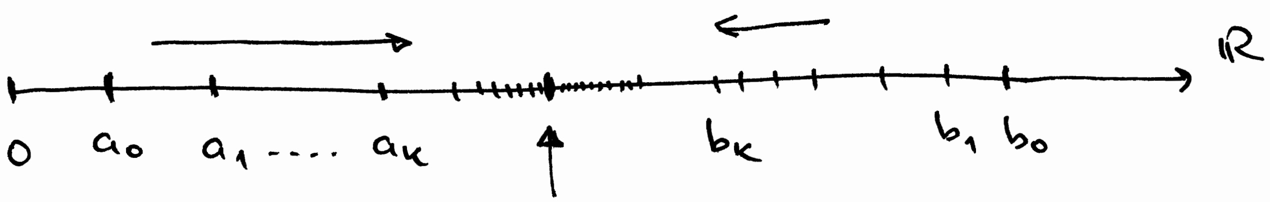
Vorlesung CN, 10.10.2005

Berechnung von $T(\varphi_0, \ell) = \frac{4}{\omega} I(\varphi_0)$, $\omega = \sqrt{g/\ell}$, und

$$I(\varphi_0) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\varphi_0/2)\sin^2 t}}\, dt.$$

Gauß: $a_0 = \sqrt{1-\sin^2(\varphi_0/2)}$, $\quad b_0 = 1$

$$\underbrace{a_k = \sqrt{a_{k-1} b_{k-1}}}_{\text{monoton wachsend}}, \qquad \underbrace{b_k = \frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}}_{\text{monoton fallend}}$$



$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k$$

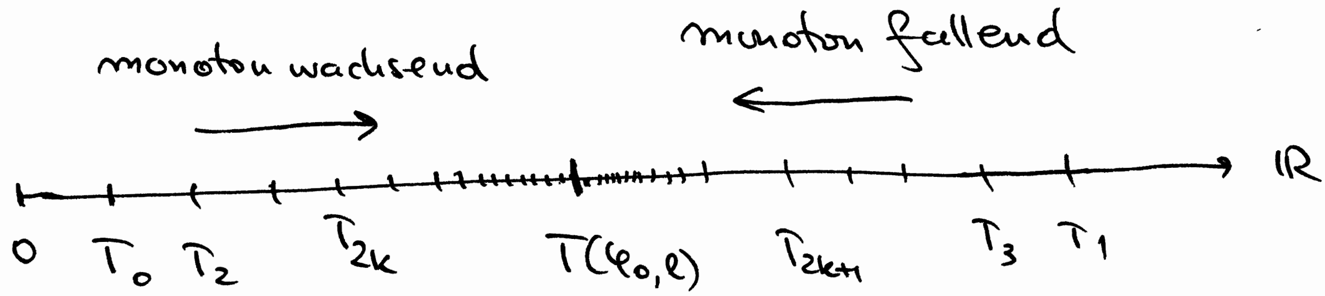
Es gilt:

$$T(\varphi_0, \ell) = \frac{4}{\omega} I(\varphi_0) = \frac{2\pi}{\omega \lim_{k\to\infty} b_k} = \frac{2\pi}{\omega \lim_{k\to\infty} a_k},$$

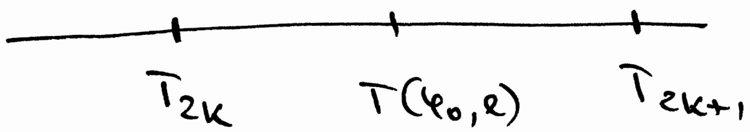
d.h. $$I(\varphi_0) = \frac{\pi}{2\lim_{k\to\infty} b_k} = \frac{\pi}{2\lim_{k\to\infty} b_k}$$

Folge von Näherungen für $T(\varphi_0, \ell)$:

$$\begin{cases} T_{2k} := \dfrac{2\pi}{\omega b_k}, & k = 0,1,2\ldots \\[2ex] T_{2k+1} := \dfrac{2\pi}{\omega a_k}, & k = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$



Fehlerschätzung:



