Technische Universität Wien

Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie

für InformatikerInnen (107.254)

Neue Folien zur Vorlesung WS 2005

Revision A Herwig Wittmann <herwig@koffein.org>

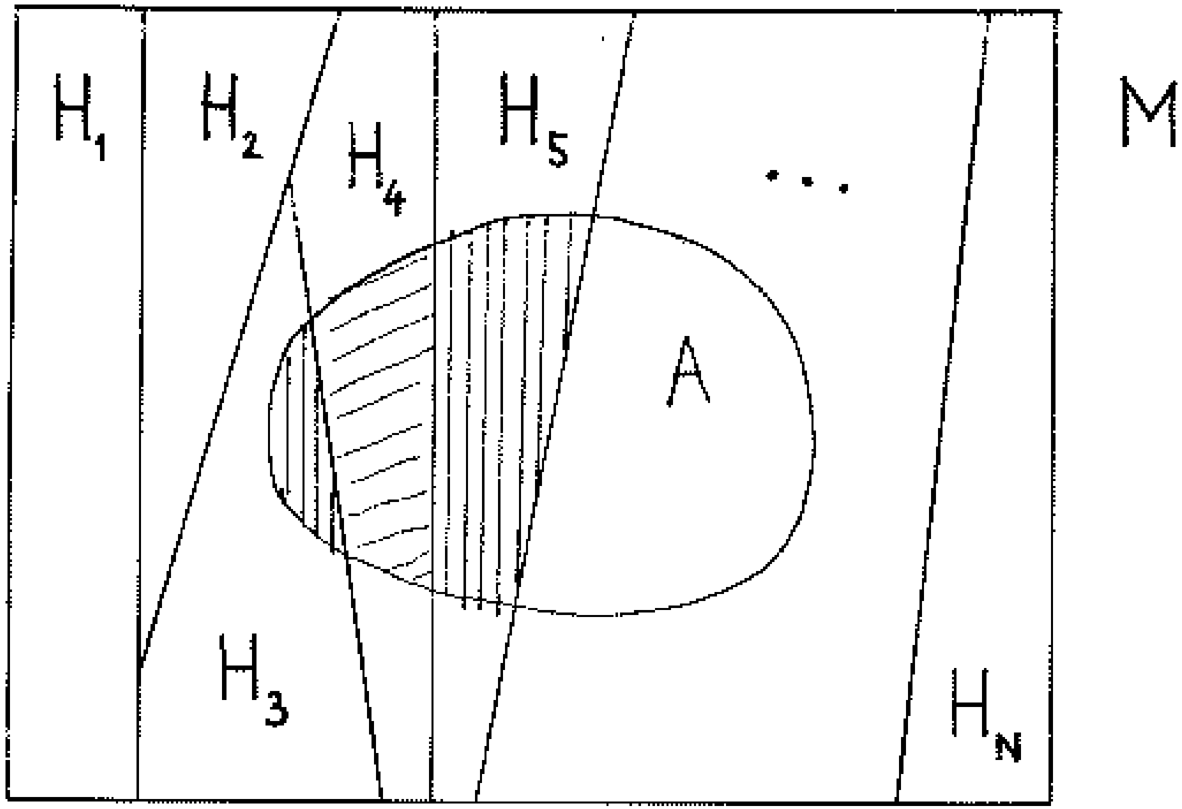
4.7 Satz v. d. vollständigen Wahrscheinlichkeit

In jedem W-Raum $(M, \mathfrak{L}, W)$ gilt:

Ist $(H_k)_{k=1,\dots,N}$ eine endliche oder abzählbare Folge von paarweise disjunkten Ereignissen mit $W\left(\bigcup_{k=1}^{N} H_k\right) = 1$ und $W(H_k) > 0 \;\; \forall k = 1(1)N$, so gilt $\forall\, A \in \mathfrak{L}$

$$W(A) = \sum_{k=1}^{N} W(H_k) \cdot W(A \mid H_k)$$

Beweis: $A = \left[A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{N} H_k\right)\right] \cup \left[A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{N} H_k\right)^c\right]$



H_1
H_2
H_4
H_5
...
M
A
H_3
H_N

$$W\Big(\bigcup_{k=1}^{N} H_k\Big) = 1 \;\Rightarrow\; W\Big(\Big(\bigcup_{k=1}^{N} H_k\Big)^c\Big) = 0$$

$$\Rightarrow W\Big(A \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{N} H_k\Big)^c\Big) = 0$$

$$\Rightarrow W(A) = W\Big(A \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{N} H_k\Big)\Big) = W\Big(\bigcup_{k=1}^{N} (A \cap H_k)\Big)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \underbrace{W(A \cap H_k)}_{W(A|H_k)\cdot W(H_k)} = \sum_{k=1}^{N} W(H_k)\cdot W(A|H_k) \quad /\!\!/$$

4.8 Bayes'sche Formel S. 31

Unter den Vsn. des Satzes v. d. vollst. W. gilt:

$$W(H_i | A) = \frac{W(H_i) \cdot W(A | H_i)}{\sum_{k=1}^{N} W(H_k) \cdot W(A | H_k)} \quad \forall i = 1(1)N$$

Beweis: Zähler Multiplikationstheorem

Nenner Satz v. d. vollst. W

<u>Bem.</u>: $W(H_k)$ ... A-priori-Wahrsch. der H_k

$W(H_k | A)$ ... A-posteriori-W. " "

<u>Anwendung</u>: Qualitätssicherung

Produkte von verschiedenen Maschinen $H_1, \dots, H_m$

$W(H_k)$ ... W(Stück von Maschine H_k)

A ... Ausschussstück in Produktion

Frage 1: $W(A)$ ... S.v.v.W.

Frage 2: Wahrsch., dass ein Ausschussstück von der Maschine H_i stammt

Bayes'sche Formel $W(H_i | A)$

5. STOCHASTISCHE UNABHÄNGIGKEIT

S. 32

Unabhängigkeit von Ereignissen
Unabhängigkeit von Versuchen

<u>Definition</u>: Zwei Ereignisse A und B eines W-Raums heißen (stochastisch) unabhängig, i.Z. $A \perp\!\!\!\perp B$, wenn $W(A \cap B) = W(A) \cdot W(B)$.

5.1 Satz: Für Ereignisse A und B mit $W(A) > 0$, $W(B) > 0$, $W(A^c) > 0$ und $W(B^c) > 0$ gilt:

$$A \perp\!\!\!\perp B \Leftrightarrow \begin{cases} W(A|B) = W(A|B^c) = W(A) \\ W(B|A) = W(B|A^c) = W(B) \end{cases}$$

Anwendung: QS, Ziehungen <u>mit</u> Zurücklegen

<u>Definition</u>: Eine Familie $(A_i\,;\, i\in I)$ von Ereignissen eines W-Raumes heißen unabhängig, wenn für jede endliche Teilfamilie $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ gilt:

$$W(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = W(A_{i_1}) \cdots W(A_{i_k})$$

<u>Anwendung</u>: 1) mehrfache Ziehungen

2) zusammengesetzte Versuche

$$M = \{(x_1, \dots, x_n) \;:\; x_i \in M_i\} = M_1 \times \dots \times M_n$$

5.2 Produktwahrscheinlichkeitsräume

n W-Räume $(M_i, \mathcal{E}_i, W_i)$, $i = 1(1)n$

auf $M_1 \times \cdots \times M_n$ wird das am wenigsten umfassende Ereignisfeld betrachtet, das alle Mengen der Gestalt $A_1 \times \cdots \times A_n$ mit $A_i \in \mathcal{E}_i$ enthält. Das so bestimmte Ereignisfeld wird mit $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{E}_i$ bezeichnet.

