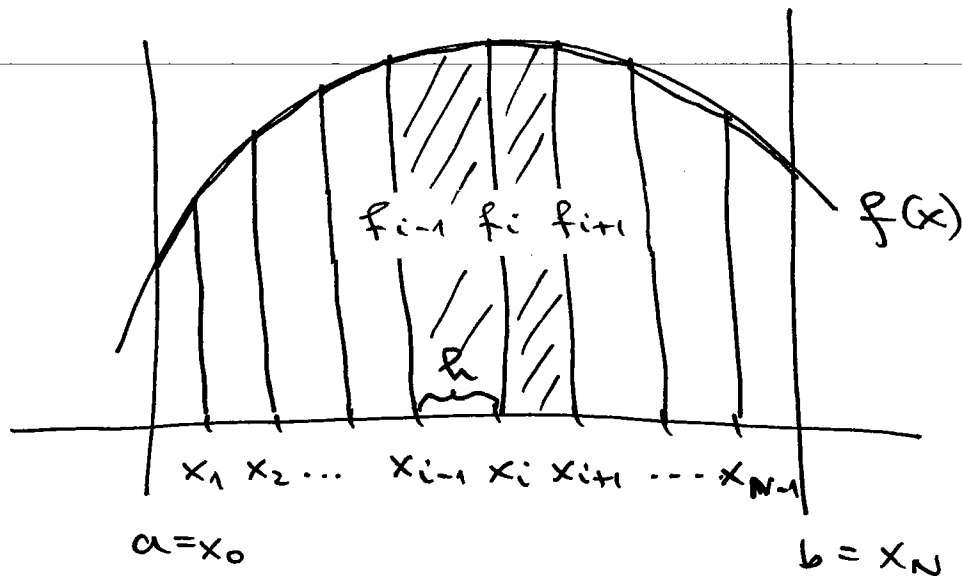


Numerische Integration

Die Trapezregel



$$h = \frac{b-a}{N}$$

$$Q[f] = T_h[f] = h \left(\frac{1}{2} f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_i) + \dots + f(x_{N-1}) + \frac{1}{2} f(b) \right).$$

Die Werte an den inneren Stellen x_1, x_2, \dots, x_{N-1} erhalten das Gewicht h , die Werte an den Randstellen $x_0 = a$ und $x_N = b$, das Gewicht $\frac{h}{2}$. Berechnen wir die Fläche zwischen x_{i-1} und x_{i+1} , so ergibt sich

$$\frac{1}{2} h (f_{i-1} + f_i) + \frac{1}{2} h (f_i + f_{i+1}) = \frac{1}{2} h f_{i-1} + h f_i + \frac{1}{2} h f_{i+1}$$

Verfahrensfelder der T_h -Regel für $f \in C^2[a, b]$,

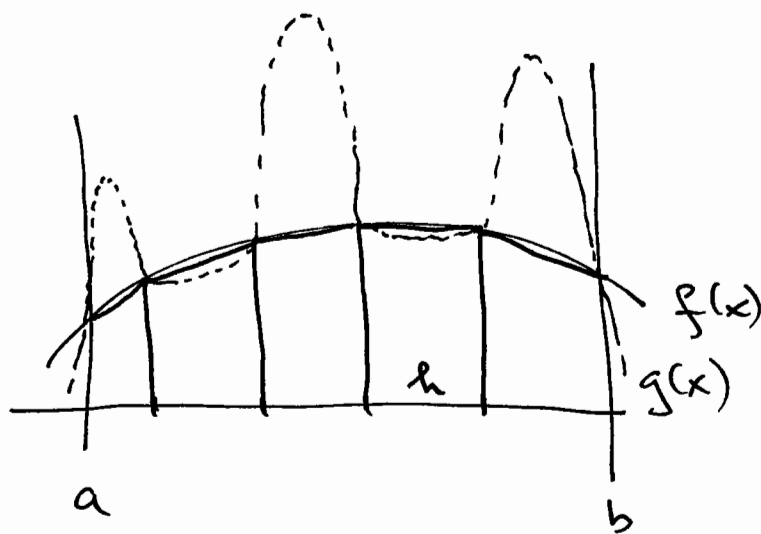
$$|T_h[f] - I[f]| \leq \underbrace{\frac{h^2}{12}(b-a)}_{\text{a-priori Fehlerschranke}} M_2,$$

