(1) Berechnung der Inversen einer regulären $n \times n$ Matrix aus $n$ lin. Gleichungssystemen,

$$A \cdot A^{-1} = A \cdot (q_1\, q_2 \cdots q_n) = I = (e_1\, e_2 \cdots e_n)$$

mit $e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ← k-te Komponente $\Rightarrow$

$$\boxed{A q_k = e_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n}$$

Die teure LU-Zerlegung erfolgt nur einmal.

In Matlab: $A^{-1} = A \backslash I$

(2) "LU"-Zerlegung für eine symmetrische, positiv definite Matrix wird mit Hilfe des Cholesky-Verfahrens gemacht.

A ist symmetrisch, falls $A = A^T$ gilt.

A ist positiv definit, falls $x^T A x > 0 \;\forall x \neq 0$ gilt.

Cholesky-Verfahren liefert die folgende

Zerlegung:

$$A = U^T U, \quad \text{mit } U = (\nabla).$$

„\“-Operator erkennt automatisch ob man Cholesky anwenden kann; wenn nicht, dann wird Gauß-Elimination durchgeführt.

<u>Bemerkung:</u>

Ist $A$ symm. und pos. def. dann sind alle Eigewerte von $A$ reell und positiv, $A$ ist dann auch regulär.

$$Ax = b \Rightarrow U^T U x = b \Rightarrow U^T y = b, \; Ux = y.$$

(3) Linearer Ausgleich entspricht der Lösung eines linearen Gleichungsystems $Ax=b$ mit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}_{A\in\mathbb{R}^{m\times n}} \underbrace{\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}}_{x\in\mathbb{R}^{n}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}}_{b\in\mathbb{R}^{m}}, \quad m > n$$

Die Zerlegung von $A$ ist nun

$R \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$A = Q\tilde{R} = \begin{pmatrix} & & \\ & Q & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ \emptyset \end{pmatrix},$$

$Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ $\qquad \tilde{R} \in \mathbb{R}^{m\times n}$

wobei $Q$ eine orthogonale $m\times m$ Matrix und $R$ eine quadratische $n\times n$ Matrix, obere Dreiecksmatrix ist.

<u>Bemerkung:</u>

Was bedeutet orthogonal?

Zuerst Skalarprodukt: Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$, dann ist ihr Skalarprodukt durch

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^T y$$

gegeben:

$$x^T y = (x_1, x_2 \dots x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\|x\|_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = x^T x = (x_1, \dots, x_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Für den Winkel, den die beiden Vektoren einschließen gilt

$$\cos(\sphericalangle(x,y)) = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|_2 \|y\|_2}.$$

Damit sind zwei Vektoren parallel, falls

$$\langle x,y\rangle = 1 \text{ gilt,}$$

und sie stehen aufeinander senkrecht, falls

$$\langle x,y\rangle = 0 \text{ ist.}$$

Eine Matrix heißt <u>Orthogonal</u>, falls

- ihre Spaltenvektoren paarweise aufeinander senkrecht sind und
- die Längen der Spaltenvektoren gleich 1 sind

also $Q = \begin{pmatrix} | & | & & | & & | & & | \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_l & \cdots & q_k & \cdots & q_n \\ | & | & & | & & | & & | \end{pmatrix}$ ist orthogonal

falls gilt:

$$\langle q_l, q_k) = 0 \iff q_l \perp q_k \ \forall\, l \neq k \text{ und}$$

$$\| q_k \|_2 = \| q_k \|_2^2 = 1 \iff \langle q_k, q_k \rangle = 1 \ \forall k.$$

Stellt man sich $Q$ als eine Abbildung vor:

$$Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2 \text{, linear, so}$$

hat ein $Q$, das eine orthogonale Matrix ist, gewisse spezielle Eigenschaften:

$Q$ dreht und spiegelt die Vektoren, verändert aber nicht ihre Euklidische Länge!

Betrachte ein Bild $y$ von $x$ unter $Q$: $y = Qx$,

dann gilt

$$\|y\|_2^2 = \|Qx\|_2^2 = (Qx)^T Qx = x^T \underbrace{Q^T Q}_{I} x =$$

$$= x^T x = \|x\|_2^2 \Rightarrow \|x\|_2 = \|y\|_2 ,$$

wegen $Q^T Q = I$:

$$\begin{pmatrix} — & q_1 & — \\ — & q_2 & — \\ & \vdots & \\ — & q_n & — \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & & | \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = (\langle q_l, q_k \rangle)_{\substack{l=1,\dots,n \\ k=1,\dots,n}}$$

$= I$ aus der Definition von $Q$.

Zurück zur Lösung von $Ax=b \iff$

$$Q\tilde{R}x=b.$$

Hat A den vollen Rang, d.h. sind die n Spalten von A ~~sind~~ linear unabhängig, so ist R regulär. Damit folgt

$$Q\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \end{pmatrix} \iff \text{wegen } Q^T = Q^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} x = Q^T b = \begin{pmatrix} (Q^T b)_1 \\ \hdashline (Q^T b)_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{x = R\backslash(Q^T b)_1}$$

wegen $\underbrace{Rx = (Q^T b)_1}$ und R regulär.

Der ganze Vorgang wird in Matlab mit

$$x = A\backslash b$$

automatisch durchgeführt.

(weitere Details zum lin. Ausgleich, siehe nächste Vorlesung)