Auf $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{E}_i$ ist mittels der W_i folgendermaßen eine eindeutig bestimmte W-Vtlg. W bestimmt

$$W(A_1 \times \cdots \times A_n) = W_1(A_1) \cdots W_n(A_n) \quad \forall A_i \in \mathcal{E}_i$$

W heißt Produkt der W-Vtlgen $W_1, \dots, W_n$

<u>Anwendung</u>: n-maliges ziehen eines Probestückes mit Zurücklegen

Einzelversuch $M_i = \{0,1\}$, $W_i(\{1\}) = p = \frac{A}{N}$

$W_i(\{0\}) = 1-p$

Gesamtversuch $M = M_1 \times \cdots \times M_n = \{0,1\}^n$

Produktwahrscheinlichkeitsverteilung

$$W(\{(x_1,\dots,x_n)\}) = W_1(\{x_1\})\cdots W_n(\{x_n\})$$

Da alle W_i gleich sind, gilt für n-Tupel, die genau k Einser enthalten:

$$W(\{(x_1,\dots,x_n)\}) = p^k(1-p)^{n-k}$$

6. STOCHASTISCHE GRÖSZEN (S. 36)

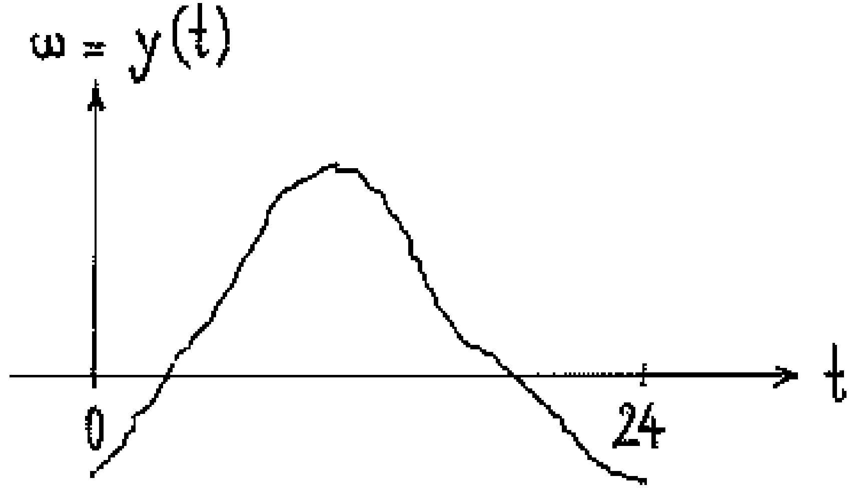
Größen die variieren bzw. nichtdeterministisch sind

Beispiele: Lebensdauern
Einkommen einer Firma nächstes Jahr
Wasserverbrauch einer Stadt im Jahr 2015
⋮

Bemerkung: Optimale Information
W-Vtlg.

Oft sind S.G. X Funktionen von Ausgängen von statistischen Experimenten

<u>Beispiel</u>: Temperaturverlauf in 24 Stunden
(Experiment, Versuchsausgang ω)



SG $X(\omega)$ = maximale Temperatur (1-dim.)

2-dim. SG (Stoch. Vektor) $\underline{X}(\omega) = \begin{pmatrix} \max\limits_{0 \le t \le 24} y(t) \\ \min\limits_{0 \le t \le 24} y(t) \end{pmatrix}$

B1: X … Anzahl schlechter Stücke in der Stichprobe vom Umfang n

$$\omega = (x_1, \dots, x_n) \in M_e^n \quad \text{mit} \quad M_e = \{0,1\}$$

$$X = X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Definition: Eine Abbildung $X : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ von einem W-Raum $(M, \mathcal{E}, W)$, für die das Urbild

$$X^{-1}(B) := \{\omega \in M : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{E}$$

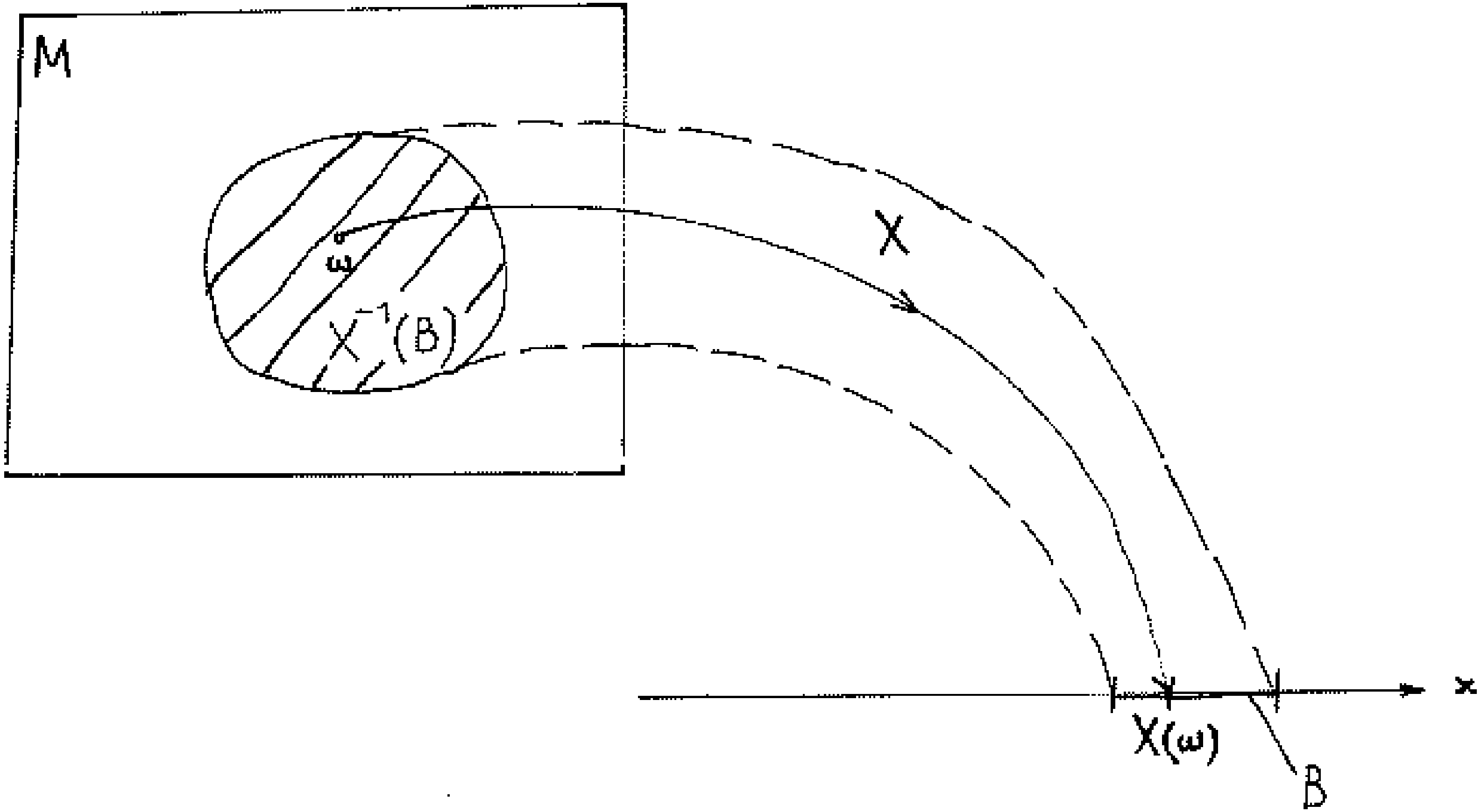
jedes Rechtecks $B = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_m, b_m]$ in $\mathcal{E}$ liegt, nennt man m-dimensionale SG.

