

Skriptum zur Vorlesung

**Höhere Mathematik
für
Informatiker**

ausgearbeitet von

Martin Kirner Bakk. techn.

korrigiert und erweitert von

Ao. Univ. Prof. Dipl. Ing. Dr. techn. Michael Drmota

20. März 2005

Inhaltsverzeichnis

1	Grundbegriffe der Analysis	2
1.1	Komplexe Zahlen	2
1.2	Folgen:	5
1.3	Reihen:	10
1.4	Stetige Funktionen:	16
1.5	Differenzierbare Funktionen:	24
1.6	Integralrechnung:	33
2	Komplexe Analysis und Funktionaltransformation	48
2.1	Potenzreihen:	48
2.2	Komplexe Analysis:	55
2.3	Laplace - Transformation:	68
2.4	Z - Transformation:	75
2.5	Fouriertransformation:	75
3	Höhere Kombinatorik	85
3.1	Erzeugende Funktionen:	85
3.2	Unmarkierte kombinatorische Strukturen - Kombinationen:	90
3.3	Markierte kombinatorische Konstruktionen - Variationen:	91
4	Graphentheorie	93
4.1	Grundlegende Begriffe:	93
4.2	Bäume und Wälder:	95
4.3	Eulersche und Hamiltonsche Linien:	98
4.4	Planare (ebene) Graphen:	99
4.5	Netzwerke	100
5	Zahlentheorie	102
5.1	Teilbarkeit:	102
5.2	Kongruenzen:	105

Kapitel 1

Grundbegriffe der Analysis

Notationen: Mengen, \in , \cap , \cup , \setminus , Δ , $\bigcup_{n=1}^N A_n$, $\bigcap_{n=1}^N A_n$
 \forall , \wedge , \implies , \iff , \exists , \exists
 $\mathbb{N}=\{0, 1, 2, \dots\}$, \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C}

1.1 Komplexe Zahlen

$$z = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1$$
$$a = \operatorname{Re}(z)$$
$$b = \operatorname{Im}(z)$$

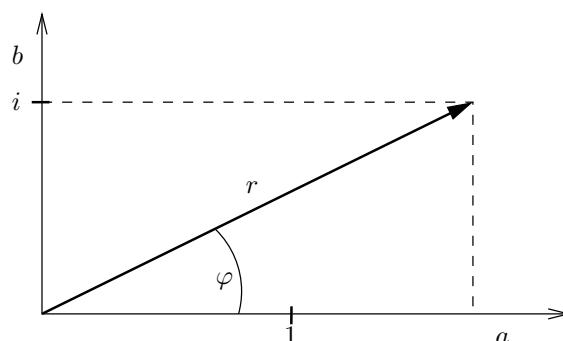


Abbildung 1.1: Komplexe Zahlen in Polarkoordinatendarstellung

$$z = a + ib = [r, \varphi] \quad \dots \text{Polarkoordinaten}$$
$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z| \quad \dots \text{Betrag}$$
$$\varphi = \arg(z) \quad \dots \text{Argument (mod } 2\pi)$$
$$\tan \varphi = \frac{b}{a}$$
$$\cos \varphi = \frac{a}{r}$$

Addition von komplexen Zahlen:

$$z_1 = a_1 + ib_1$$
$$z_2 = a_2 + ib_2$$

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

Multiplikation von komplexen Zahlen:

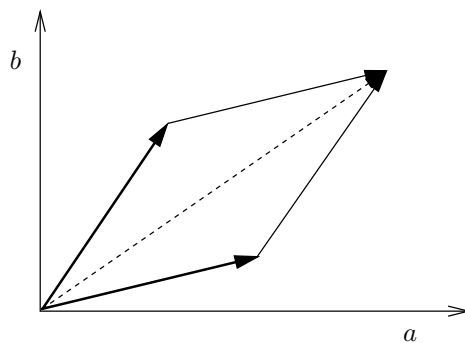


Abbildung 1.2: Graphische Darstellung einer Vektoraddition

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1) \end{aligned}$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\arg(z_1 + z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad \text{mod } 2\pi \text{ (Drehstreckung)}$$

