Stabilität von Algorithmen

Zuerst überprüfen wir die Kondition:

(1) $y(x) = \frac{1-\cos x}{x}$, $|x| \ll 1$, $x \approx 0$.

$x \to \tilde{x} = x(1+\varepsilon) \ldots \varepsilon$ rel. Datenfehler $\Rightarrow$

$y \to \tilde{y} = y(1+\delta) \ldots \delta$ rel. Datenfehler effect

mit $\boxed{\delta \cong K_{y \leftarrow x} \cdot \varepsilon \cong 1 \cdot \varepsilon}$ wegen

$$K_{y \leftarrow x} = \left| \frac{x \cdot y'(x)}{y(x)} \right| = \left| x \cdot \frac{\frac{(\sin x)x - (1-\cos x)}{x^2}}{\frac{1-\cos x}{x}} \right| =$$

$$= \left| \frac{x \sin x - 1 + \cos x}{1 - \cos x} \right| = \left| \frac{x \sin x}{1-\cos x} - 1 \right|$$

In der Nähe von Null: $x \sin x \approx \left(x\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)\right)$ und

$1 - \cos x = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!}\right)$ und damit

$$K_{y \leftarrow x} \cong \left| \frac{x^2\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)}{\frac{x^2}{2}} - 1 \right| \approx \left| \frac{1 - \frac{x^2}{6}}{\frac{1}{2}} - 1 \right| \approx |2-1| = 1 \checkmark$$

Damit ist der Verstärkungsfaktor in

$$\delta \cong \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Verstärkungsfaktor}}}{1} \cdot \varepsilon$$

sehr klein und das Problem ist gut konditioniert.

Jetzt betrachten wir die Rechenfehler:

(2) $x \in \mathbb{F}$

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \cos x \\ z_2 &= 1 - z_1 \\ y = z_3 &= \frac{z_2}{x} \end{aligned}\right\} \text{exakt} \qquad \left.\begin{aligned} \tilde{z}_1 &= \cos x\,(1+\varepsilon_1) \\ \tilde{z}_2 &= (1-\tilde{z}_1)(1+\varepsilon_2) \\ \tilde{z}_3 = \tilde{y} &= \frac{\tilde{z}_2}{x}(1+\varepsilon_3) \end{aligned}\right\} \text{in der Arithmetik}$$

Wir streben die Form an,

$$\tilde{y} \doteq y(1+\delta_R) \quad \text{mit } \delta_R = \bar{t}_1\varepsilon_1 + \bar{t}_2\varepsilon_2 + \bar{t}_3\varepsilon_3$$

Wir rechnen also los,

$$\tilde{y} = \frac{(1-\cos x(1+\varepsilon_1))(1+\varepsilon_2)}{x}(1+\varepsilon_3) =$$

$$\doteq \frac{(1-\cos x - \varepsilon_1 \cos x)(1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)}{x} =$$

$$= \left(\frac{1-\cos x}{x}\right)\left(1 - \frac{\cos x}{1-\cos x}\varepsilon_1\right)\left(1+\varepsilon_2+\varepsilon_3\right) =$$

$$\doteq y\Big(\underbrace{1-\frac{\cos x}{1-\cos x}\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}_{\delta_R}\Big).$$

Wir haben also $\delta_R = F_1\varepsilon_1 + F_2\varepsilon_2 + F_3\varepsilon_3$ und

$$F_1 = -\frac{\cos x}{1-\cos x},\quad F_2 = F_3 = 1 \text{ erreicht.}$$

Die Faktoren F_2 und F_3 sind in der Größenordg von $K_{y\leftarrow x}$, aber F_1 ist viel größer für x klein. Tritt diese Situation auf, so sprechen wir von einen instabilem Algorithmus. Die Ursache ist die Auslöschung.

