\delta(\tau-3)+1{,}25e^{-(\tau-3)}\varepsilon(\tau-3)-0{,}5(\tau-3)e^{-(\tau-3)}\varepsilon(\tau-3)+6{,}75e^{-3(\tau-3)}\varepsilon(\tau-3)$$

bzw.

$$g(\tau)=\delta^{(1)}(\tau-3)-3\delta(\tau-3)+\frac{1}{4}\left[5e^{-(\tau-3)}+27e^{-3(\tau-3)}-2(\tau-3)e^{-(\tau-3)}\right]\varepsilon(\tau-3).$$

Stoßantwort 2:

$\tau - \tau'$

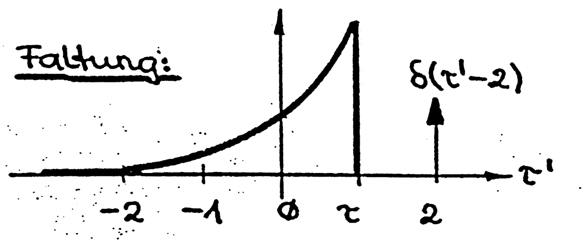
Berechnen und skizzieren Sie die Stoßantwort von $x(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} e^{-(\tau-\tau')} \cdot u(\tau'-2)\,d\tau'$.

δ

Stoßantwort $u = \delta$

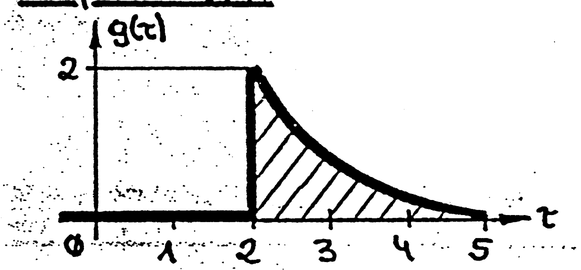
LÖSUNG:

Faltung:



$$x(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} e^{-(\tau-\tau')} u(\tau'-2)\,d\tau'$$

Stoßantwort:



$\tau'' = \tau - \tau'$

$$g(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} e^{-(\tau-\tau')} \delta(\tau'-2)\,d\tau' = e^{-(\tau-2)}\,\varepsilon(\tau-2)$$

$$\int e^{-\tau''} \delta(\tau-\tau''-2)\,d\tau''$$

$\tau'' \to \tau'$

$$\int e^{-\tau'} \delta(\tau-2-\tau')\,d\tau' = e^{-(\tau-2)}\,\varepsilon(\tau-2)$$

für $\tau' = \tau-2$ wird das Argument 0.

$$\int_{-\infty}^{\tau} e^{-(\tau-\tau')} \cdot \delta(\tau'-2)\,d\tau' =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\tau-\tau')} \cdot \varepsilon(\tau-\tau') \cdot \delta(\tau'-2)\,d\tau' =$$

$$= e^{-(\tau-2)} \cdot \varepsilon(\tau-2)$$

Stoßantwort 3:

Ein lineares, zeitinvariantes System wird durch die bezogene Differentialgleichung

$$y^{(1)} + 5y = u^{(1)} + u \quad \to G(s) \to g(\tau)$$

beschrieben.

Berechnen Sie seine Stoßantwort.

LÖSUNG:

Die Übertragungsfunktion kann direkt aus der System-DGL abgelesen werden.

$$G(s) = \frac{s+1}{s+5} = 1 - \frac{4}{s+5}$$

Mit Hilfe von Tab. 4.1

Zeile 1: $\delta(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\ 1$

Zeile 6: $e^{-a\tau}\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{s+a}$ folgt

$\underline{\underline{g(\tau) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \delta(\tau) - 4e^{-5\tau}\varepsilon(\tau)}}$, d.h. es handelt sich um ein System mit direktem Durchgriff!

Stoßantwort 4:

Ein lineares, zeitinvariantes System antwortet auf das Eingangssignal

$$u(\tau)=\left(1-e^{-\tau/\tau_1}\right)\varepsilon(\tau)$$

mit der Nullzustandsantwort

$$y_{0z}(\tau)=\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)^2\left(1-\frac{\tau}{\tau_1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)^2-e^{-\tau/\tau_1}\right)\varepsilon(\tau)\,.$$

$$G(s)=\frac{Y_{0z}(s)}{U(s)} \circ\!\!-\!\!\bullet\; g(\tau)$$

Berechnen Sie seine Stoßantwort.

$$G(s)=\frac{Y_{0z}(s)}{U(s)} \circ\!\!-\!\!\bullet\; g(\tau)$$

LÖSUNG:

$$u(\tau)=\left(1-e^{-\frac{\tau}{\tau_1}}\right)\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\; U(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{\tau_1}}$$

$$y_{0z}(\tau)=\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)^2\left(1-\frac{\tau}{\tau_1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)^2-e^{-\frac{\tau}{\tau_1}}\right)\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\; \left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)^2\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{\tau_1}\frac{1}{s^2}+\frac{1}{\tau_1^2}\frac{1}{s^3}-\frac{1}{s+\frac{1}{\tau_1}}\right]=Y_{0z}(s)$$