Konjugiert komplexe Zahl:

$$z = a + ib$$

$$\bar{z} = a - ib$$

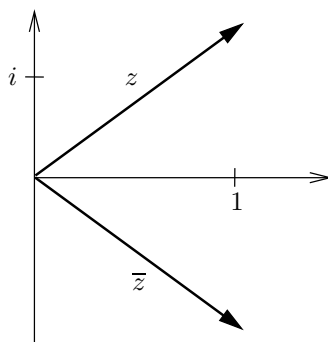


Abbildung 1.3: Graphische Darstellung eines konjugiert komplexen Zahlenpaars

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &= z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z_1 \cdot z_2} \\ &= z_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \\ &= z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \end{aligned}$$

$$\implies |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Division von komplexen Zahlen:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{1}{\underbrace{z_2 \cdot \overline{z_2}}_{\mathbb{R}}} \cdot (z_1 \cdot \overline{z_2})$$

$$(z_2 \neq 0)$$

Beispiel 1.1 $\frac{2+3i}{1-2i} = \frac{(2+3i)(1+2i)}{\underbrace{(1-2i)(1+2i)}_5} = \frac{1}{5}(-4+7i) = -\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = (\arg(z_1) - \arg(z_2)) \bmod 2\pi$$

Moivresche Formel:

$$\left[\begin{array}{l} z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ \varphi = \arg(z) \end{array} \right]$$

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n \cdot \varphi) + i \sin(n \cdot \varphi)$$

$$\operatorname{Re}(z) = |z| \cdot \cos \varphi$$

$$\operatorname{Im}(z) = |z| \cdot \sin \varphi$$

Einheitswurzeln:

$$z^n = 1 \quad \text{Wurzeln:} \quad \begin{array}{ll} n = 1: & \{1, -1\} \\ n = 3: & \left\{-1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \quad \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\right) \\ n = 4: & \{1, -1, i, -i\} \end{array}$$

$$z_j = \left[1, \frac{2\pi j}{n}i\right], \quad j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

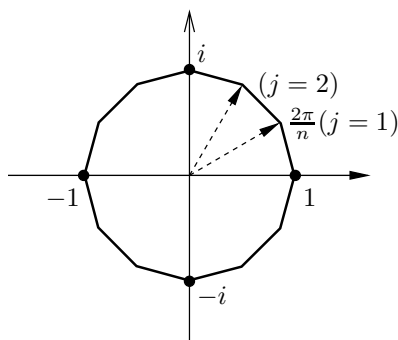


Abbildung 1.4: N-te Wurzel einer komplexen Zahl ergibt ein regelmäßiges N-Eck

$$n\text{-te Wurzel: } w \in \mathbb{C}, \quad z^n = w, \quad z = \sqrt[n]{w}$$

$$w = [R, \psi], \quad z = \left[\sqrt[n]{R}, \frac{\psi}{n} + \frac{2\pi j}{n} \right], \quad j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

Beispiel 1.2 $w = 1 + i, \quad n = 7, \quad |w| = \sqrt{2}, \quad \psi = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}
z = \sqrt[4]{1+i} &= \begin{cases} [\sqrt[4]{2}, \frac{\pi}{28}] & (j=0) \\ [\sqrt[4]{2}, \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi}{7}] & (j=1) \\ [\sqrt[4]{2}, \frac{\pi}{28} + \frac{4\pi}{7}] & (j=2) \end{cases}
\end{aligned}$$

Quadratische Gleichung:

$$\begin{aligned}
z^2 + 2z + 2 &= 0 \\
z_{1,2} &= -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm \sqrt{-1} \\
&= 1 \pm i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z^2 + 2z + 2 &= (z - z_1)(z - z_2) \\
&= (z + 1 - i)(z + 1 + i) \\
&= z^2 - (z_1 + z_2) \cdot 2 + z_1 \cdot z_2
\end{aligned}$$

$$z^2 + pz + q = 0 \quad p, q \in \mathbb{C}$$

$$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$z^2 + pz + q = (z - z_1)(z - z_2)$$

$$\left. \begin{aligned} p &= -(z_1 + z_2) \\ q &= z_1 \cdot z_2 \end{aligned} \right\} \text{Vietascher Wurzelatz}$$