Wir können die Faktoren F_1, F_2, F_3 auch anders berechnen. Betrachten wir noch einmal den Rechengang:

$$\begin{cases} y(z_3) = z_3 & \dots \text{ RF } \varepsilon_3 \text{ bei der Berechng von } z_3 \\ y(z_2) = \dfrac{z_2}{x} & \dots \text{ RF } \varepsilon_2 \quad \text{—"—} \quad \text{von } z_2 \\ y(z_1) = \dfrac{1-z_1}{x} & \dots \text{ RF } \quad \text{—"—} \quad \text{von } z_1 \end{cases}$$

Stellt man das Resultat y mit Hilfe des Zwischenresultates z_k dar, so ergibt sich das sogenannte Restproblem. Mit Hilfe der Konditionszahlen kann ich nun die Verstärkungsfaktoren berechnen mit denen sich die Ungenauigkeiten des Zwischenresultates z_k (rel. Fehler gleich ε_k) auf das Endergebnis auswirken

$$F_3 \overset{?}{=} \frac{z_3 \cdot y'(z_3)}{y(z_3)} = \frac{z_3 \cdot 1}{z_3} = 1 \checkmark$$

$$F_2 \overset{?}{=} \frac{z_2 \cdot y'(z_2)}{y(z_2)} = \frac{z_2 \cdot \frac{1}{x}}{\frac{z_2}{x}} = 1 \checkmark$$

$$F_1 \overset{?}{=} \frac{z_1 \cdot y'(z_1)}{y(z_1)} = \frac{z_1\left(-\frac{1}{x}\right)}{\frac{1-z_1}{x}} = \frac{-z_1}{1-z_1} = \frac{-\cos x}{1-\cos x} \checkmark$$

Wir können auch sagen, daß der Algorithmus instabil ist, falls die Restprobleme schlechter konditioniert sind als das math. Problem.

Alternative Auswertung von $y := \dfrac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$

Algorithmus:		Restprobleme:
$z_1 = \frac{x}{2}$	$\ldots \ \varepsilon_1$	$y(z_5) = z_5$
$z_2 = \sin z_1$	$\ldots \ \varepsilon_2$	$y(z_4) = \frac{z_4}{x}$
$z_3 = z_2^2$	$\ldots \ \varepsilon_3$	$y(z_3) = \frac{2z_3}{x}$
$z_4 = 2z_3$	$\ldots \ \varepsilon_4$	$y(z_2) = \frac{2z_2^2}{x}$
$y = z_5 = \frac{z_4}{x}$	$\ldots \ \varepsilon_5$	$y(z_1) = \frac{2\sin^2 z_1}{x}$

$$F_5 = \frac{z_5 \cdot y'(z_5)}{y(z_5)} = \frac{z_5 \cdot 1}{z_5} = 1$$

$$F_4 = \frac{z_4 \cdot y'(z_4)}{y(z_4)} = \frac{z_4 \cdot \frac{1}{x}}{\frac{z_4}{x}} = 1$$

$$F_3 = \frac{z_3 \cdot y'(z_3)}{y(z_3)} = \frac{z_3 \cdot \frac{2}{x}}{\frac{2z_3}{x}} = 1$$

$$F_2 = \frac{z_2 \cdot y'(z_2)}{y(z_2)} = \frac{\frac{z_2 \cdot 2z_2 \cdot 2}{x}}{\frac{2z_2^2}{x}} = 2$$

$$F_1 = \frac{z_1 \cdot y'(z_1)}{y(z_1)} = \frac{\frac{z_1 \cdot 2 \cdot \cancel{2\sin z_1} \cdot \cos z_1}{\cancel{x}}}{\frac{\cancel{2}\sin^{\cancel{2}} z_1}{\cancel{x}}} = \frac{2 z_1 \cos z_1}{\sin z_1}$$

$F_1 \approx 2$ für $z_1 \approx 0$, da $\frac{z_1}{\sin z_1} \approx 1$ und $\cos z_1 \approx 1$.

Damit ist der gesamte Rechenfehler

$$\delta_R = 2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 \quad \text{und} \quad |\delta_R| \le 7\,\text{eps}.$$

Der Algorithmus ist stabil.

Vergleich: Datenfehlerdarstellung

$\delta = 1 \cdot \varepsilon$ und Rechenfehlerdarstellung

$\delta_R = 2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 1 \cdot \varepsilon_3 + 1 \cdot \varepsilon_4 + 1 \cdot \varepsilon_5$ Stabile Variante

$\delta_R = \left(-\frac{\cos x}{1-\cos x}\right)\varepsilon_1 + 1 \cdot \varepsilon_2 + 1 \cdot \varepsilon_3$ Instabile Variante

Faktor $F_1 \gg 1$! für $x \approx 0$.

Lineare Gleichungssysteme

Gegeben sei das System $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x, b \in \mathbb{R}^n$.
Daten A und b; gesucht x.