Sonderfall $m = 1$:

$$X : M \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad X^{-1}((a,b]) \in \mathcal{E} \quad \forall (a,b] \subseteq \mathbb{R}$$

Bemerkung: X messbare Funktion notwendig zur Berechnung der W-Verteilung von X

$$W\{X \in B\} := W\left(X^{-1}(B)\right)$$


M
ω
$X^{-1}(B)$
X
x
X(ω)
B

III

EINDIMENSIONALE VERTEILUNGEN

7. VERTEILUNG STOCH. GRÖSZEN

Bestimmung der W-Verteilung einer 1-dim. SG X

<u>B1</u>: $X : M_e^n \longrightarrow \mathbb{N}_0$, $\qquad M_X = \{0,1,2,\dots,n\}$

$$X((x_1,\dots,x_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Für $k \in M_X$ gilt $W\{X=k\} = W\left(X^{-1}(\{k\})\right)$

$$= W\left(\left\{(x_1,\dots,x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i = k\right\}\right)$$

$$= \sum_{\substack{(x_1,\dots,x_n): \\ \sum x_i = k}} W(\{(x_1,\dots,x_n)\}) = \sum_{\substack{(x_1,\dots,x_n): \\ \sum x_i = k}} p^k(1-p)^{n-k}$$

$$= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \forall\, k = 0(1)n$$

B2: Lebensdauer eines Systems aus n Komponenten

$$T = \min\{T_1, \dots, T_n\}$$

7.1 Verteilungsfunktionen (1-dim.)

Definition: Die Verteilungsfunktion $F(\cdot)$ einer SG X ist durch ihre Funktionswerte

$$F(x) = W\{X \leq x\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Bemerkung: $\{X \leq x\} := X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{E}$

$\Rightarrow \quad W\{X \leq x\}$ ist definiert

7.2 Satz: Für die VF $F(\cdot)$ einer SG X gilt:

(1) $\quad 0 \leq F(x) \leq 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

(2) $\quad x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; F(x_1) \leq F(x_2)$

(3) $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

(4) $\quad \lim\limits_{h \downarrow 0} F(x+h) = F(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$ (rechtsstetig)

(5) $\quad W\{X = x\} = F(x) - \lim\limits_{h \downarrow 0} F(x-h)$ (linkss. GW)

(6) $\quad a < b \;\Rightarrow\; W\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a)$

Zum Beweis: (1) Wahrsch., (2) $(-\infty, x_1] \subseteq (-\infty, x_2]$,
(3)–(5) schwieriger, (6) $(-\infty, a] \subseteq (-\infty, b]$

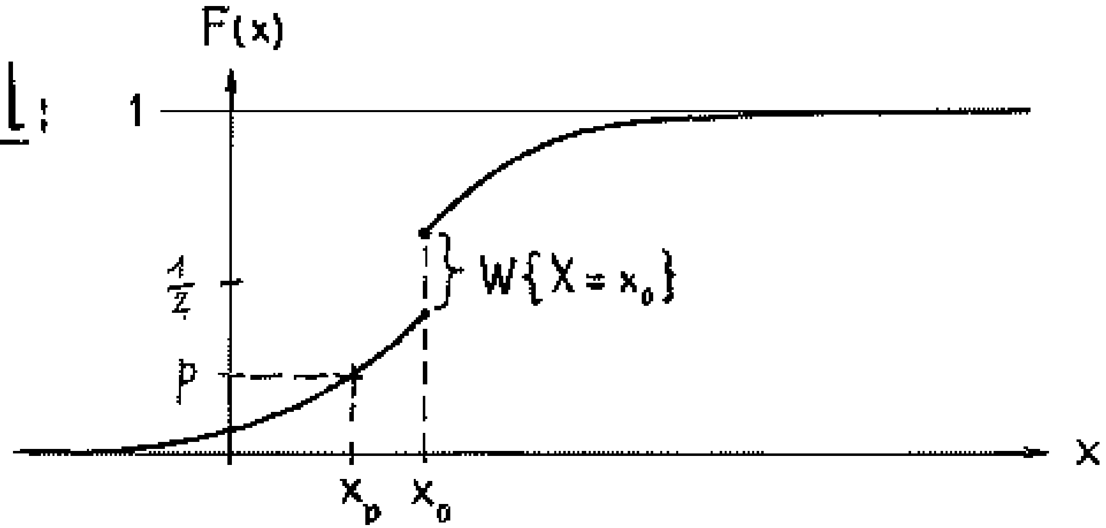
Definition: Ist $F(\cdot)$ eine 1-dim. VF, so heißt für $p \in [0,1]$ jede reelle Zahl x_p, für die gilt

$$F(x_p) = p, \quad \text{ein } p\text{-Fraktiles}.$$

Bemerkung: Für $X \sim F(\cdot)$ gilt $W\{X \leq x_p\} = p$

Definition: $x_{0,5}$ heißt Median

Beispiel:



7.2 Typen von Verteilungen

a) diskrete Verteilungen

VF treppenförmig

b) kontinuierliche Verteilungen

$\exists$ Dichtefunktion $f: \mathbb{R} \to [0, \infty)$ integrierbar

mit $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$

c) gemischte Verteilungen

weder diskret noch kontinuierlich,

eine Mischung von beidem $F(x) = \alpha F_1(x) + (1-\alpha) F_2(x$

8. DISKRETE VERTEILUNGEN

$\exists$ höchstens abzählbar viele $a_i \in \mathbb{R}$, die keinen Häufungspunkt haben, mit $W(\{a_i\}) = p_i > 0$, für die gilt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

Die Wahrscheinlichkeit einer beliebigen Borelmenge B erhält man folgendermaßen:

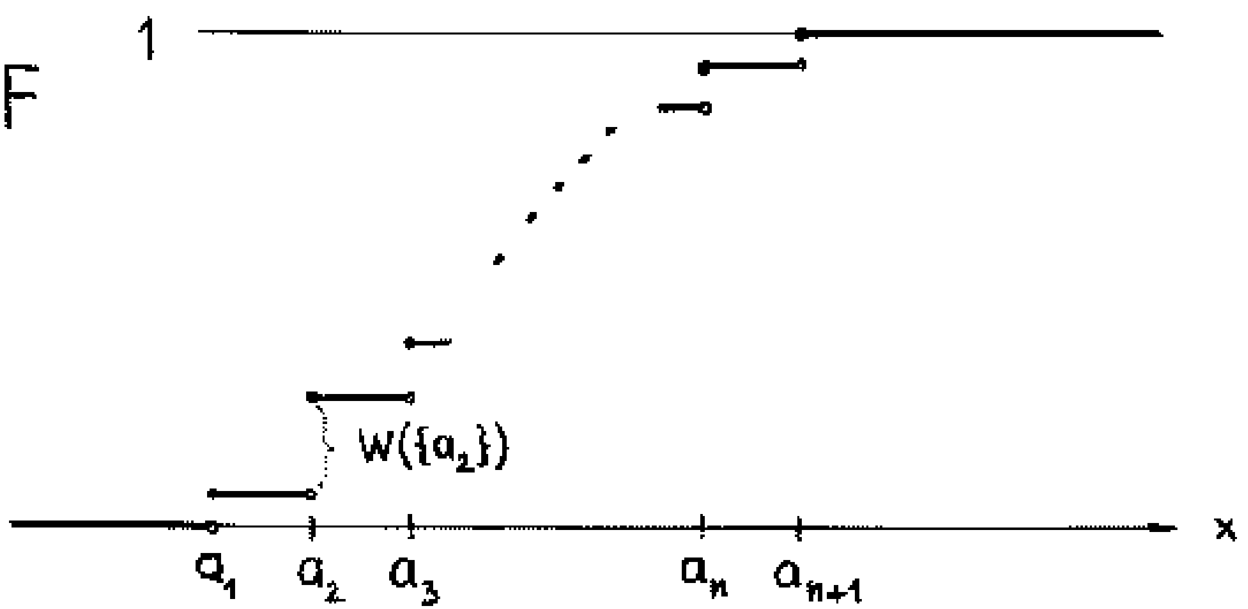
$$W(B) = \sum_{a_i \in B} W(\{a_i\})$$

<u>Bemerkungen</u>: 1) meist $a_i \in \mathbb{N}_0$

2) $X \sim (M_X, p_i)$

Stabdiagramm

VF



8.1 Dirac-Verteilung δ_μ, $\mu \in \mathbb{R}$

$W(\{\mu\}) = 1$

$W(\{x\}) = 0 \quad \forall x \neq \mu$

<u>Bemerkung</u>: Determinismus

8.2 Diskete Gleichverteilung D_m, $m \in \mathbb{N}$

$X \sim D_m \;:\Leftrightarrow\; M_X = \{1, 2, \ldots, m\}$

$$W(\{1\}) = W(\{2\}) = \ldots = W(\{m\}) = \frac{1}{m}$$

<u>Beispiele</u>: 1) Würfeln, Roulette
2) SQK

8.3 Alternativverteilung A_p, $p \in (0,1)$

$X \sim A_p \;:\Leftrightarrow\; M_X = \{0,1\}$

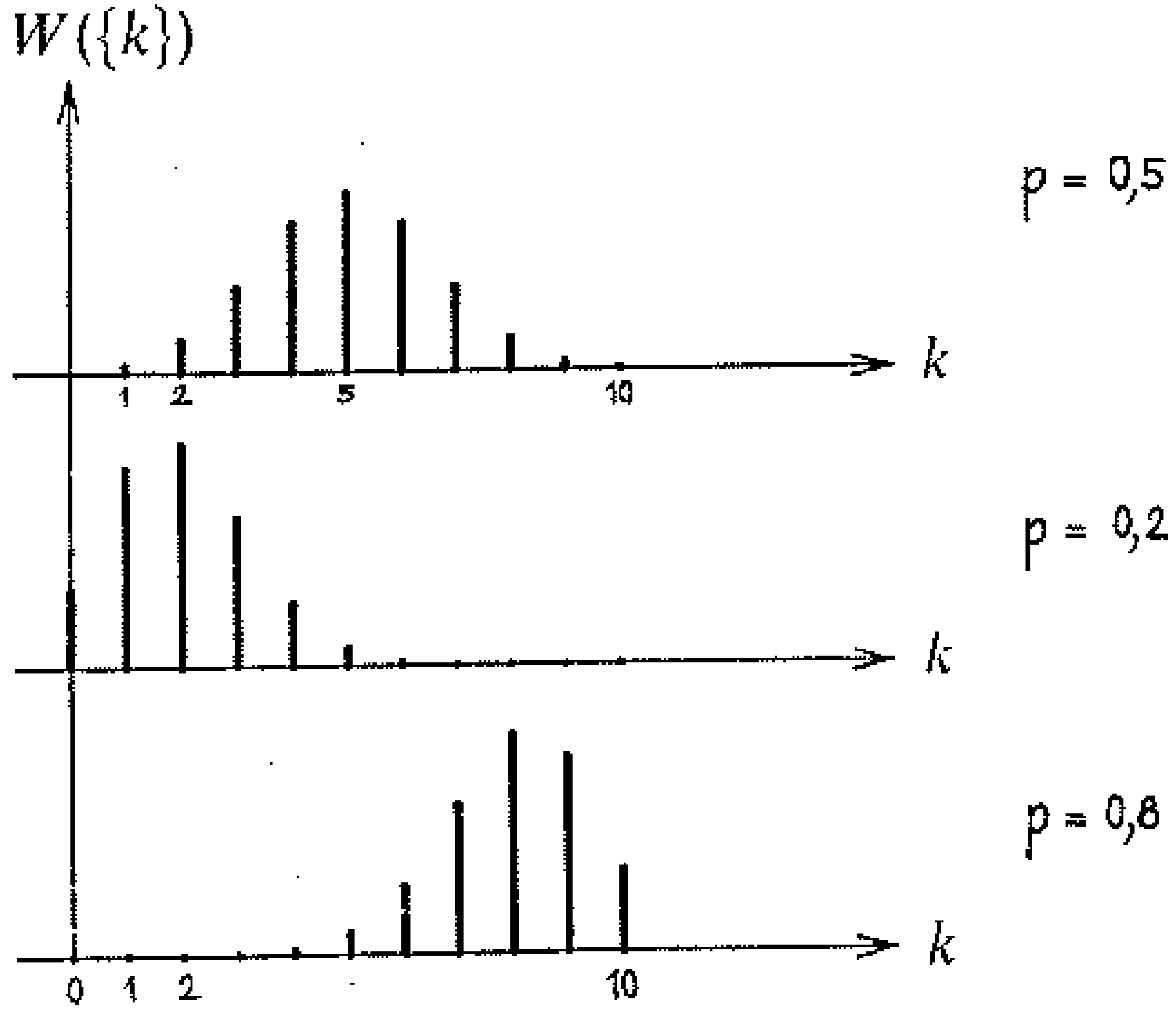
$$W(\{1\}) = p \quad \text{und} \quad W(\{0\}) = 1-p$$

8.4 Binomialverteilung $B_{n,p}$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$

führt man n-mal unabhängig einen Alternativversuch durch, so ist die Anzahl der Einser $\sim B_{n,p} \;\Rightarrow\; M_X = \{0,1,2,\dots,n\}$

$$W(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \forall\, k = 0(1)n$$

Stabdiagramme verschiedener Binomialverteilungen $B_{10,p}$



8.5 Hypergeometrische Verteilung $H_{N,A,n}$

Ziehungen ohne Zurücklegen von n Stück aus insgesamt N Stück, von denen A Ausschuss sind; $A \leq N$, $n \leq N$ (Stichprobenumfang n)