Fundamentalsatz der Algebra:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 (= 0), \quad a_j \in \mathbb{C}, \quad a_n \neq 0$$

$$\implies \exists z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$$

$$a_n z^n + \dots + a_0 = a_n (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_n)$$

z_1, \dots, z_n sind Nullstellen des Polynoms

1.2 Folgen:

$$(a_n), \quad n \in \mathbb{N} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$$

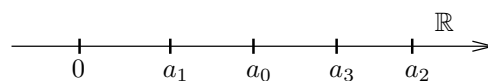


Abbildung 1.5: Werte von Folgen auf einer Zahlengerade

Beispiel 1.3 $a_n = n^2, a_n = \frac{1}{n+1}$

Häufungspunkt:

$$\begin{aligned}
a \in HP(a_n), \quad n \in \mathbb{N} &\iff \forall \epsilon > 0 \quad \forall N > 0 \\
&\quad \exists n > N : |a_n - n| > \epsilon
\end{aligned}$$

In jeder Umgebung von a liegen ∞ -viele Elemente.

Satz 1.1 (Bolzano-Weierstraß)

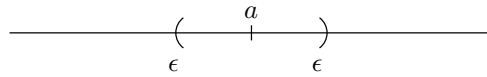


Abbildung 1.6: Differenz liegt immer innerhalb eines Häufungspunktes

(a_n) beschränkt $\Rightarrow \exists HP(a_n)$

$$[\exists C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq C]$$

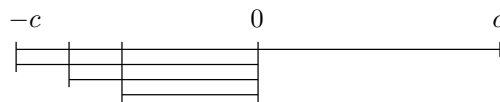


Abbildung 1.7: Werte einer beschränkten Folge

Grenzwert:

$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \iff$ (i) (a_n) beschränkt
(ii) a einziger Häufungspunkt

$$\iff \forall \epsilon > 0 \quad \exists N > 0$$

$$\forall n > N : |a_n - a| < \epsilon$$

lim superior: $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n =$ größter HP

Beispiel 1.4 $a_n = (-1)^n, \lim a_n = 1$

lim inferior: $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n =$ kleinster HP

Beispiel 1.5 $a_n = (-1)^n, \underline{\lim} a_n = -1$

$$\iff \underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n = a$$

$$a_n \leq b_n \rightarrow \underline{\lim} a_n \leq \underline{\lim} b_n$$

$$\overline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} b_n$$

$$[\lim a_n \leq \lim b_n]$$

Uneigentlicher HP: $+\infty, -\infty$

$+\infty$ ist HP von $a_n \iff \forall K > 0 \quad \forall N > 0 \quad \exists n > N : a_n > K$
 $-\infty$ ist HP von $a_n \iff \forall K < 0 \quad \forall N > 0 \quad \exists n > N : a_n < K$

$$\exists n > N : a_n > K \iff \overline{\lim} a_n = +\infty$$

Uneigentlicher Grenzwert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \iff \overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n = +\infty$$

$$\iff \forall K > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall n > N : a_n > K$$

Nullfolge: $\lim a_n = 0$ $[a_n \rightarrow 0]$

- $a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow 0 \Rightarrow a_n \pm b_n \rightarrow 0$
- $a_n \rightarrow 0, b_n$ beschränkt $\Rightarrow a_n \cdot b_n \rightarrow 0$
- $a_n \rightarrow a \iff a_n = \underbrace{a}_{\text{konstant}} + \underbrace{(a_n - a)}_{\text{Nullfolge}}$

Grenzwertsätze:

- $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b \implies a_n \pm b_n \rightarrow a \pm b$

$$[\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n]$$

$$\text{Beweis: } a_n \pm b_n = a + b + \underbrace{(a_n - a)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{(b_n - b)}_{\rightarrow 0}$$

- $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \implies \lambda a_n + \mu b_n \rightarrow \lambda a + \mu b$

$$[\lim(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \lim a_n + \mu \lim b_n]$$

- $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b, \implies a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$

$$[\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n]$$

$$\text{Beweis: } a_n \cdot b_n = a \cdot b + \underbrace{a(b_n - b)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{(a_n - a)b}_{\rightarrow 0} \quad (\text{beschränkt})$$