(1) $\exists!$ Lösung $x \iff A$ regulär, d.h.

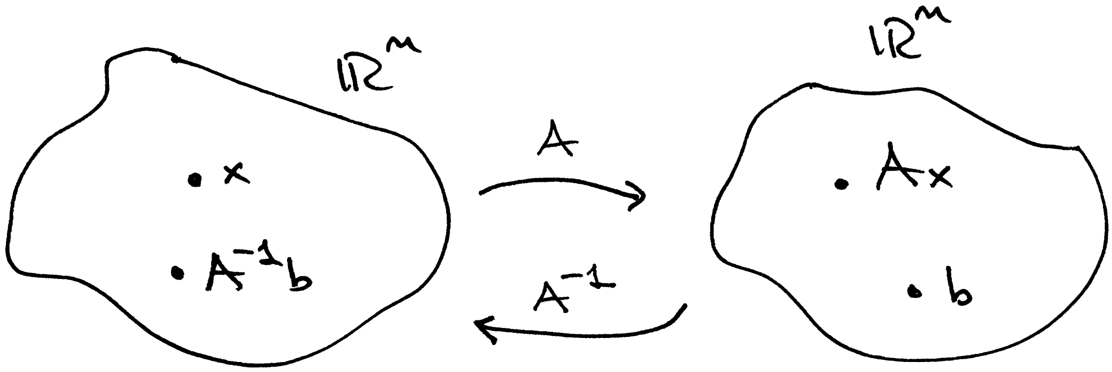
- $\det A \neq 0$
- alle Spalten und alle Zeilen sind lin. unabhängig
- $\exists$ die Inverse A^{-1}
- A hat keine Eigenwerte Null

Für die Lösung x gilt: $\underset{\sim\sim\sim}{x = A^{-1}b}$

In diesem Fall gilt: Das Bild von $A = \mathbb{R}^n$.

$$\mathcal{B}(A) = \mathbb{R}^n.$$

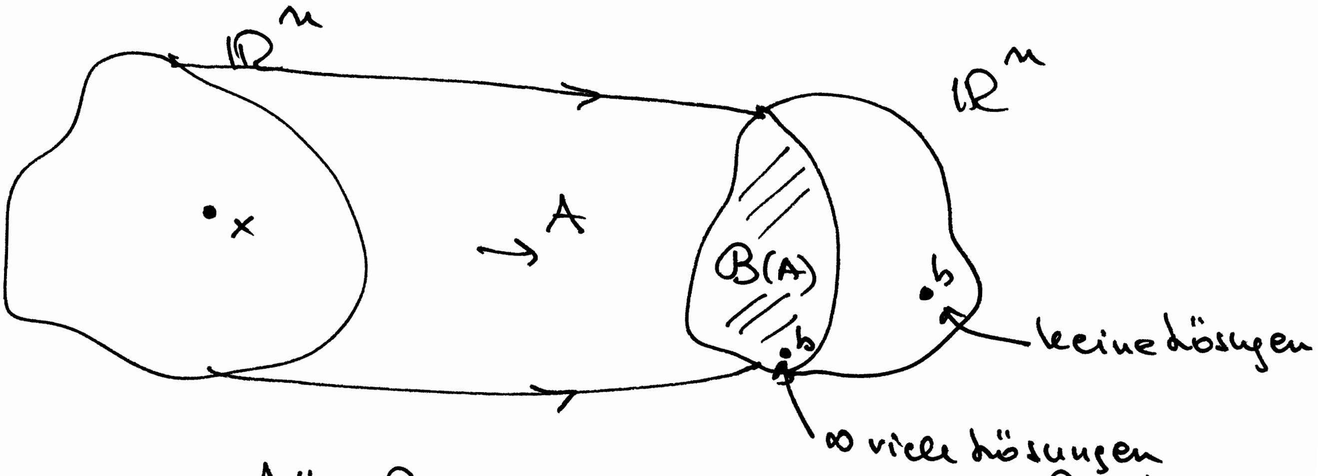
Man sieht die Matrix A als eine (lineare) Abbildung von $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ an. Diese Abbildung ist eindeutig. D.h.



Jedes $x \in \mathbb{R}^n$ hat ein eindeutiges Bild unter A, $y = Ax$ (wie jede Abbildung) und jedes $b \in \mathbb{R}^n$ hat ein eindeutiges Urbild: $x = A^{-1}b$.