X = Anzahl der Ausschussstücke in der Stichprobe

$$M_X = \{a_1, a_1+1, a_1+2, \dots, a_2\}$$

mit $a_1 = \max\{0, n-(N-A)\}$, $a_2 = \min\{n, A\}$

$$W(\{a\}) = \frac{\binom{A}{a}\binom{N-A}{n-a}}{\binom{N}{n}} \quad \text{für } a = a_1(1)a_2$$

Begründung: klassische W-Definition für alle Auswahlen von n Elementen aus N vorhandenen

$\binom{N}{n}$ mögliche Auswahlen von n Elementen

$\binom{A}{a}$ mögliche Auswahlen von a Ausschussstücken aus den A Ausschussstücken

$\binom{N-A}{n-a}$ mögliche Auswahlen von n-a guten Stück aus den insgesamt N-A guten Stücken

Aus $\frac{g}{m}$ folgt die Formel //

<u>Bemerkung</u>: Approximation für $n < \frac{N}{10}$

$$H_{N,A,n} \approx B_{n,\frac{A}{N}}$$

8.6 Poisson-Verteilung P_μ, $\mu > 0$

$$X \sim P_\mu :\Leftrightarrow \begin{cases} M_X = \mathbb{N}_0 \\ W(\{k\}) = \dfrac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} \quad \text{für } k = 0(1)\infty \end{cases}$$

Bemerkungen: $0! = 1$

Exponentialreihe $\quad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

Anwendung für punktförmige Ereignisse:

Versicherungsfälle
Elementzerfallsvorgänge
Astronomie
u.a.

Poisson-Prozess, Voraussetzungen $\Rightarrow P_\mu$

Approximationen:

$$B_{n,p} \approx P_{n\cdot p} \quad \text{falls} \quad n > 50 \wedge p < \frac{1}{10}$$

$$H_{N,A,n} \approx P_{n\cdot\frac{A}{N}} \quad \text{falls} \quad n < \frac{N}{10} \wedge A < \frac{N}{10}$$

8.7 Geometrische Verteilung G_p, $p \in (0,1)$

Wird ein Alternativversuch A_p unabhängig durchgeführt, so ist die Anzahl X der Durchführungen, bis erstmals „1" auftritt, geometrisch verteilt, $X \sim G_p$, mit

$$X \sim G_p \;:\Leftrightarrow\; \begin{cases} M_X = \mathbb{N} \\ W\{X = n\} = p\cdot(1-p)^{n-1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

<u>Bemerkung</u>: Geometrische Reihe

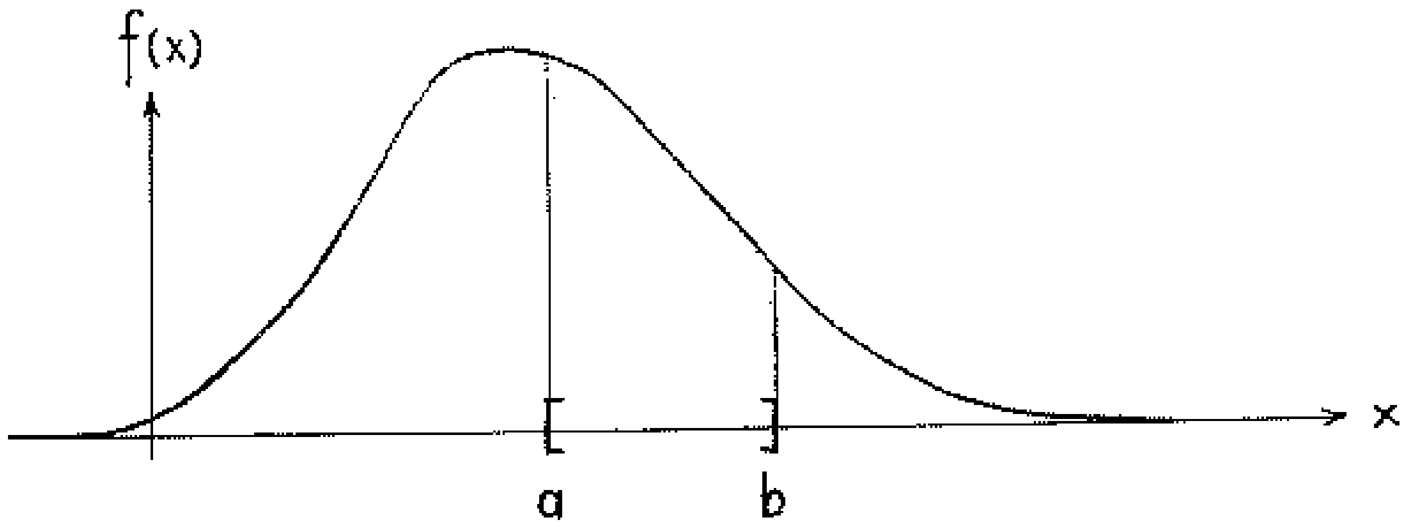
$$\sum_{n=1}^{\infty} p\cdot(1-p)^{n-1} = 1 \quad \text{falls} \quad 0 < p < 1$$

9. KONTINUIERLICHE EINDIMENSIONALE VERTEILUNGEN

Kontinuierliche SG X nehmen alle Werte eines Intervalls an (Kontinuum), ihre W-Vtlg. ist durch eine integrierbare Funktion $f(\cdot)$, genannt Dichtefunktion, bestimmt:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty) \quad \text{mit} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$W([a,b]) = W\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x)\,dx$$



9.1 Satz: Für kontinuierliche Verteilungen bzw. kontinuierlich vt. SG X mit Dichte $f(\cdot)$ gilt:

1) VF $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)\, d\xi \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $\exists \frac{d}{dx} F(x) \Rightarrow f(x) = F'(x)$

3) $W\{X = x\} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Beweis: 1) $F(x) = W((-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)\, d\xi$

2) Differenziazion des Integrals

3) $W\{X = x\} = \int_{x}^{x} f(\xi)\, d\xi = 0$

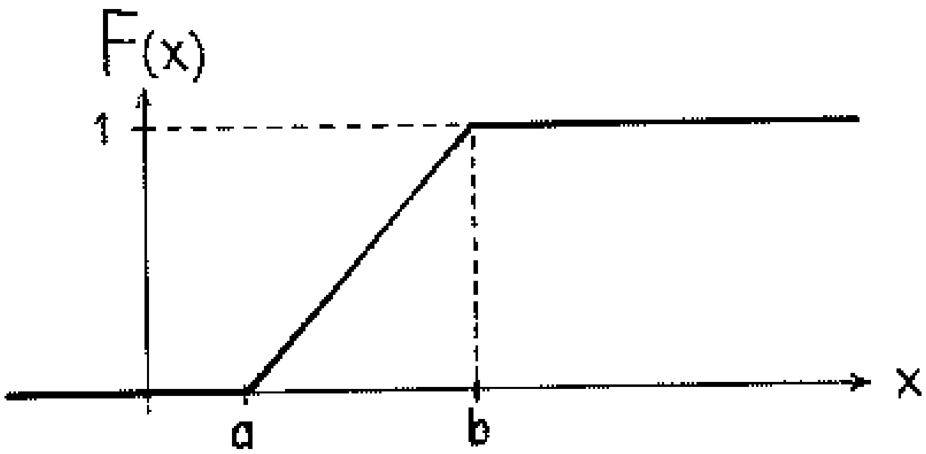
<u>Definition</u>: Ist M eine beliebige Menge, so ist die Indikatorfunktion $I_A(\cdot)$ einer Teilmenge A von M folgendermaßen gegeben:

$$I_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A \\ 0 & \text{für } x \notin A \end{cases} \quad \forall x \in M$$