- $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b \neq 0, \implies \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$

$$\left[\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} \right]$$

Beweis: $\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} + \dots ?$

Beispiel 1.6

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2n^3 - 3n + 3}{5n^3 + 3n^2 - 1} = \frac{1}{n^3} \\ &= \frac{2 - 3 \frac{1}{n^2} + 3 \frac{1}{n^3}}{5 + 2 \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}} = \\ &= \left(\frac{1}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{n^2} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{n^3} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{-5}{n^3} \rightarrow 0 \right) \\ &= \rightarrow \frac{2}{5} \end{aligned}$$

- $a_n \rightarrow \infty \implies \frac{1}{a_n} \rightarrow 0$

- $a_n \rightarrow 0 \implies \frac{1}{a_n} \rightarrow \infty$

$$a_n > 0$$

- a_n monoton + beschränkt \Rightarrow konvergent

Grenzwert = kleinste (obere) Schranke

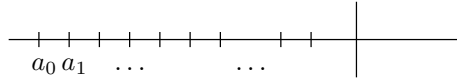


Abbildung 1.8: Bei einem Grenzwert existiert eine obere/untere Schranke

$$\bullet \quad b_n \leq a_n \leq c_n, \quad \lim b_n = \lim c_n = a \quad \Rightarrow \quad \lim a_n \rightarrow a$$

Cauchyfolge:

$$(a_n) : \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall m, n > N \quad |a_m - a_n| < \epsilon$$

Satz 1.2 $a_n \in \mathbb{R} :$ (a_n) konvergent $\Leftrightarrow (a_n)$ Cauchyfolge (C.F.)

$$\Rightarrow \quad \left. \begin{array}{l} |a_n - a| < \epsilon \\ |a_m - a| < \epsilon \end{array} \right\} \Rightarrow |a_n - a_m| < 2\epsilon$$

$$\Leftarrow \quad \text{zu zeigen: } \underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n$$

Folgen in \mathbb{R}^m :

$$\underline{a}_n = \begin{pmatrix} a_n^{(1)} \\ \vdots \\ a_n^{(m)} \end{pmatrix} \quad a_n^{(i)} \in \mathbb{R}$$

Satz 1.3 $a_n \rightarrow a$

$$\underline{a}_n = \begin{pmatrix} a_n^{(1)} \\ \vdots \\ a_n^{(m)} \end{pmatrix} \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(m)} \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} a_n^{(1)} \rightarrow a^{(1)} \\ a_n^{(m)} \rightarrow a^{(m)} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall n > N : \quad |a_n - a| < \epsilon$$

Satz 1.4

$$z_n \rightarrow z \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re}(z_n) \rightarrow \operatorname{Re}(z) \wedge \operatorname{Im}(z_n) \rightarrow \operatorname{Im}(z)$$

$$z_n, z \in \mathbb{C} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall n > N : \quad |z_n - z| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim |z_n - z| = 0$$

Abstandsbegriff (Metrik):

$X \dots$ Menge $\neq \emptyset$

$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$

$(x, y) \rightarrow d(x, y) \dots$ Abstand von x zu y

- (1) $d(x, y) = 0, \quad d(x, y) \iff x = y$
- (2) $d(x, y) = d(y, x)$
- (3) $d(x, z) \geq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung)

(X, d) ... metrischer Raum

$$a_n, a \in X, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \epsilon > 0 \exists N > 0 \forall n > N : d(a_n, a) < \epsilon$$

$$\iff \lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, a) = 0$$

Beispiel 1.7

$$X = \mathbb{R}, \quad d(x, y) = |x - y|$$

$$X = \mathbb{C}, \quad d(z, w) = |z - w|$$

$$X = \mathbb{R}^m, \quad d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|_2 = \sqrt{(x^{(1)} - y^{(1)})^2 + \dots + (x^{(m)} - y^{(m)})^2}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$p = 1, \quad d(x, y) = \|x - y\|_p := (|x^{(1)} - y^{(1)}|^p + \dots + |x^{(m)} - y^{(m)}|^p)^{\frac{1}{p}}$$