AP ←

$$G(s)=\frac{Y_{0z}(s)}{U(s)}=\frac{\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)^2\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{\tau_1}\frac{1}{s^2}+\frac{1}{\tau_1^2}\frac{1}{s^3}-\frac{1}{s+1/\tau_1}\right]}{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{\tau_1}}}=\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)^2\left[1+\frac{-\frac{1}{\tau_1}\frac{1}{s^2}+\frac{1}{\tau_1^2}\frac{1}{s^3}}{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{\tau_1}}}\right]$$

$$G(s)=\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)^2\left[1+\frac{\frac{1-\tau_1 s}{\tau_1^2 s^3}}{\frac{s+\frac{1}{\tau_1}-s}{s\left(s+\frac{1}{\tau_1}\right)}}\right]=\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)^2\left[1+\frac{(1-\tau_1 s)\tau_1 s\left(s+\frac{1}{\tau_1}\right)}{\tau_1^2 s^3}\right]$$

$$G(s)=\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)^2\left[1+\frac{s-\tau_1 s^2+\frac{1}{\tau_1}-s}{\tau_1 s^2}\right]=\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)^2\left[1+\frac{1-\tau_1^2 s^2}{\tau_1^2 s^2}\right]=\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)^2\left[\frac{1}{\tau_1^2 s^2}\right]$$

$$\underline{G(s)=\frac{1}{\tau_2^2}\cdot\frac{1}{s^2}}$$

Mit Hilfe von Tab. 4.1

Zeile 4: $\tau\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{s^2}$ folgt für die Stoßantwort im Zeitbereich

$$\underline{\underline{g(\tau)=\frac{\tau\,\varepsilon(\tau)}{\tau_2^2}}}\,.$$

Systemantwort mittels Laplace-Transformation:

Ein lineares, zeitinvariantes System wird durch die bezogene Differentialgleichung

$$y^{(1)} + 5y = 2u^{(1)} + 3u$$

beschrieben.

$\left(G(s) = \frac{Y_{0Z}(s)}{U(s)}\right)$; $Y(s)$ aus allg. Diff !!! $\rightarrow y(\tau)$

Berechnen Sie

(*i*) die Laplace-Transformierte $Y(s)$ der vollständigen Antwort,
(*ii*) die Nulleingangsantwort $y_{0E}(\tau)$, die Nullzustandsantwort $y_{0Z}(\tau)$ und die vollständige Antwort $y(\tau)$

auf den Eingang

$$u(\tau) = e^{-\tau}\varepsilon(\tau) \rightarrow U(s)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(0-) = -5 \;,\; u(0-) = 0$$

LÖSUNG:

Die System-DGL wird mit Hilfe des Differentiationssatzes für den Zeitbereich $x^{(1)}(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, sX(s) - x(0-)$ in den Laplace-Bereich transformie

$$sY(s) - y(0-) + 5Y(s) = 2sU(s) - 2u(0-) + 3U(s) \rightarrow Y(s)(s+5) = y(0-) - 2u(0-) + (2s+3$$

(i) Die Laplace-Transformierte der vollständigen Antwort lautet somit

$\underline{Y(s) = \frac{y(0-) - 2u(0-)}{s+5} + \frac{2s+3}{s+5}U(s)}$ bzw. speziell für unseren Fall mit

$y(0-) = -5$ und $u(0-) = 0$ folgt $Y(s) = \underbrace{\frac{-5}{s+5}}_{Y_{0E}(s)} + \underbrace{\frac{2s+3}{(s+1)(s+5)}}_{Y_{0Z}(s)}$.

$Y_{0Z}(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+5)} = \frac{r_1}{s+1} + \frac{r_2}{s+5}$ wobei die Residuen zu

$r_1 = (s+1)Y_{0Z}(s)\big|_{s=-1} = \frac{2s+3}{s+5}\big|_{s=-1} = \frac{1}{4}$; $r_2 = (s+5)Y_{0Z}(s)\big|_{s=-5} = \frac{2s+3}{s+1}\big|_{s=-5} = \frac{7}{4}$

berechnet werden. $\underline{Y(s) = \frac{-5}{s+5} + \frac{1}{4}\frac{1}{s+1} + \frac{7}{4}\frac{1}{s+5}}$

(ii) Mit Tab. 4.1

Zeile 6: $e^{-a\tau}\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+a}$ folgt

$Y_{0E}(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\; \underline{y_{0E}(\tau) = -5e^{-5\tau}\varepsilon(\tau)}$

$Y_{0Z}(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\; \underline{y_{0Z}(\tau)} = \frac{1}{4}e^{-\tau}\varepsilon(\tau) + \frac{7}{4}e^{-5\tau}\varepsilon(\tau) = \underline{\frac{1}{4}(e^{-\tau} + 7e^{-5\tau})\varepsilon(\tau)}$

$Y(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\; \underline{y(\tau)} = y_{0E}(\tau) + y_{0Z}(\tau) = \underline{[-5e^{-5\tau} + \frac{1}{4}e^{-\tau} + \frac{7}{4}e^{-5\tau}]\varepsilon(\tau)}$

Systemdifferentialgleichung aus Nullzustandsantwort:

Ein lineares, zeitinvariantes System antwortet auf das Eingangssignal

$$u(\tau) = \left(e^{-\tau} + e^{-3\tau}\right)\varepsilon(\tau)$$ U(s) → G(s)

mit der Nullzustandsantwort Y(s)

$$y_{0Z}(\tau) = \left(2e^{-\tau} - 2e^{-4\tau}\right)\varepsilon(\tau) .$$

Wie lautet seine Systemdifferentialgleichung ?