9.2 Uniforme Verteilung $U_{a,b}$, $a < b \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{b-a} I_{(a,b)}(x)$$

Rechteckverteilung



9.3 Exponentialverteilung $\quad Ex_\tau, \quad \tau > 0$

$$f(x) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{x}{\tau}} I_{(0,\infty)}(x)$$

$$F(x) = \left(1 - e^{-\frac{x}{\tau}}\right) I_{[0,\infty)}(x)$$

Anwendung: Wartezeiten

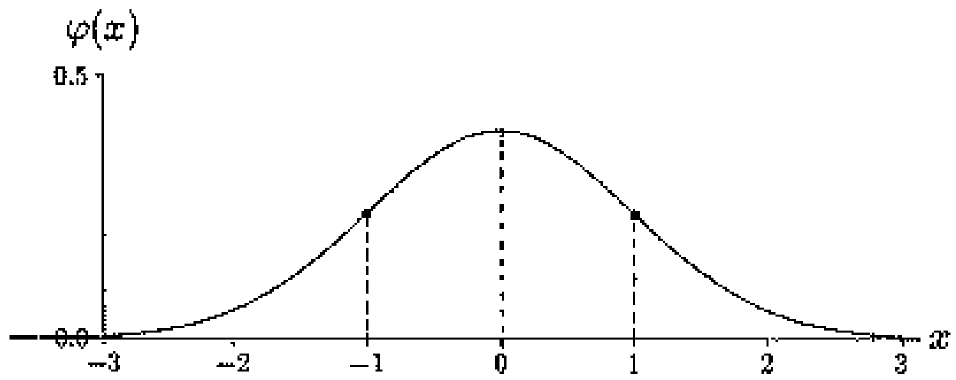
τ ... mittlere Wartezeit

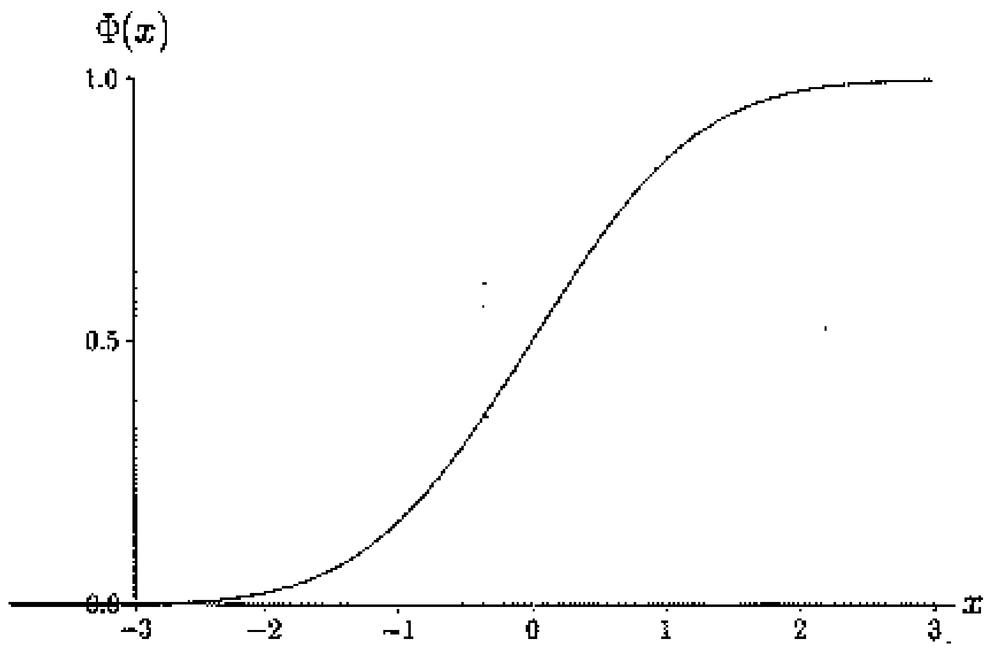
9.4 Standard-Normalverteilung $\quad N(0,1)$

Dichte $\quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

VF $\quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)\, dx \qquad$ tabelliert

N(0,1)-Verteilung





$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \qquad \forall x > 0$$

9.5 Allgemeine Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$

Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

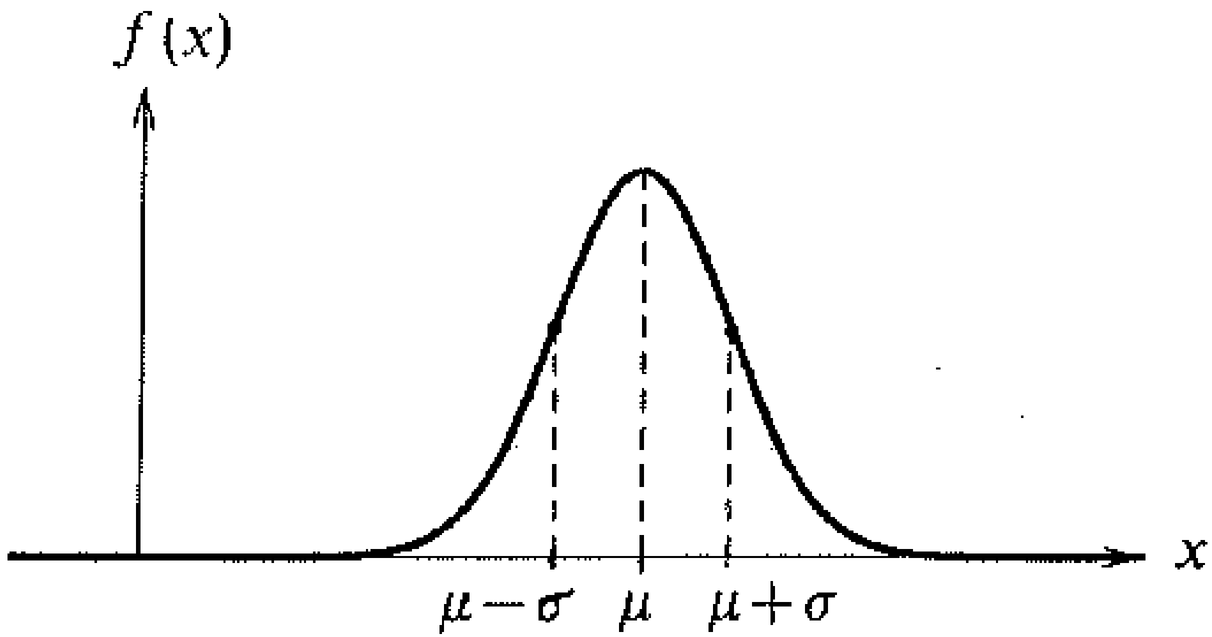
symmetrische, Gauß'sche Glockenkurve

Abbildung

Es gilt: Die Funktionswerte der VF $F(\cdot|\mu,\sigma^2)$ der $N(\mu,\sigma^2)$ erhält man durch:

$$F(x|\mu,\sigma^2) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Normalverteilung