(LaPlace - Abstand)

$$d(x, y) = \|x - y\|_\infty := \max_{1 \leq j \leq m} |x^{(j)} - y^{(j)}|$$

(Maximum - Norm)

Beispiel 1.8

$$X = C[0, 1] = \text{Menge aller Funktionen}$$

$$= \{ f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig} \}$$

$$d(f, g) = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|$$

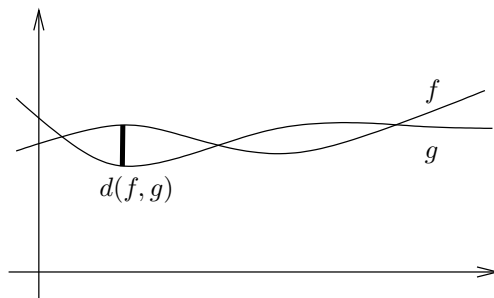


Abbildung 1.9: Distanz zwischen zwei Graphen

$$\text{Kugelumgebung: } K(x, y) = \{ x \in X \mid d(x, y) < r \}$$

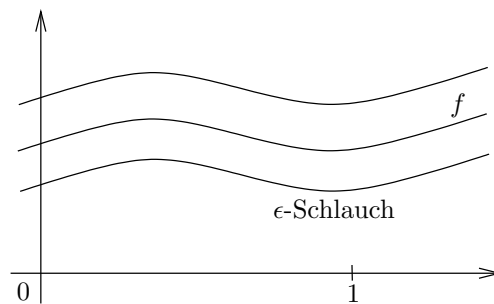


Abbildung 1.10: Epsilonschlauch beim Approximationsproblem

1.3 Reihen:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$... unendliche Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$

Beispiel 1.9 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^N} = 2 - \frac{1}{2^N} \quad \boxed{UE}$$

Partialfolge:

$$S_n = \sum_{n=0}^N a_n = a_0 + a_1 + \dots + a_N$$

Definition 1.1 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent $\iff S_N$ konvergent

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n &= S \iff S_N \longrightarrow S \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{n=0}^{\infty} a_n) \end{aligned}$$

Satz 1.5 $\sum_{n \geq 0} a_n$ bzw. $\implies a_n \rightarrow 0$

$$\text{Beweis: } a_n = \underbrace{S_n}_S - \underbrace{S_{n-1}}_S \rightarrow S - S = 0$$

• $a_n \rightarrow a \neq 0 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nicht konvergent

Beispiel 1.10 $1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots$

Harmonische Reihe:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ nicht konvergent

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} S_{2^k} &= 1 \left| + \frac{1}{2} \right| + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \left| \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right| + \dots + \left| + \frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k} \right| \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \left| + \frac{1}{2} \right| + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \left| + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right| + \dots + \left| + \frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{2^k} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \left| + \frac{1}{2} \right| + \frac{1}{2} \left| + \frac{1}{2} \right| + \dots + \left| + \frac{1}{2} \right| = \frac{K+1}{2} \end{aligned}$$

$\implies S_N$ unbeschränkt $\implies \sum \frac{1}{n}$ nicht konvergent

Geometrische Reihe:

$$\sum_{n \geq 0} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1, \quad q \in \mathbb{C}$$

$$\begin{array}{l} - \left\{ \begin{array}{l} S_n = 1 + q + \dots + q^n \\ q \cdot S_n = q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1} \end{array} \right. \\ \hline (q-1)S_n = q^{n+1} - 1 \end{array} \quad \implies S_n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$\implies S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad (q \neq 1)$$

$$S_n = n + 1 \quad (q = 1)$$

- $|q| \geq 1 \implies |q|^n \rightarrow \infty \implies \sum q^n$ nicht konvergent
- $|q| < 1 \implies q^n \rightarrow 0$ UE

Cauchy's Konvergenzkriterium:

$$\sum_{n \geq 0} a_n \text{ konvergent} \iff \forall \epsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall n, m < N : \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \epsilon$$

$$(S_n) \text{ konvergent} \iff \forall \epsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall n, m < N : |S_n - S_m| < \epsilon$$

$$S_n - S_m = \sum_{k=m+1}^n a_k$$

$$a_0 + a_1 + \dots + a_m + a_{m+1} + \dots + a_n +$$

Definition 1.2 $\sum_{n \geq 0} a_n$ absolut konvergent $\iff \sum_{n \geq 0} |a_n|$ konvergent