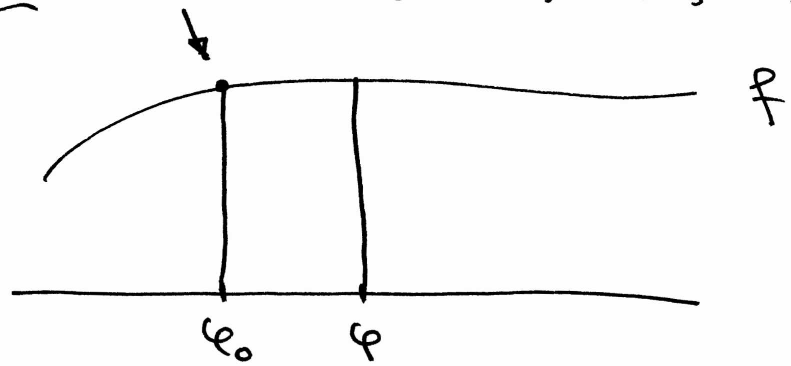
$\forall k$: $\quad |T(\varphi_0, \ell) - T_{2k}| \le |T_{2k+1} - T_{2k}|$ abs. Fehler

$$\left| \frac{T(\varphi_0, \ell) - T_{2k}}{T(\varphi_0, \ell)} \right| \approx \left| \frac{T(\varphi_0, \ell) - T_{2k}}{T_{2k}} \right| \le \left| \frac{T_{2k+1} - T_{2k}}{T_{2k}} \right| \le \mathrm{TOL}^2$$

analog für T_{2k+1}.

Taylorreihe

gegeben $f(\varphi_0), f'(\varphi_0), f''(\varphi_0) \dots$



Damit kann man $f(\varphi)$ wie folgt darstellen:

$$f(\varphi) = f(\varphi_0) + \frac{f'(\varphi_0)}{1!}(\varphi-\varphi_0) + \frac{f''(\varphi_0)}{2!}(\varphi-\varphi_0)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(\varphi_0)}{k!}(\varphi-\varphi_0)^k$$
$$+ \underbrace{\frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(\varphi-\varphi_0)^{k+1}}_{\text{Restglied}}, \quad \varphi_0 < \xi < \varphi.$$

Linearisierung bedeutet, daß man den nichtlinearen Zusammenhang $f(\varphi)$ durch den linearen

$$f(\varphi_0) + f'(\varphi_0)(\varphi-\varphi_0)$$

approximiert: $f(\varphi) \approx f(\varphi_0) + f'(\varphi_0)(\varphi-\varphi_0)$.

Beispiel: $f(\varphi) = \sin\varphi, \quad \varphi_0 = 0$

$$\Rightarrow f(\varphi) = f(\varphi_0) + \frac{f'(\varphi_0)}{1!}(\varphi-\varphi_0) + \text{Fehler}$$

$f(\varphi) = \sin\varphi \quad , \varphi_0 = 0 \Rightarrow \quad f(\varphi_0) = 0$

$f'(\varphi) = \cos\varphi \, , \quad f'(\varphi_0) = 1$

$f''(\varphi) = -\sin\varphi, \quad f''(\varphi_0) = 0$

$f'''(\varphi) = -\cos\varphi \, , \quad \varphi'''(\eta) = -\cos\eta$

$$\Rightarrow \sin\varphi = 0 + \frac{1}{1!}(\varphi - 0) + \frac{0}{2!}(\varphi-0)^2 + \frac{(-\cos\eta)}{3!}(\varphi-0)^3 =$$

$$= \varphi - \frac{\varphi^3}{3!}\cos\eta$$

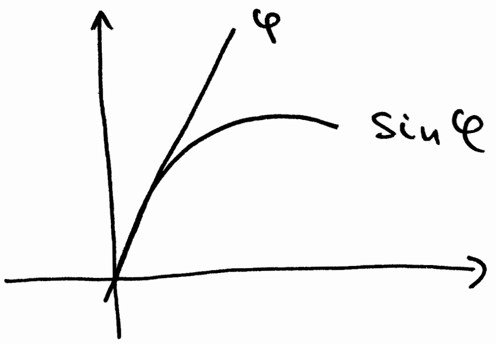
Sonderfall: Normalerweise ist der Fehler der Linearisierung eine quadratische Funktion in $(\varphi - \varphi_0)$:

$$\underbrace{f(\varphi)}_{\text{nichtlin. Funkt.}} = \underbrace{f(\varphi_0) + \frac{f'(\varphi_0)}{1!}(\varphi - \varphi_0)}_{\text{Linearisierung}} + \underbrace{\frac{f''(\eta)}{2!}(\varphi - \varphi_0)^2}_{\text{Fehler.}}$$

Hier, da $f''(\varphi_0) = 0$ ist, kann man weiterentwickeln und der Fehler ist eine kubische Funktion in $(\varphi - \varphi_0)$:

$$\underbrace{f(\varphi)}_{\text{nichtlin. Funktion}} = \underbrace{f(\varphi_0) + \frac{f'(\varphi_0)}{1!}(\varphi - \varphi_0)}_{\text{Linearisierung}} + \underbrace{\frac{f''(\varphi_0)}{2!}(\varphi - \varphi_0)^2}_{=0} + \underbrace{\frac{f'''(\eta)}{3!}(\varphi - \varphi_0)^3}_{\text{Fehler}}$$

Während der Linearisierg ersetzen wir $\sin\varphi$ durch φ,



d.h. eine nichtlin. Funktion durch eine affine[(*)] Funktion.
Die linearen Probleme sind immer einfacher zu behandeln.
Während man das AWP

$$\text{NL}\begin{cases}\varphi''(t) = -\omega^2\sin(\varphi(t)) , & \omega = \sqrt{g/\ell}\\ \varphi(0) = \varphi_0, \ \varphi'(0) = 0\end{cases}$$

nicht geschlossen lösen kann, d.h. $T(\varphi_0,\ell)$ nicht als elementare Funktion der Daten darstellen kann, wird das für das linearisierte Problem

$$\text{LIN}\begin{cases}\varphi''(t) = -\omega^2\varphi(t)\\ \varphi(0) = \varphi_0, \ \varphi'(0) = 0\end{cases}$$

möglich sein.

Achtung: Die Probleme NL und LIN sind nur dann verwandt, wenn der Linearisierungsfehler $-\frac{\varphi^3}{3!}\cos\xi$ klein ist, also nur für kleine Auslenkungen φ.

(*) Affine Funktion $f(x) = ax+b$, hat als den Graphen eine Gerade, aber für sie gilt nicht(!) $f(c_1x_1+c_2x_2) = c_1f(x_1)+c_2f(x_2)$

Lösung von LIN:

Ansatz: $\varphi(t) = a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t)$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$\varphi'(t) = a\cdot\cos(\omega t)\cdot\omega - b\cdot\sin(\omega t)\cdot\omega$$

$$\varphi''(t) = -a\sin(\omega t)\omega^2 - b\cos(\omega t)\omega^2 =$$

$$= -\omega^2 \underbrace{\left(a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t)\right)}_{\varphi(t)} = -\omega^2\varphi(t)$$

d.h. $\varphi(t)$ löst die Differentialgleichung.

Randbedingungen:

$$\varphi(0) = \varphi_0 = a\sin(0) + b\cos(0) = b$$

$$\varphi'(0) = 0 = a\omega\cos(0) - b\omega\sin(0) = a\omega \Rightarrow a = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = \varphi_0\cos(\omega t)$$

Berechnung der Schwingungsdauer:

Finde T, sodaß $\varphi(T) = \varphi_0$!

$$\varphi(T) = \varphi_0\cos(\omega T) = \varphi_0 \Rightarrow \cos(\omega T) = 1$$

(1) $\Rightarrow \omega T = 0 \Rightarrow T = 0 \vee$ Anfangsbeding

(2) $\Rightarrow \omega T = 2\pi \Rightarrow T = T_{Lin} = T_{Lin}(\varphi_0, l) = \frac{2\pi}{\omega}$

Die Lösung der lin. Problems hängt nicht von φ_0 ab.