Beweis: $F(x|\mu,\sigma^2) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

Substitution $\frac{t-\mu}{\sigma} = u$, $dt = \sigma\,du$,

t	u
$-\infty$	$-\infty$
x	$\frac{x-\mu}{\sigma}$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\cancel{\sigma}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot \cancel{\sigma}\,du$$

$$= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad //$$

Es gilt: Aus $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ und $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$

folgt $\alpha \cdot X + \beta \sim N(\alpha \cdot \mu + \beta, \alpha^2 \cdot \sigma^2)$

Beweis: Integraltransformation (VF)

9.6 Logarithmische Normalverteilung $LN(\mu,\sigma^2)$

Parameter $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$

<u>Definition</u>: $X > 0$ ist vt $LN(\mu,\sigma^2)$, wenn
$\ln X \sim N(\mu,\sigma^2)$

Es gilt: Die VF der $LN(\mu,\sigma^2)$ lautet

$$F_{\mu,\sigma^2}(x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right) \cdot I_{(0,\infty)}(x)$$

Beweis: $F_{\mu,\sigma^2}(x) = W\{X \leq x\} = W\{\ln X \leq \ln x\}$

$= F_N(\ln x \mid \mu,\sigma^2) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right) \quad \forall x > 0$ //

Es gilt: Die Dichtefunktion der $LN(\mu, \sigma^2)$ ist

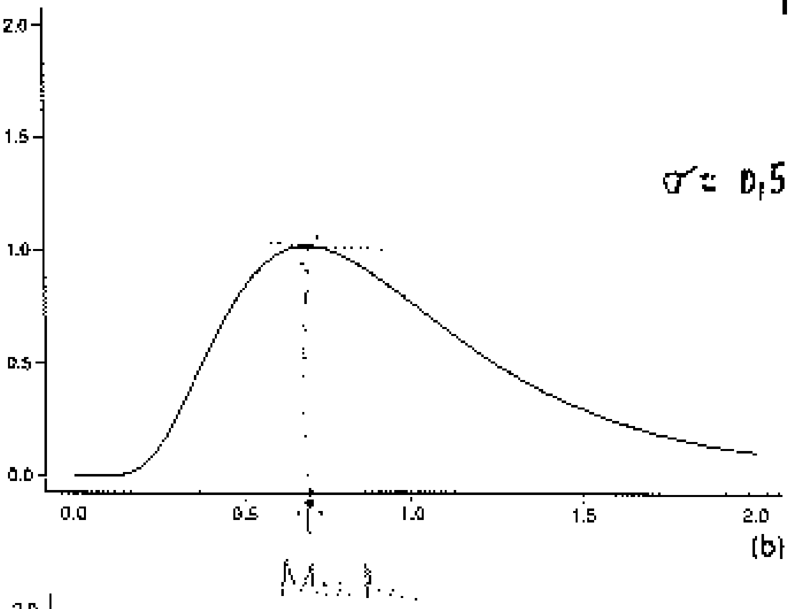
$$f(x \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2} I_{(0,\infty)}(x)$$

Beweis: Ableitung der Verteilungsfunktion

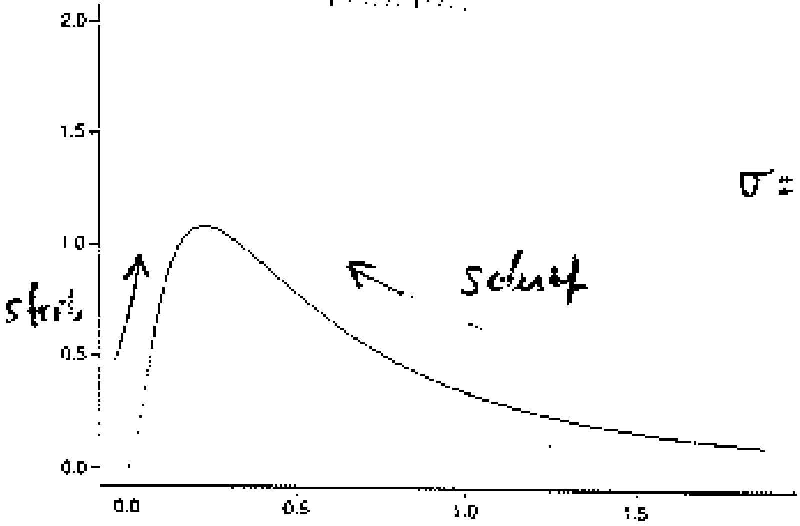
<u>Bemerkung</u>: Dichte ist rechtsschief und linkssteil (Abbildung)

<u>Definition</u>: Falls eine Dichtefunktion genau ein Maximum hat, nennt man den Abszissenwert des Maximums den <u>Modus</u> der Dichte

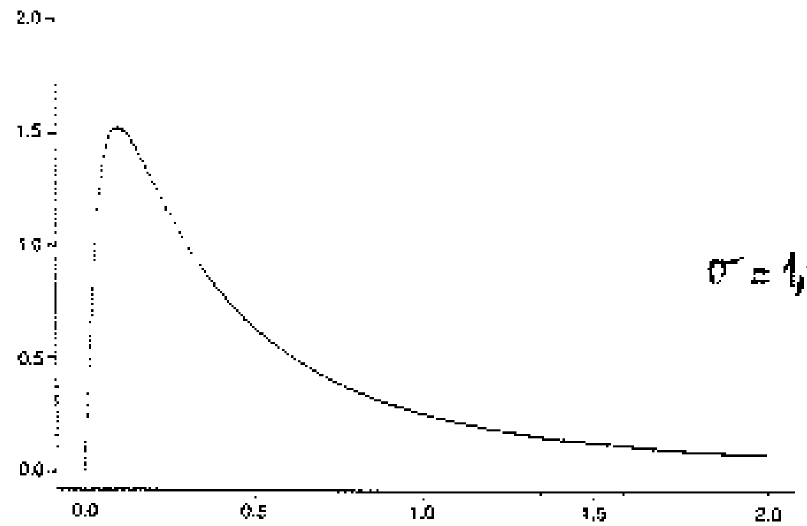
$X \sim LN(\mu, \sigma^2)$, $\qquad \mu + \frac{\sigma}{2} = 1$



$\sigma = 0{,}5$



$\sigma = 1$



$\sigma = 1{,}25$

7.12

10. GEMISCHTE VERTEILUNGEN

<u>Definition</u>: 1-dim. Verteilungen, die weder diskret noch kontinuierlich sind, heißen <u>gemischte Verteilungen</u>

10.1 Satz: Die VF $F(\cdot)$ einer gemischten Verteilung ist eine Konvexkombination einer diskreten VF $F_1(\cdot)$ und einer kontinuierlichen VF $F_2(\cdot)$,

$$F(x) = p \cdot F_1(x) + (1-p) \cdot F_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

mit $0 < p < 1$.