LÖSUNG:

Mit Hilfe von Tab. 4.1

Zeile 6: $e^{-a\tau}\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+a}$ folgt

$$u(\tau) = e^{-\tau}\varepsilon(\tau) + e^{-3\tau}\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet U(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3}$$

$$y_{0Z}(\tau) = 2e^{-\tau}\varepsilon(\tau) - 2e^{-4\tau}\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet Y_{0Z}(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+4}$$

Die Übertragungsfunktion lautet dann

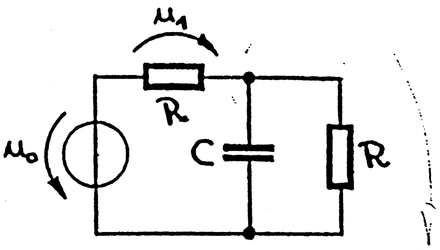
$$G(s) = \frac{Y_{0Z}(s)}{U(s)} = \frac{\frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+4}}{\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3}} = \frac{\frac{2s+8-2s-2}{(s+1)(s+4)}}{\frac{s+3+s+1}{(s+1)(s+3)}} = \frac{6(s+3)}{(2s+4)(s+4)}$$

$$\underline{G(s) = \frac{3(s+3)}{(s+2)(s+4)} = \frac{3s+9}{s^2+6s+8}}$$

aus ihr kann direkt die System-Differentialgleichung abgelesen werden zu

$$\underline{\underline{y^{(2)} + 6y^{(1)} + 8y = 3u^{(1)} + 9u}} .$$

Systemdifferentialgleichung und Stoßantwort:



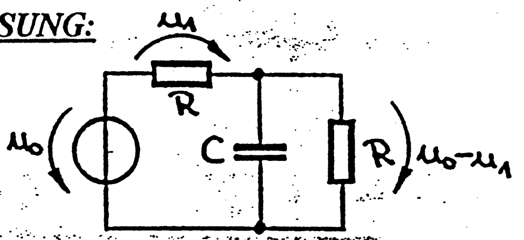
(*i*) Wie lautet die Systemdifferentialgleichung mit u_0 als Eingangsgröße und u_1 als Ausgangsgröße?

(*ii*) Berechnen und skizzieren Sie die Stoßantwort des Systems.

Knoten

DG → G(s) → g(τ)

LÖSUNG:



Knotengleichung:

$$\frac{u_1}{R} = C\left(\frac{du_0}{dt} - \frac{du_1}{dt}\right) + \frac{u_0-u_1}{R} \qquad (1)$$

(i) Aus (1) folgt nach Umformung die System-DGL zu

$$\frac{du_1}{dt} + \frac{2}{RC}u_1 = \frac{du_0}{dt} + \frac{1}{RC}u_0. \qquad (2)$$

Normierung mit $u_1 = U_B y$, $u_0 = U_B u$ und $t = T_B\tau$ ergibt

$$y^{(1)} + 2\frac{T_B}{RC}y = u^{(1)} + \frac{T_B}{RC}u$$ bzw. mit $T_B = RC$ folgt

$$y^{(1)} + 2y = u^{(1)} + u. \qquad (3)$$

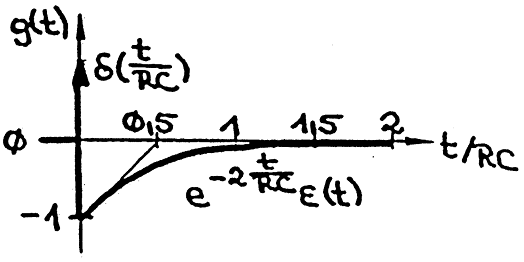
(ii) Übertragungsfunktion: $$G(s) = \frac{s+1}{s+2} = 1 - \frac{1}{s+2} \qquad (4)$$

Mit Hilfe von Tab. 4.1 Zeile 1: $\delta(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, 1$ und

Zeile 6: $e^{-a\tau}\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{s+a}$ folgt für die Stoßantwort

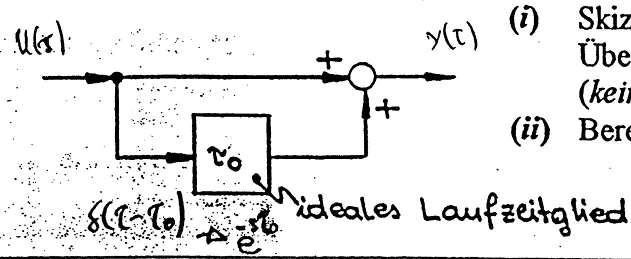
$$g(\tau) = \delta(\tau) - e^{-2\tau}\varepsilon(\tau).$$

Entnormiert erhalten wir $g(t) = \delta\left(\frac{t}{RC}\right) - e^{-2\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$.



System mit Laufzeitglied:

$s \to j\nu$



(*i*) Skizzieren Sie den Betragsfrequenzgang der Übertragungsfunktion im linearen Maßstab (*kein Bode-Diagramm !*).

(*ii*) Berechnen Sie Stoßantwort des Systems.

LÖSUNG:

Die Gesamtübertragungsfunktion des Systems lautet

$$G(s) = 1 + e^{-s\tau_0}.$$

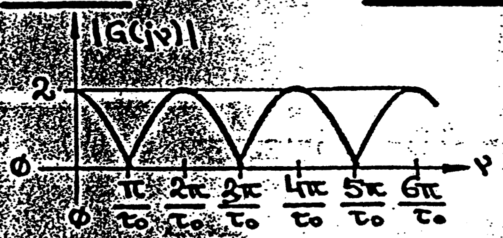
(i) $G(j\nu) = 1 + e^{-j\nu\tau_0} = 1 + \cos(\nu\tau_0) - j\sin(\nu\tau_0)$

$$|G(j\nu)| = \sqrt{[1+\cos(\nu\tau_0)]^2 + \sin^2(\nu\tau_0)} = \sqrt{1 + 2\cos(\nu\tau_0) + \cos^2(\nu\tau_0) + \sin^2(\nu\tau_0)}$$

$$|G(j\nu)| = \sqrt{2[1+\cos(\nu\tau_0)]}$$

mit $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}[1+\cos(2\alpha)]$ folgt

$$\underline{\underline{|G(j\nu)|}} = \sqrt{4\cos^2\left(\frac{\nu\tau_0}{2}\right)} = \underline{\underline{2\left|\cos\left(\frac{\nu\tau_0}{2}\right)\right|}}$$



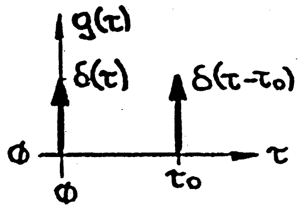
Filter mit (periodisch) abwechselnden Durchlaß- und Sperrbereich werden Kammfilter genannt.

