Lineares Funktional ist eine lineare Abbildung, die Funktionen auf Zahlen abbildet.

<u>Linearität</u>

Es sei $F: V \to \mathbb{R}$, $V = \{$Raum von Funktionen, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.

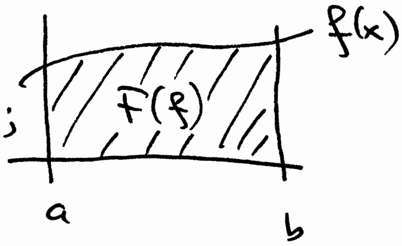
F heißt linear, falls

$$F(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 F(f_1) + c_2 F(f_2), \quad \forall f_1, f_2 \in V$$
$$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Beispiele für lin. Funktionale:

(1) Integral

$$F(f) := \int_a^b f(x)\,dx, \quad f \text{ stetig};$$



linear da

$$F(c_1 f_1 + c_2 f_2) = \int_a^b (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))\,dx =$$

$$= \int_a^b c_1 f_1(x)\,dx + \int_a^b c_2 f_2(x)\,dx = c_1 \underbrace{\int_a^b f_1(x)\,dx}_{F(f_1)} + c_2 \underbrace{\int_a^b f_2(x)\,dx}_{F(f_2)}$$

(2) Auswertung einer Funktion an einer festen Stelle

$$F(f) = f(x_0); \quad f \text{ stetig};$$

linear wegen

$$F(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 f_1(x_0) + c_2 f_2(x_0) = c_1 F(f_1) + c_2 F(f_2)$$

(3) Auswertung der ersten Ableitung

$$F(f) := f'(x_0), \quad f \text{ stetig differenzierbar,}$$

linear wegen

$$F(c_1 f_1 + c_2 f_2) = (c_1 f_1 + c_2 f_2)'_{x=x_0} =$$

$$= (c_1 f_1)'_{x=x_0} + (c_2 f_2)'_{x=x_0} = c_1 \underbrace{f_1'(x_0)}_{F(f_1)} + c_2 \underbrace{f_2'(x_0)}_{F(f_2)}.$$

Norm als eine Möglichkeit Längen und Abstände zu messen.

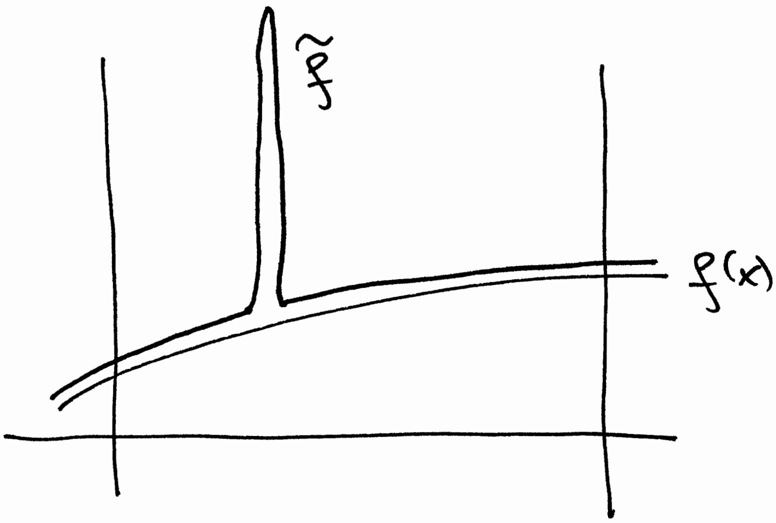
⇒ Wir müßen in der Lage sein Fehler in Funktionen, Vektoren und Matrizen zu messen.

⇒ Norm wird allgemein eingeführt ... über ihre Eigenschaften.

⇒ Verschiedene Normen messen verschiedene Sachen. Beispiel: Funktionennorm

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx, \quad f \text{ stetig}$$

$$\|f\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |f(x)|, \quad f \text{ stetig}$$



Bezüglich $\|\cdot\|_\infty$-Norm ist der Abstand zwischen $\tilde{f}$ und f groß, aber nicht bezüglich $\|\cdot\|_1$-Norm.