B2: Lebensdauer einer Glühlampe ... X
Zeit ist kontinuierlich, aber $W\{X=0\} > 0$,
daher ist X nicht kontinuierlich verteilt.

Ist aber $X > 0$, so ist die Lebensdauer
durch eine sog. modifizierte Dichtefunktion

$$f^*: [0, \infty) \to [0, \infty) \quad \text{mit}$$

$$\int_0^\infty f^*(x)\,dx = 1 - W\{X=0\} \quad \text{bestimmt.}$$

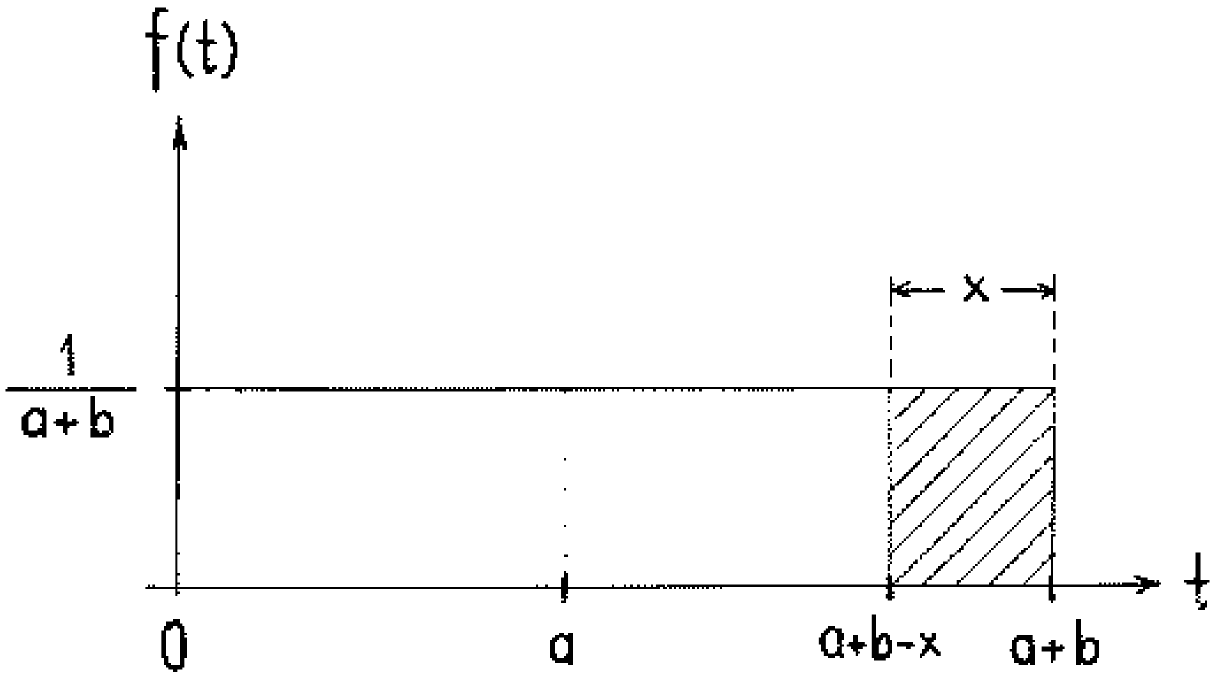
Verteilung von X: Für $[0,b] \subseteq [0,\infty)$ gilt

$$W\{0 \leq X \leq b\} = W\{X=0\} + \int_0^b f^*(x)\,dx$$

<u>B3</u>: Wartezeit an einer Verkehrsampel

Grünphase a [sec.], Rotphase b [sec.]

Ankunft zufällig ... $T \sim U_{0,\,a+b}$



Wartezeit X:

$$X = \begin{cases} 0 & \text{für } T \in [0, a] \\ a+b-T & \text{für } T \in [a, a+b] \end{cases}$$

W-Vtlg. von X:

$$W\{X = 0\} = W\{T \in [0, a)\} = \frac{a}{a+b} > 0$$

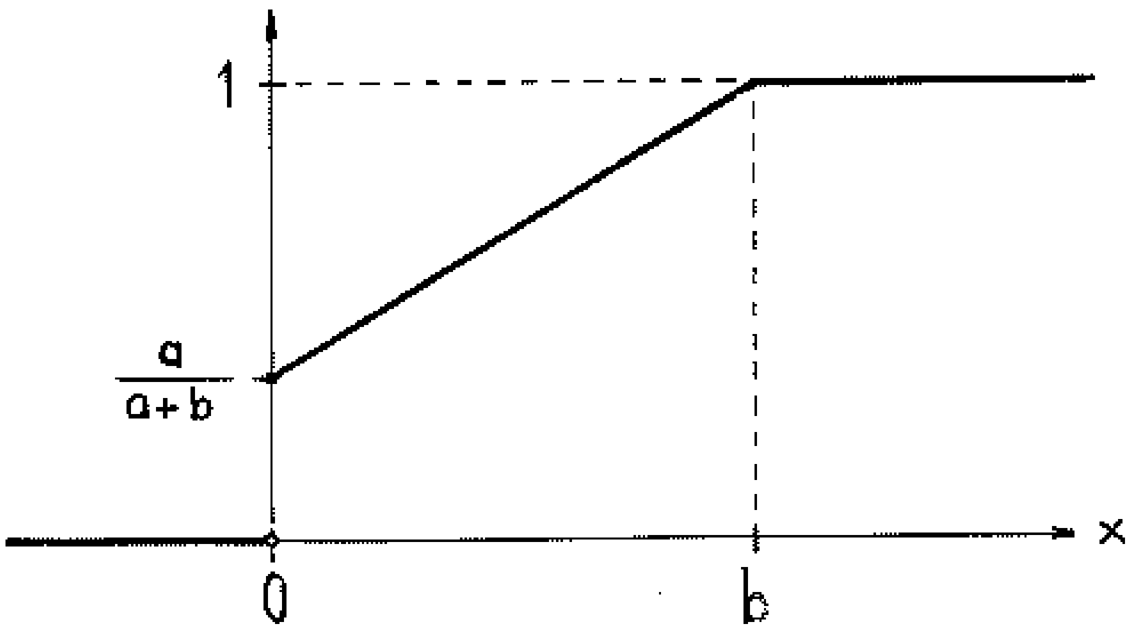
$$W\{0 < X \leq x\} = W\{T \in [a+b-x, a+b)\} = \frac{x}{a+b}$$

$$\text{für } 0 < x < b$$

$$W\{X > b\} = 0$$

Verteilungfunktion von X:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ \dfrac{a}{a+b} + \dfrac{x}{a+b} & \text{für} \quad 0 \leq x \leq b \\ 1 & \text{für} \quad x > b \end{cases}$$



<u>Übung</u>: Bestimmung der modifizierten Dichte $f^*(\cdot)$

10.2 Mischverteilungen

Diese entstehen als Kombination von VFn $F_i(\cdot)$, $i = 1(1)m$, Gewichte $\alpha_i > 0 \;\; \forall i = 1(1)m$ mit $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F_i(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

<u>Beispiel</u>: Zusammengesetzte Warenlieferung

<u>Bemerkung</u>: Mischverteilungen können auch kontinuierliche Verteilungen sein.