(ii) Mit Hilfe von Tab. 4.1

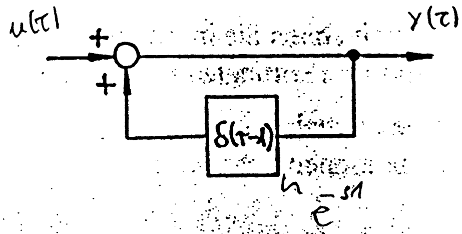
Zeile 1: $\delta(t)$ ⊶ 1

und dem Zeitverschiebungssatz $x(t-\tau_0)$ ⊶ $e^{-s\tau_0}X(s)$ folgt für die Stoßantwort

$$\underline{\underline{g(t)}} = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}[1+e^{-s\tau_0}] \underline{\underline{= \delta(t) + \delta(t-\tau_0)}}.$$



System mit Laufzeitglied 2:



(*i*) Skizzieren Sie den Betragsfrequenzgang der Übertragungsfunktion im linearen Maßstab (*kein Bode-Diagramm !*).

(*ii*) Berechnen Sie Stoßantwort des Systems.

$\frac{1}{1-e^{-s}}$ ... als geom. Reihe !!! $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk}$

LÖSUNG:

Die Gesamtübertragungsfunktion des Systems lautet

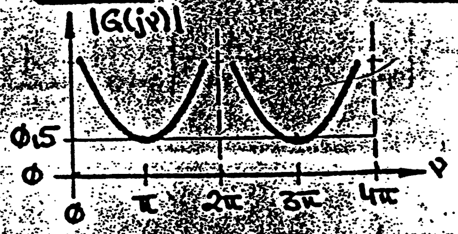
$$G(s) = \frac{1}{1-e^{-s}}$$

(i) $G(j\nu) = \frac{1}{1-e^{-j\nu}} \rightarrow |G(j\nu)| = \frac{1}{\sqrt{[1-\cos(\nu)]^2+\sin^2(\nu)}}$

$$|G(j\nu)| = \frac{1}{\sqrt{1-2\cos(\nu)+\cos^2(\nu)+\sin^2(\nu)}} = \frac{1}{\sqrt{2[1-\cos(\nu)]}}$$

mit $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}[1-\cos(2\alpha)]$ folgt

$$\underline{\underline{|G(j\nu)|}} = \frac{1}{\sqrt{4\sin^2(\frac{\nu}{2})}} = \underline{\underline{\frac{1}{2|\sin(\frac{\nu}{2})|}}}.$$



Kammfilter !

(ii) Mit Hilfe von Tab. 4.1

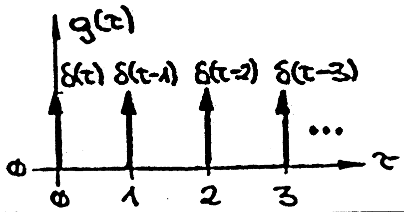
Zeile 1: $\delta(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet 1$ und dem Zeitverschiebungssatz $x(\tau-\tau_0) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-s\tau_0} X($

Die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{1}{1-e^{-s}}$ kann als Summe einer

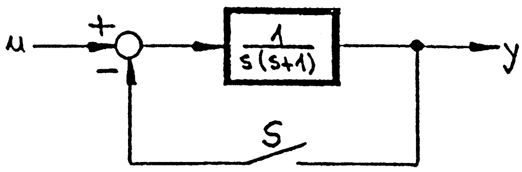
geometrischen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ aufgefaßt werden, d.h.

$\underline{G(s)} = \sum_{k=0}^{\infty} \underline{e^{-sk}} = \sum_{k=0}^{\infty} \underline{(e^{-s})^k}$. Für die Stoßantwort des Systems erhält ma

$$\underline{\underline{g(\tau) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]}} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}^{-1}[e^{-sk}] = \sum_{k=0}^{\infty} \underline{\underline{\delta(\tau-k) = \delta(\tau)+\delta(\tau-1)+\delta(\tau-2)+\ldots}}$$



System mit und ohne Rückführung:



Berechnen und zeichnen Sie im selben Diagramm die Übergangsfunktion (Sprungantwort) des Systems

(i) für offenen Schalter S,
(ii) für geschlossenen Schalter S.