Matrixnorm

Wir fassen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ als eine lin. Abbildung zwischen $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^n$ auf:

$$A: \; x \in \mathbb{R}^n \to y = Ax \in \mathbb{R}^n,$$

und verleichen die Längen der Bilder und Urbilder. Die größte Streckung gibt die „Größe" von A an:

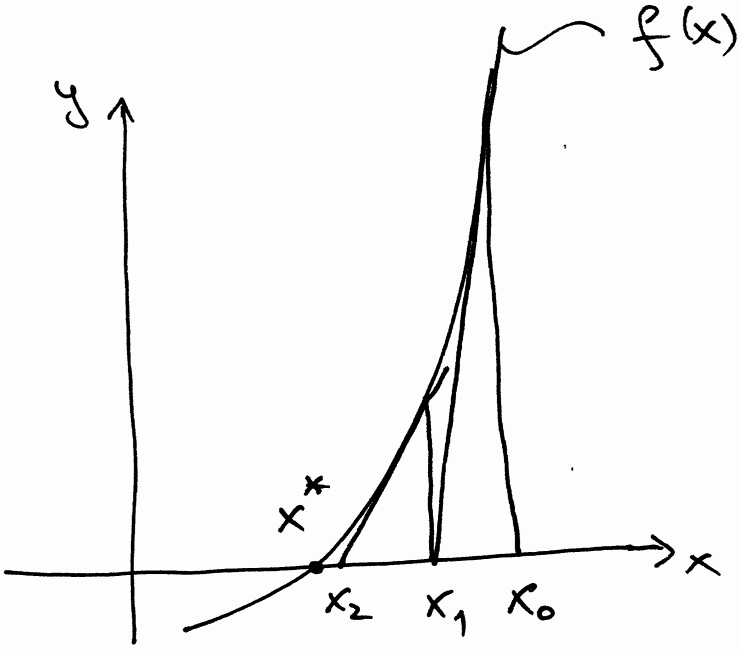
$$\|A\|_i = \max_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|_i}{\|x\|_i}, \quad i = 1, 2, \infty$$

Newton-Verfahren

Dient zur Lösung von Nullstellenproblemen und beruht auf der Linearisierungsidee.

Gegeben sei eine Funktion $f(x): \underbrace{x}_{\in \mathbb{R}} \rightarrow \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{R}}$; $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

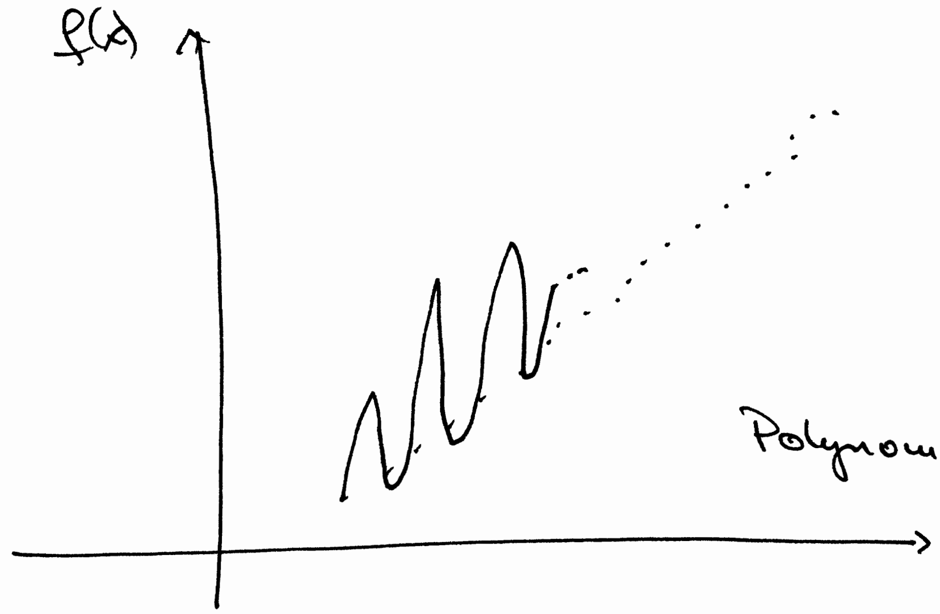
Finde ein x^* mit $f(x^*) = 0$.