Satz 1.6

$$\sum_{n \geq 0} |a_n| \text{ absolut konvergent} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sum_{n \geq 0} |a_n| \text{ konvergent} \\ \sum_{n \geq 0} |a_n| < \infty \end{array} \right]$$

$$\implies \sum_{n \geq 0} a_n \text{ konvergent}$$

$$\left(\begin{array}{l} e = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \\ \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \end{array} \right)$$

Beweis: $\left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_k| < \epsilon$ (Dreiecksungleichung)

Majorantenkriterium:

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{n \geq 0} a_n, \\ |a_n| \leq b_n, \\ \sum_{n \geq 0} b_n < \infty \quad (\text{konvergent}) \end{array} \right\} \Rightarrow \sum a_n \text{ absolut konvergent}$$

$$\text{Beweis: } \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_k| \leq \sum_{k=m+1}^n b_k < \epsilon$$

Minorantenkriterium:

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{n \geq 0} a_n, \\ |a_n| \geq b_n \geq 0, \\ \sum_{n \geq 0} b_n = \infty \quad (\text{divergent}) \end{array} \right\} \Rightarrow \sum a_n \text{ nicht absolut konvergent}$$

Beispiel 1.11

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$$

$$\frac{n}{n^2+1} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \quad n \geq 1$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \text{ divergent} \Rightarrow \sum \frac{n}{n^2+1} \text{ divergent}$$

Wurzelkriterium:

$$\sum_{n \geq 0} a_n$$

$$1. \exists q < 1 \quad \sqrt[n]{|a_n|} \leq q \quad (n \geq n_0) \quad \left[\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \right]$$

$$\Rightarrow \sum a_n \text{ absolut konvergent}$$

$$2. \exists q \geq 1 \quad \sqrt[n]{|a_n|} \geq q \quad \text{für unendliche } n \quad \Leftarrow \left[\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \right]$$

$$\Rightarrow \sum a_n \text{ nicht konvergent}$$

Beweis:

$$1. \sqrt[n]{|a_n|} \leq q \Rightarrow |a_n| \leq q^n, \quad 0 < q < 1$$

$$\sum q^n \text{ konvergent}$$

$$\Rightarrow \sum a_n \text{ absolut konvergent}$$

$$2. \sqrt[n]{|a_n|} \geq q \geq 1 \Rightarrow |a_n| \geq 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$$

$$\Rightarrow \sum a_n \text{ nicht konvergent}$$

Beispiel 1.12

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n}{3^n}, \quad \sqrt[n]{\frac{n}{3^n}} : \frac{\sqrt[n]{n}}{3} \rightarrow \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \sum \frac{n}{3^n} \text{ absolut konvergent}$$

Quotientenkriterium:

$$1. \exists q < 1 : \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q \quad (n \geq n_0) \iff \left[\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \right]$$

$\sum_{n \rightarrow \infty} a_n$ absolut konvergent

$$2. \exists q \geq 1 : \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq q \geq 1 \quad (n \geq n_0) \iff \left[\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \right]$$

$\sum_{n \rightarrow \infty} a_n$ divergent

Beweis:

$$\begin{aligned} (1) \quad |a_n| &= \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{a_1}{a_0} \cdot a_0 \right| \\ &\leq q \cdot q \cdot q \cdot \dots \cdot q \cdot a_0 \\ &= q^n \cdot a_0, \quad 0 \leq q \leq 1 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \boxed{\text{UE}}$$

Beispiel 1.13

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n}, \quad \left| \frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} \right| = \left| \frac{n+1}{3n} \right| \rightarrow \frac{1}{3} < 1$$

$\implies \sum \frac{n}{3^n}$ absolut konvergent

Exponentialreihen:

$$z \in \mathbb{C}, \quad e^z := \sum \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots$$

$$a_n = \frac{z^n}{n!}, \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \frac{|z|}{n+1} \rightarrow 0 < 1$$