LÖSUNG:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

(i) Für offenen Schalter lautet die Übertragungsfunktion

$$G_1(s) = G(s) = \frac{1}{s(s+1)}.$$

Laplace-Transformierte der Sprungantwort:

$$\underline{H_1(s) = \frac{G_1(s)}{s} = \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{s^2} + \frac{r_3}{s+1}}$$

mit den Residuen

$$r_1 = \frac{d}{ds}\left[s^2 H_1(s)\right]\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s+1}\right]\Big|_{s=0} = -\frac{1}{(s+1)^2}\Big|_{s=0} = \underline{-1},$$

$$r_2 = s^2 H_1(s)\Big|_{s=0} = \frac{1}{s+1}\Big|_{s=0} = \underline{1},$$

$$r_3 = (s+1) H_1(s)\Big|_{s=-1} = \frac{1}{s^2}\Big|_{s=-1} = \underline{1},$$

$$H_1(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1}.$$

Die Sprungantwort im Zeitbereich folgt mit Hilfe von Tab. 4.1

Zeile 2: $\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$

Zeile 4: $\tau\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2}$

Zeile 6: $e^{-a\tau}\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+a}$

$$\underline{\underline{h(\tau) = \left[-1 + \tau + e^{-\tau}\right]\varepsilon(\tau)}}.$$ System ist instabil!

(ii) Für geschlossenen Schalter lautet die Übertragungsfunktion

$$G_2(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\frac{1}{s(s+1)}}{1+\frac{1}{s(s+1)}} = \frac{1}{s(s+1)+1} = \frac{1}{s^2+s+1}.$$

Laplace-Transformierte der Sprungantwort:

$$\underline{H_2(s) = \frac{G_2(s)}{s} = \frac{1}{s(s^2+s+1)} = \frac{r_1}{s} + \frac{as+b}{s^2+s+1}} \quad \text{mit } H_2(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2+s+1}$$

$$\underline{r_1} = s H_2(s)\Big|_{s=\emptyset} = \frac{1}{s^2+s+1}\Big|_{s=\emptyset} \underline{= 1}$$

$$\frac{1}{s(s^2+s+1)}\Big|_{s=1} = \frac{1}{s} + \frac{as+b}{s^2+s+1}\Big|_{s=1} \rightarrow \frac{1}{3} = 1 + \frac{a+b}{3} \rightarrow a+b=-2 \quad \underline{a=}$$

$$\frac{1}{s(s^2+s+1)}\Big|_{s=-1} = \frac{1}{s} + \frac{as+b}{s^2+s+1}\Big|_{s=-1} \rightarrow -1 = -1 + \frac{-a+b}{1} \rightarrow -a+b=\emptyset \quad \underline{b=}$$

Die Sprungantwort im Zeitbereich folgt mit Hilfe von Tab. 4.

Zeile 2: $\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$

Zeile 11: $e^{-a\tau}\cos(\nu_1\tau)\,\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s+a}{(s+a)^2+\nu_1^2}$

Zeile 12: $e^{-a\tau}\sin(\nu_1\tau)\,\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{\nu_1}{(s+a)^2+\nu_1^2}$

und

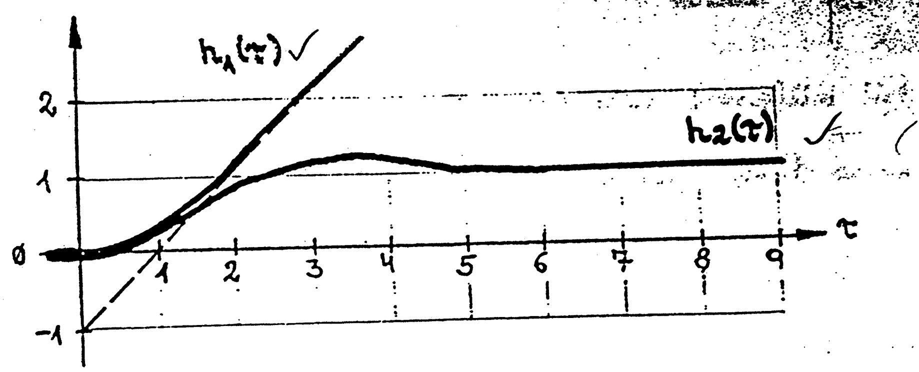
$$H_2(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{s} - \frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} - \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

?

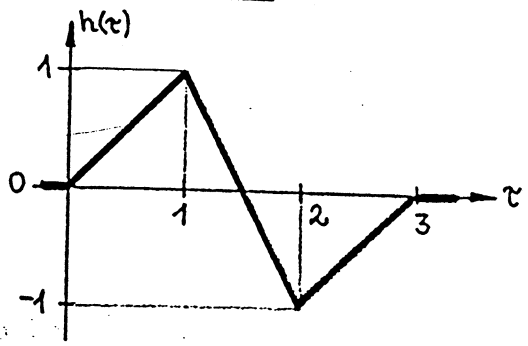
zu

$$h_2(\tau) = \left[1 - e^{-\frac{\tau}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tau\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\tau}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tau\right)\right]\varepsilon(\tau)$$

$$\underline{\underline{h_2(\tau)}} = \left[1 - e^{-\frac{\tau}{2}}\left\{\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tau\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tau\right)\right\}\right]\varepsilon(\tau) = \underline{\underline{\left[1 - \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\tau}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tau - \frac{\pi}{6}\right)\right]}}$$



Übergangsfunktion:



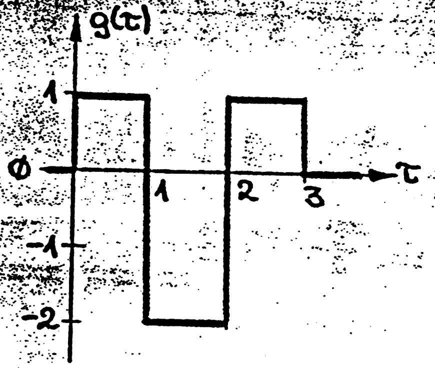
Ein lineares System besitzt die dargestellte Übergangsfunktion $h(\tau)$.