(2) A singulär $\Rightarrow$ $\mathcal{B}(A) \subset \mathbb{R}^n$.

Das Bild von $\mathbb{R}^n$ unter A ist eine echte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$:



Alle Bilder von x liegen in $\mathcal{B}(A)$.

Damit gilt:

- liegt $b \in \mathcal{B}(A)$, dann gibt es ∞ viele $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = b$.

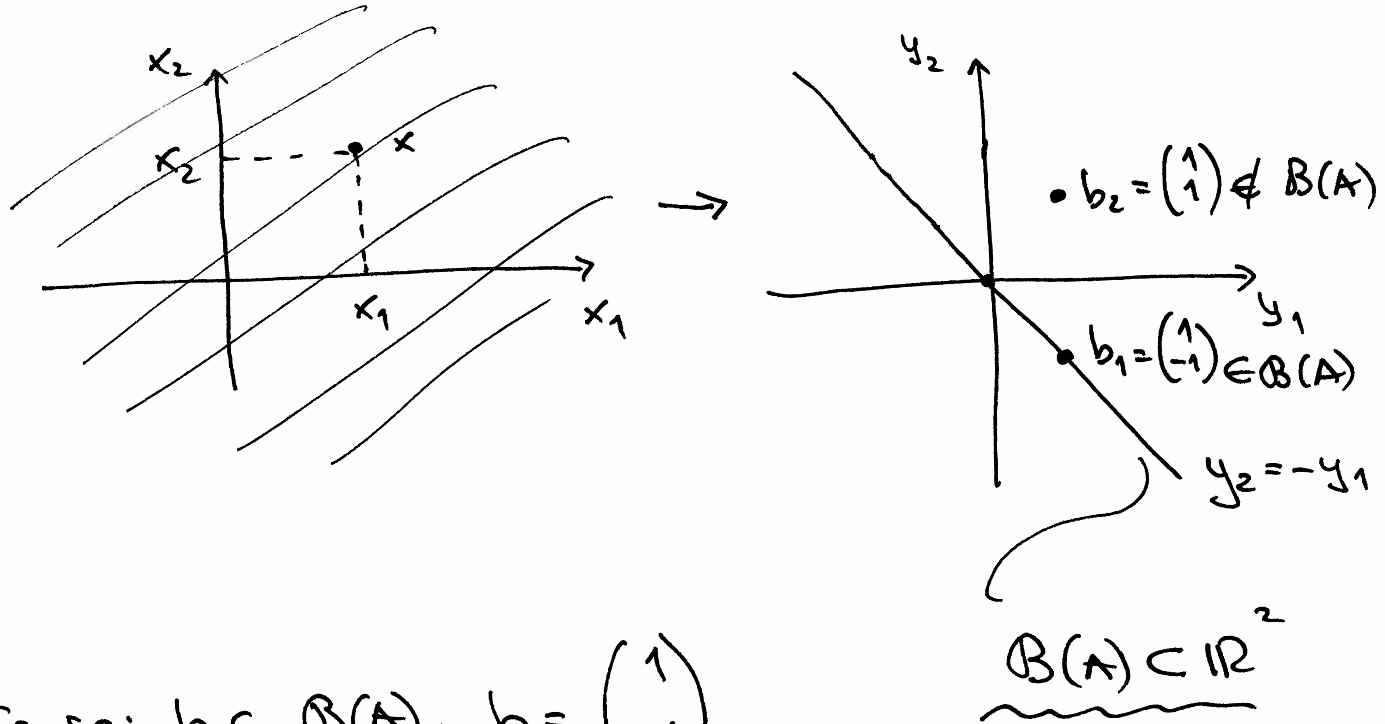
- liegt $b \notin \mathcal{B}(A)$, dann gibt es keine $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = b$.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Behauptung: Diese Matrix bildet $\mathbb{R}^2$ auf eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ ab. Betrachte Bilder unter A:

$$y = Ax,\ x \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow y = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ mit } y_2 = -y_1.$$



Es sei $b \in B(A)$, $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad Ax = b_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \quad x_1 = 1 - 2x_2 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 \text{ beliebig}$$

also ∞ viele Lösungen.

Es sei $b_2 \notin B(A)$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad Ax = b_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad 0 = 2 \ \lightning$$

also keine Lösungen.