$$M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$$

a-priori Fehlerschranke

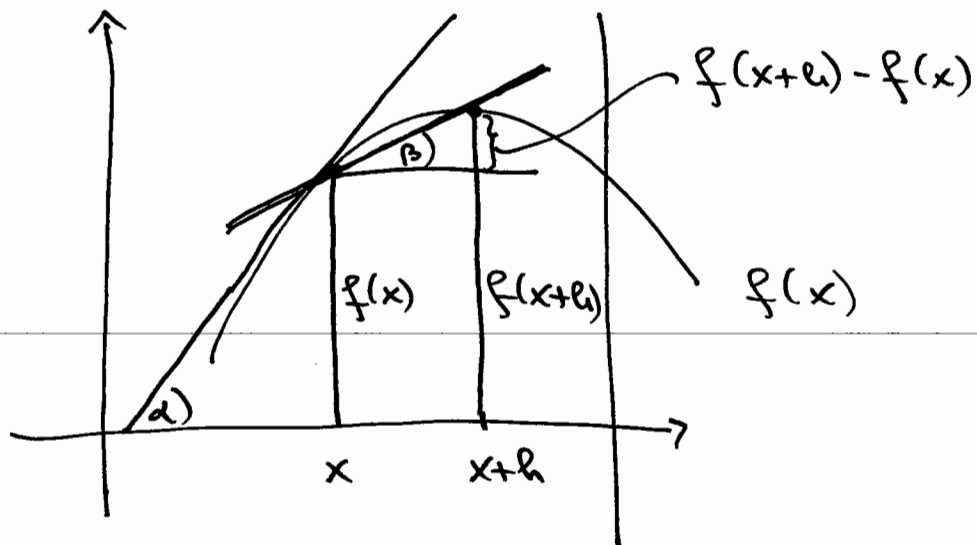
A-priori Fehlerschranke

- besagt, daß das Verfahren quadratisch für $h \rightarrow 0$ konvergiert, d.h. der Verfahrensfelder $\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$;
- für ein festes h : Fehler wird groß, wenn $f''(x)$ groß ist, siehe Skizze.



$T_h[f]$ ist eine gute Approximation für $I[f]$,
aber $T_h[g] = T_h[f]$ eine schlechte für $I[g]$. Die
Krümmung von g ist viel stärker als die von f ,
und damit g'' viel größer als f'' .

Numerische Differentiation

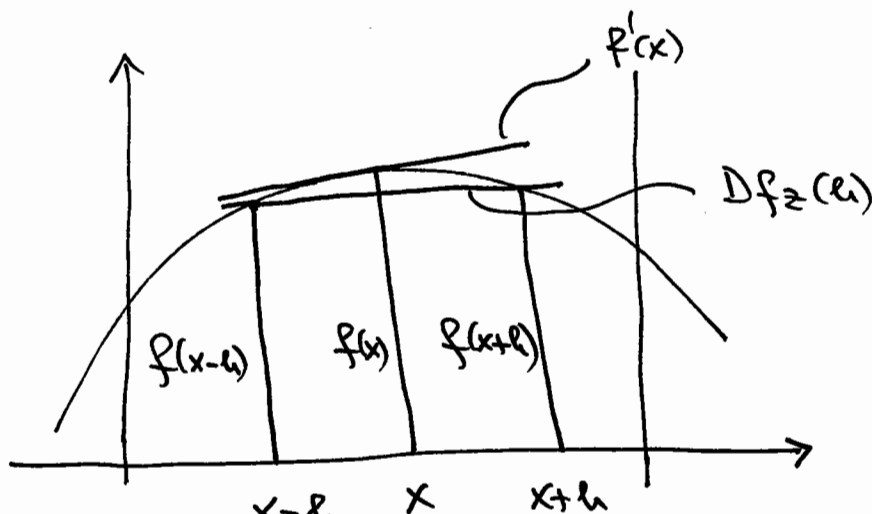


Man sucht die Approximation für $f'(x) = \tan \alpha$.
Eine Möglichkeit ist die Steigung der Sehne zu nehmen:

$$Df_e(h) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \tan \beta.$$

"Einseitiger Differenzenquotient"

Eine weitere ist die folgende Sehne zu nehmen



$$Df_z(h) := \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}; \text{ "zentrale Differenzenquotient" }$$

(4)

A-priori Fehlerschranken werden nicht zur Kontrolle des Fehlers während der Rechenprozesse benötigt. Man überprüft nicht, ob

$$|Df_e(h) - f'(x)| \leq \frac{h}{2} M_2 \leq \text{TOL}$$

ist, bzw. man rechnet h nicht aus

$$h \leq \frac{2\text{TOL}}{M_2} \quad \begin{array}{c} \text{⚡} \text{⚡} \text{⚡} \\ \downarrow \downarrow \downarrow \end{array}$$

und zwar deswegen, weil $M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$ nicht zur Verfügung steht.

Statt dessen leitet man die a-posteriori Fehlerschranken = Fehlerschätzungen für $Df_e(h) - f'(x)$ bzw. $Df_z(h) - f'(x)$ her.

Als Beispiel leiten wir eine solche Fehlerschätzung für $Df_z(h) - f'(x)$ her.

Taylorreihe liefert:

$$(1) Df_z(h) = f'(x) + \frac{h^2}{6} f'''(x) + O(h^3), \text{ falls } f \in C^4[a,b]$$

Beachten Sie die Form des Restgliedes

$$O(h^3) = \frac{h^3}{48} (f^{(4)}(\eta_1) - f^{(4)}(\eta_2)) \text{ mit } x < \eta_1 < x+h, \quad x-h < \eta_2 < x.$$

Analog erhalten wir

$$(2) Df_2\left(\frac{h}{2}\right) = f'(x) + \frac{h^2}{24} f'''(x) + O(h^3) \text{ mit}$$

$$O(h^3) = \frac{h^3}{384} (f^{(4)}(\xi_1) - f^{(4)}(\xi_2)) \text{ mit}$$

$$x < \xi_1 < x + \frac{h}{2}, \quad x - \frac{h}{2} < \xi_2 < x.$$

Aus der Differenz von (1) und (2) folgt:

$$\begin{aligned} Df_2(h) - Df_2\left(\frac{h}{2}\right) &= h^2 f'''(x) \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{24}\right) + O(h^3) \\ &= h^2 f'''(x) \cdot \frac{3}{24} + O(h^3) \quad \left| \cdot \frac{4}{3} \Rightarrow \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} (Df_2(h) - Df_2\left(\frac{h}{2}\right)) &= \underbrace{h^2 f'''(x) \cdot \frac{1}{6}} + O(h^3) \Rightarrow \\ &= Df_2(h) - f'(x) + O(h^3) \text{ nach (1)} \end{aligned}$$

$$\underbrace{\frac{4}{3} (Df_2(h) - Df_2\left(\frac{h}{2}\right))}_{\text{Fehlerschätzung}} = \underbrace{(Df_2(h) - f'(x))}_{\text{unbekannter exakter Fehler von } Df_2(h)} + O(h^3)$$

Für genügend kleine h ist die Fehlerschätzung zuverlässig, da Fehler $\xrightarrow{h \rightarrow 0} O(h^2)$ und

$$\begin{aligned} (\text{Fehlerschätzung} - \text{Fehler}) &\rightarrow O(h^3) \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \text{also} \\ &\text{Schneller!} \end{aligned}$$