(i) Wie lautet seine Übertragungsfunktion $G(s)$?
(ii) Geben Sie eine Realisierung mit idealen Integratoren und idealen Totzeitgliedern an.

LÖSUNG:

(i) Die Stoßantwort erhalten wir aus der Sprungantwort durch verallgemeinerte Differentiation.

$$g(\tau) = h^{(1)}(\tau) = \{h^{(1)}(\tau)\} + \underbrace{[\![h(\tau)]\!]}_{=0 \text{ in unserem Fall}} \varepsilon^{(1)}(\tau)$$



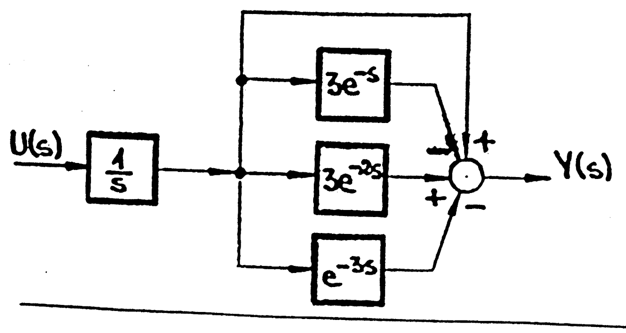
$$h(\tau) = \begin{cases} \tau & , 0<\tau<1 \\ -2\tau+3 & , 1<\tau<2 \\ \tau-3 & , 2<\tau<3 \end{cases} \longrightarrow g(\tau) = \begin{cases} 1 & , 0<\tau<1 \\ -2 & , 1<\tau<2 \\ 1 & , 2<\tau<3 \end{cases}$$

$$\underline{g(\tau) = \varepsilon(\tau) - 3\varepsilon(\tau-1) + 3(\tau-2) - \varepsilon(\tau-3)}$$

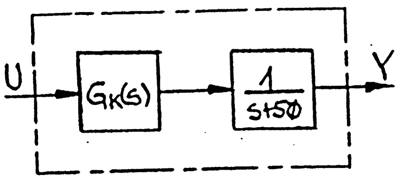
Mit Hilfe von Tab. 4.1 Zeile 2: $\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$ und dem Zeitverschiebungssatz folgt für die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \mathcal{L}[g(\tau)] = \frac{1}{s} - 3\frac{e^{-s}}{s} + 3\frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{s} = \underline{\underline{\frac{1}{s}\left[1 - 3e^{-s} + 3e^{-2s} - e^{-3s}\right]}}.$$

(ii) Realisierungsmöglichkeit:



Übertragungsfunktion eines Teilsystems:



Bestimmen Sie $G_K(s)$ so, daß der Betragsteil des Bode-Diagramms der Gesamtübertragungsfunktion $G(s)$ für Frequenzen $\nu < 100$ zwischen $\pm 10\,dB$ liegt und für Frequenzen $\nu > 1000$ mit $40\,dB\,/\,Dek.$ abfällt.

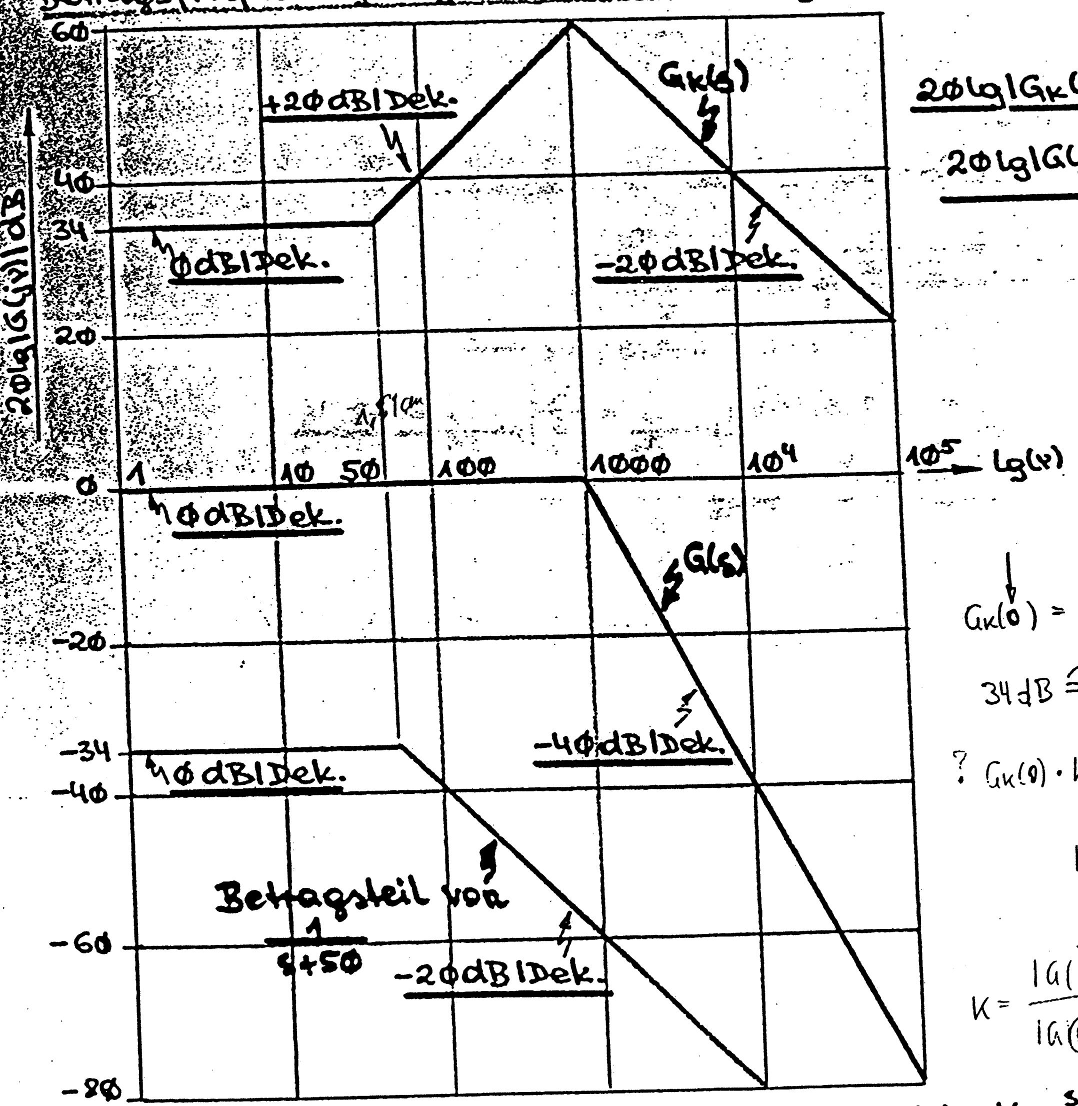
LÖSUNG:

Die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems lautet

$$G(s) = G_K(s)\,\frac{1}{s+50}\,.$$

$\ln G = \ln G_L + \ln G_1$

Betragsfrequenzgänge als Bode-Diagramm:



$$\underline{20\lg|G_K(j\nu)|\,dB =}$$
$$\underline{20\lg|G(j\nu)|\,dB - 20\lg\left|\frac{1}{j\nu+50}\right|}$$

$G_K(0) = 50 \cdot 10^{-6}$

$34\,dB \mathrel{\hat{=}} 50$ (bei $\nu = 0$)

? $G_K(0) \cdot K = 50$

$$K = \frac{50}{G_K(0)} = 10^6$$

$$K = \frac{|G(1)|}{|G_K(0)|}$$

Aus dem Betragsfrequenzgang von $G_K(s)$ folgt $\underline{G_K(s) = K\,\frac{s+50}{(s+1000)^2}}$.

Der konst. Verstärkungsfaktor K folgt aus dem Randwert 34 dB zu $\underline{K=}$

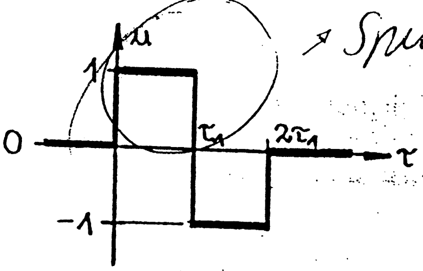
$$\underline{G_K(s) = 10^6\,\frac{s+50}{(s+1000)^2}}$$

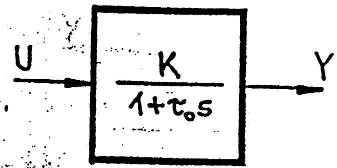
IV

Übertragungssystem:

$u(\tau) \to y(\tau) = h(\tau) \leftarrow H(s)$

→ Sprungantworten!





An einem System mit der angegebenen Übertragungsfunktion liegt der skizzierte Eingang $u(\tau)$. Berechnen und skizzieren Sie den Verlauf des Ausgangs $y(\tau)$. (Nehmen Sie für die Skizze $\tau_0 = \tau_1$ an.)

LÖSUNG:

$$G(s) = \frac{K}{1+\tau_0 s}$$

Laplace-Transformierte der Sprungantwort:

$$\underline{H(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{K}{s(1+\tau_0 s)} = \frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{1+\tau_0 s}}$$

Residuen: $\underline{r_1} = sH(s)\Big|_{s=0} = \frac{K}{1+\tau_0 s}\Big|_{s=0} = \underline{K}$

$\underline{r_2} = (1+\tau_0 s)H(s)\Big|_{s=-\frac{1}{\tau_0}} = \frac{K}{s}\Big|_{s=-\frac{1}{\tau_0}} = \underline{-\tau_0 K}$

$$H(s) = \frac{K}{s} - \frac{\tau_0 K}{1+\tau_0 s} = \frac{K}{s} - \frac{K}{s+\frac{1}{\tau_0}}$$

Mit Hilfe von Tab. 4.1

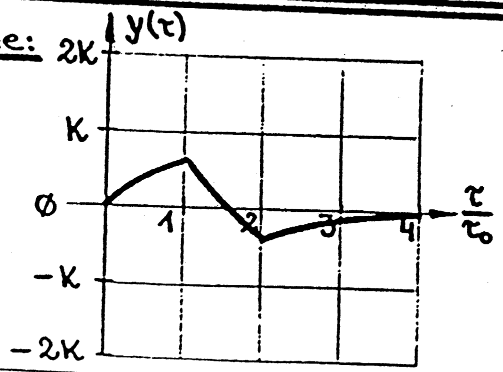
Zeile 2: $\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$ und Zeile 6: $e^{-a\tau}\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+a}$ folgt

$$h(\tau) = K\left(1-e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}\right)\varepsilon(\tau).$$

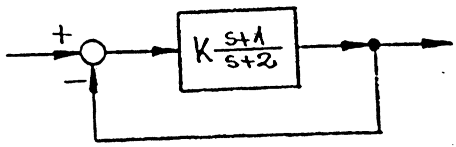
Der Eingang $u(\tau) = \varepsilon(\tau) - 2\varepsilon(\tau-\tau_1) + \varepsilon(\tau-2\tau_1)$ liefert den Ausgang

$$\underline{y(\tau) = h(\tau) - 2h(\tau-\tau_1) + h(\tau-2\tau_1) = K\left(1-e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}\right)\varepsilon(\tau) - 2K\left(1-e^{-\frac{\tau-\tau_1}{\tau_0}}\right)\varepsilon(\tau-\tau_1) + K\left(1-e^{-\frac{\tau-2\tau_1}{\tau_0}}\right)\varepsilon(\tau-2\tau_1)}$$

Skizze:



Wurzelortskurve:



Zeichnen Sie für das angegebene System die Wurzelortskure in Abhängigkeit der Verstärkung K.

