Vorlesung, CN, 24.10.2005

Korrekt gestelltes Problem

- Es gibt eine eindeutige Lösung:

  Beispiel: $Ax=b$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

  ist A regulär $\Rightarrow$ $\exists!$ Lösung $x = A^{-1}b$. ✓

- Die Lösung hängt stetig von den Daten ab:

  Beispiel: Es ist zu zeigen, daß x von b stetig abhängt, A nehme ich als exakt an.

  D.h.: Man betrachte eine Folge von gestörten rechten Seiten $b_\nu = b + \delta_\nu$ und $\tilde{x}_\nu = A^{-1} b_\nu$,

  Es muß gelten $\|\delta_\nu\| \underset{\nu\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow \|\tilde{x}_\nu - x\| \underset{\nu\to\infty}{\to} 0$.

Beweis dazu:

$$\tilde{x}_\nu - x = A^{-1}b_\nu - A^{-1}b = A^{-1}(b+\delta_\nu) - A^{-1}b = A^{-1}\delta_\nu$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \|\tilde{x}_\nu - x\| = \|A^{-1}\delta_\nu\| \text{ und damit} \\ \|\tilde{x}_\nu - x\| \le \|A^{-1}\| \, \|\delta_\nu\| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{\nu\to\infty} \|\tilde{x}_\nu - x\| \le \lim_{\nu\to\infty} \left(\|A^{-1}\| \|\delta_\nu\|\right) = \|A^{-1}\| \cdot \lim_{\nu\to\infty} \|\delta_\nu\| = 0$$

$$0 \le \lim_{\nu\to\infty} \underbrace{\|\tilde{x}_\nu - x\|}_{\ge 0} \le 0 \Rightarrow \lim_{\nu\to\infty} \|\tilde{x}_\nu - x\| = 0$$ ✓

Relative Konditionszahl einer Funktionsauswertung:

$$K_{f\leftarrow x} \cong \left| \frac{x\, f'(x)}{f(x)} \right|$$

Beispiel: $f(x) = \ln(1+x)$, $x > -1$

$$K_{f\leftarrow x} = \left| \frac{x \frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)} \right| = \left| \frac{x}{(1+x)\ln(1+x)} \right| .$$

Für große Werte von x!

$$K_{f\leftarrow x} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} K_{f\leftarrow x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln(1+x) + (1+x)\frac{1}{(1+x)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln(1+x)+1} = 0 \checkmark$$

gute Kondition

Für $x = 0$:

$$K_{f\leftarrow x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln(1+x)+1} = 1 \checkmark$$ gute Kondition

Für $x \approx -1$: $K_{f\leftarrow x} = \left| \frac{-1}{0 \cdot \infty} \right|$

Wir berechnen zuerst

$$\lim_{x \to -1} (1+x)\ln(1+x) = \text{"}0 \cdot \infty\text{"} =$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^{-1}} \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=} \lim_{x \to -1} \frac{\frac{1}{1+x}}{(-1)(1+x)^{-2}} =$$

$$= -\lim_{x \to -1} (1+x) = 0 \Rightarrow K_{f \leftarrow x} = \left|\frac{-1}{0}\right| = \infty$$

schlechte Kondition für $x \approx -1$.

Kondition der Subtraktion

$$K_{a-b \leftarrow a} = \left|\frac{a \cdot \frac{\partial(a-b)}{\partial a}}{a-b}\right| = \left|\frac{a \cdot 1}{a-b}\right| = \left|\frac{a}{a-b}\right|$$

$$K_{a-b \leftarrow b} = \left|\frac{b \cdot \frac{\partial(a-b)}{\partial b}}{a-b}\right| = \left|\frac{b \cdot (-1)}{a-b}\right| = \left|\frac{b}{a-b}\right|$$

sehr schlecht für $a \approx b$!