$\implies \sum \frac{z^n}{n!}$ absolut konvergent

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Potenzreihen:

$$z \in \mathbb{C}, \quad a_n \in \mathbb{C}, \quad f(z) := \sum a_n \cdot z^n$$

$$R := \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, \infty] \quad \text{Konvergenzradius}$$

- $|z| < R \implies \sum a_n \cdot z^n$ absolut konvergent
- $|z| > R \implies \sum a_n \cdot z^n$ divergent

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n \cdot z^n|} = |z| \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z|}{R}$$

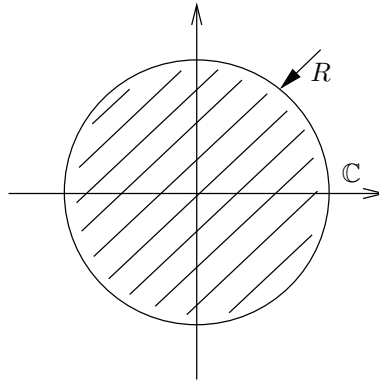


Abbildung 1.11: Konvergenzradius einer Reihe

Leibnit'sches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen:

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot a_n, \quad a_n \geq 0,$$

a_n monotone Nullfolge $(a_0 \geq a_1 \geq a_2 \dots \rightarrow 0)$

$\implies \sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot a_n$ konvergent

$$= a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$$

Beispiel 1.14

$$\sum \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots = \ln 2$$

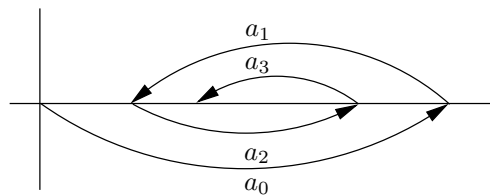


Abbildung 1.12: Graph. Begründung der Konvergenz einer alternierenden Reihe

Beispiel 1.15

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{konvergent für } \alpha > 1 \\ \text{divergent für } \alpha \leq 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} S_{2^k-1} &= 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \frac{1}{4^{\alpha}} + \dots + \frac{1}{(2^k-1)^{\alpha}} \leq \\ &\leq 1 + \frac{2}{2^{\alpha}} + \frac{4}{4^{\alpha}} + \dots + \frac{2^{k-1}}{(2^{k-1})^{\alpha}} = \\ &= 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{(2^{\alpha-1})^2} + \dots + \frac{1}{(2^{\alpha-1})^{k-1}} \leq \\ &= \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} \end{aligned}$$

$$\alpha > 1 \implies \frac{1}{2^{\alpha-1}}$$

$\sum \frac{1}{n^2} < \infty \implies$ Quotientenkriterium versagt!

Satz 1.7 $\sum a_n$ absolut konvergent

\implies jede ungeordnete Reihe konvergiert auch, und zwar zum selben Grenzwert

Beispiel 1.16

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{111} - \frac{1}{3} + \dots$$

ist nicht unbedingt konvergent - "jedes" Verhalten kann auftreten ...

Cauchyprodukt:

$$\begin{aligned} & (a_0 + a_1 + \dots)(b_0 + b_1 + \dots) = \\ & = a_0b_0 + a_0b_1 + \dots + \\ & \quad + a_1b_0 + a_1b_1 + \dots = \\ & = a_0 \cdot (b_0 + b_1 + \dots) + \\ & \quad a_1 \cdot (b_0 + b_1 + \dots) + \dots = \\ & = \underbrace{a_0b_0}_{c_0} + \underbrace{a_0b_1 + a_1b_0}_{c_1} + \\ & \quad + \underbrace{(a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)}_{c_2} + \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right)}_{c_n} \end{aligned}$$