LÖSUNG:

Die Gesamtübertragungsfunktion des Systems lautet

$$\underline{G(s)} = \frac{K\frac{s+1}{s+2}}{1+K\frac{s+1}{s+2}} = \frac{K(s+1)}{K(s+1)+s+2} = \frac{K(s+1)}{s(K+1)+K+2} = \underline{\frac{K}{K+1}\cdot\frac{s+1}{s+\frac{K+2}{K+1}}}.$$

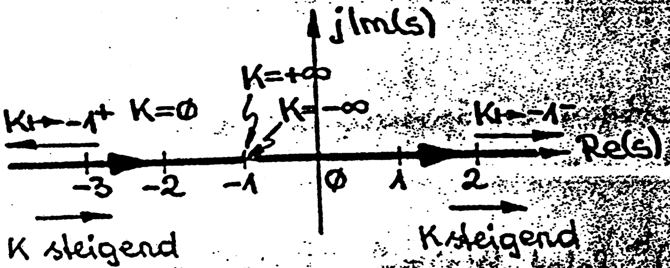
Das System besitzt einen einfachen Pol $p_1 = p_1(K) = -\frac{K+2}{K+1}$.

$\underline{p_1(0) = -2}$, $\underline{p_1(-1^+) = -\infty}$, $\underline{p_1(-1^-) = \infty}$ und $\underline{p_1(\infty) = p_1(-\infty) = -1}$,

(p_1 ist immer reell). Die Wurzelortskurve verläuft ausschließlich auf der reellen Achse.

von der pos. Seite komme

von der neg. Seite komme



Mit wachsender Verstärkung $K>0$ wandert der ursprünglich bei -2 liegende Pol in Richtung zur bei -1 liegenden Nullstelle des Systems.

Zeitverschobenes Ausgangssignal:

Ein lineares System wird durch eine Differentialgleichung der Form

$$y^{(1)}(\tau)+y(\tau-\tau_0)=u(\tau)$$

beschrieben. $e^{-s\tau}$ → $u(0-)=0 \to G(s)$

Berechnen Sie seine Sprungantwort $h(\tau)$.

Hinweis: $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{e^{-s}}{-s}\right)=\frac{1}{1+\frac{e^{-s}}{s}}$ ↪ dh $U(0-)=0$

→ $y(0-)=0$ kausales System

LÖSUNG:

Die Laplace-Transformierte der System-DGL ergibt sich mit Hilfe des Differentiationssatzes im Zeitbereich $x^{(1)}(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, sX(s)-x(0-)$. In unserem Fall ist $x(0-)=0$.

$$sY(s)+e^{-s\tau_0}Y(s)=U(s)$$

Die Übertragungsfunktion des Systems lautet

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{s+e^{-s\tau_0}}.$$

Laplace-Transformierte der Sprungantwort: $H(s)=\frac{G(s)}{s}=\frac{1}{s(s+e^{-s\tau_0})}$,

$$H(s)=\frac{1}{s^2}\frac{1}{1+\frac{e^{-s\tau_0}}{s}}.$$

Mit $\frac{1}{1+\frac{e^{-s\tau_0}}{s}}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{e^{-s\tau_0}}{-s}\right)^k$ folgt $H(s)=\frac{1}{s^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{e^{-sk\tau_0}}{s^k}$.

$$H(s)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{e^{-sk\tau_0}}{s^{k+2}}=\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k-2}\frac{e^{-s(k-2)\tau_0}}{s^k}.$$

Mit Hilfe von Tab. 4.1

Zeile 5: $\frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!}\varepsilon(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{s^n}$ folgt

$$h(\tau)=\mathcal{L}^{-1}[H(s)]=\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k-2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s(k-2)\tau_0}}{s^k}\right]$$

$$h(\tau)=\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k-2}\frac{[\tau-(k-2)\tau_0]^{k-1}}{(k-1)!}\varepsilon(\tau)$$ $\varepsilon(\tau-\tau_0(k-2))$

bzw. anders geschrieben

$$h(\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{[\tau-(k-1)\tau_0]^k}{k!}\varepsilon(\tau),$$

IV

Gesamtübertragungsfunktion des Systems aus Abb. 2:

$$G(s) = \frac{G_1 G_2}{1 - G_1 G_2} \qquad (5)$$

Gleichsetzen von (4) und (5): $\frac{k}{s+1-k} = \frac{G_1 G_2}{1-G_1 G_2} = \frac{G_x}{1-G_x} \rightarrow$

$k - k\cancel{G_x} = sG_x + G_x - k\cancel{G_x} \rightarrow G_x = \frac{k}{1+s} \rightarrow G_1 = k$ und $G_2 = \frac{1}{1+s}$ d.h.

eine solche Darstellung ist möglich.

(ii) Stabilitätsuntersuchung:

Wurzeln des char. Polynoms $s+(1-k) \rightarrow p_1 = k-1$

Das System ist stabil, wenn $p_1 < 0$ ist, d.h. $k<1$ ist.