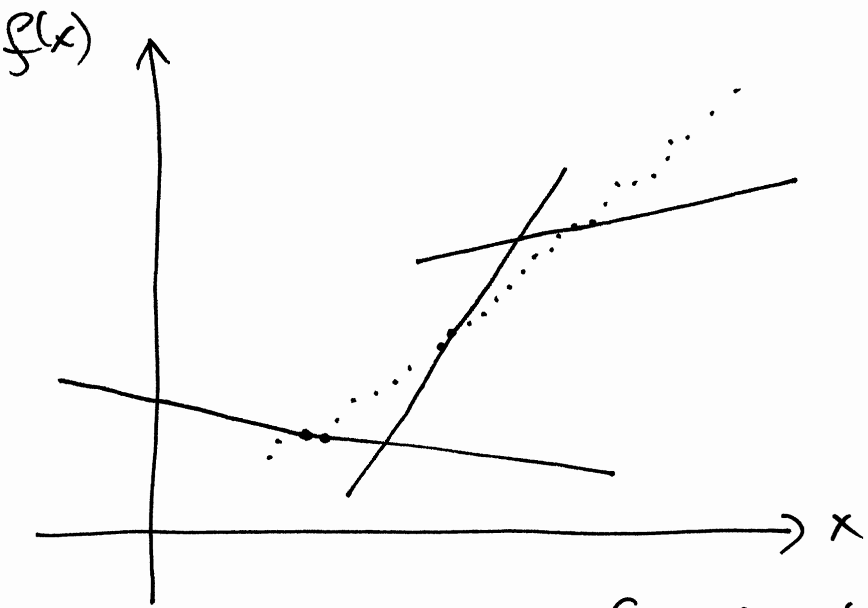
Die Funktion f wird an den Stellen x_k durch ihre Tangente ersetzt, die Nullstelle der Tangente wird zu x_{k+1}.

Linearer Ausgleich

Bei gestörten (vielen) Daten hat es keinen Sinn zu versuchen mit einem Polynom hohen Grades diese Daten zu interpolieren. Auch eine willkürliche Auswahl von Daten einer endlichen Untermenge ist nicht sinnvoll.



Polynom hohen Grades



Gerade, die durch jeweils zwei Punkte durchgehen

Beide Vorgansweisen geben das Verhalten der gemessenen Funktion nicht wieder!

Deshalb ... linearer Ausgleich!

Rückwärtsfehler

Exaktes Problem

$Ax = b$, $x = A^{-1}b$ ... exakte Lösung, falls A^{-1} existiert.

$\tilde{x}$ ... Näherung für x

"Vorwärtsfehler": $\|\tilde{x} - x\|$ absolut

$\left(x \neq 0, \; \dfrac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \text{ relativ}\right)$

Finde eine Datenstörung (in A oder b, oder in A und b), so daß $\tilde{x}$ die exakte Lösung des gestörten Problems, mit $\tilde{A} = A + \Delta A$ und $\tilde{b} = b + \Delta b$, ist.

Wähle $\Delta A = 0$, d.h. $\tilde{A} = A$, und $\Delta b = A\tilde{x} - b$.

Dann gilt $A\tilde{x} = \tilde{b}$, wegen $A\tilde{x} = b + A\tilde{x} - b$ ✓

d.h. der Rückwärtsfehler lautet:

$\|\tilde{b} - b\| = \|A\tilde{x} - b\|$ absolut

$\left(b \neq 0, \; \dfrac{\|\tilde{b} - b\|}{\|b\|} = \dfrac{\|A\tilde{x} - b\|}{\|b\|} \text{ relativ}\right)$

$r(\tilde{x}) = A\tilde{x} - b$ heißt Residuum.