Satz 1.8 $\sum a_n, \sum b_n$ absolut konvergent \implies

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right)$ absolut konvergent

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$

Beispiel 1.17

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{absolut konvergent} \quad (z \in \mathbb{C})$$

$$\begin{aligned}
e^z \cdot e^w &= \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \cdot \sum_{m \geq 0} \frac{w^m}{m!} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n n! \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k \cdot w^{n-k}}_{(z+w)^n} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = e^{z+w}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} = \\
&= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \\
&= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(z+w) &= \cos z \cdot \cos w - \sin z \cdot \sin w = \\
&= \frac{e^{iz+iw} \cdot e^{-iz-iw}}{2} = \\
&= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \cdot \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} \quad \boxed{UE}
\end{aligned}$$

$$\sin(z+w) = \sin z \cdot \cos w + \cos z \cdot \sin w \quad \boxed{UE}$$

$$(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1 \quad \boxed{UE}$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

$$\cosh(iz) = \cos(z)$$

$$\cosh(z+w) = \cosh(z) \cdot \cosh(w) + \sinh(z) \cdot \sinh(w)$$

$$\sinh(z+w) = \sinh(z) \cdot \cosh(w) + \cosh(z) \cdot \sinh(w)$$

$$(\cosh z)^2 - (\sinh z)^2 = 1$$

1.4 Stetige Funktionen:

$\{ x, f(x) \mid x \in D \}$ Graph einer Funktion

$x_0 \in D \dots$ Definitionsbereich

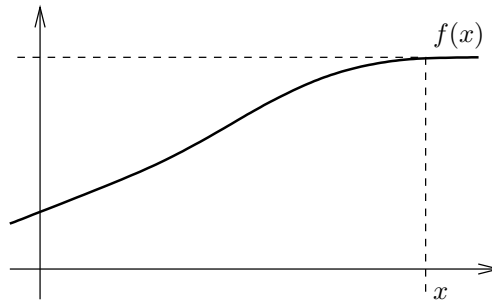


Abbildung 1.13: Graphische Darstellung eines Graphen $f(x)$

f stetig im Punkt x_0 : \Leftrightarrow

$$1. (x_n), \quad n \geq 1 \quad \text{Folge mit } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

(Folgenstetigkeit)

Kurzschreibweise: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

$$2. \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

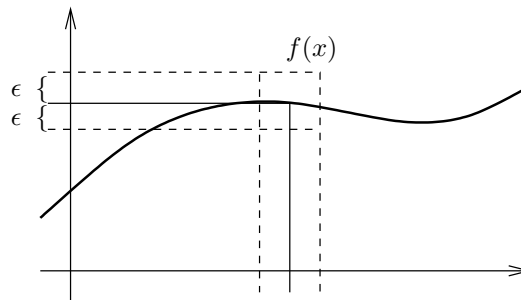


Abbildung 1.14: Graphische Darstellung der Umgebungsstetigkeit eines Graphen $f(x)$

Umgebungsstetigkeit $\delta = \delta(\epsilon, x_0)$

(1) \Leftrightarrow (2)

UE

Definition 1.3 $f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}$

f stetig auf D : $\Leftrightarrow f$ ist für alle $x_0 \in D$ stetig

Definition 1.4 $f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in D : \quad |x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Beispiel 1.18

$$f(x) = x$$

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_dx^d \quad (\text{Polynom})$$

$$x_n \rightarrow x_0 \implies x_n^j \rightarrow x_0^j$$

$$\implies \sum_{j=0}^d a_j x_n^j \rightarrow \sum_{j=0}^d a_j x_0^j$$

$$f(x) \rightarrow f(x_0)$$

$$f(x) = \frac{p(x)}{g(x)}, \quad p(x), g(x) \dots \text{Polynome}, \quad g(x_0) \neq 0$$

$\implies f$ stetig in x_0

Satz 1.9 f, g stetig

$$\implies (1) \quad f \pm g \text{ stetig}$$

$$(2) \quad f \cdot g \text{ stetig}$$

$$(3) \quad \frac{f}{g} \text{ stetig} \quad (\text{falls } g \neq 0)$$

Satz 1.10 f, g stetig $\implies f(g(x))$ stetig

$$\text{Beweis: } x_n \rightarrow x_0 \implies g(x_n) \rightarrow g(x_0) \implies f(g(x_n)) \rightarrow f(g(x_0))$$

Definition 1.5 $(X, d), (Y, \bar{d}) \dots$ metrische Räume

$$f : X \rightarrow Y, \quad x_0 \in X$$

f stetig in x_0 : \iff

$$1. \quad x_n \rightarrow x_0 \implies f(x_n) \rightarrow f(x_0):$$

$$\boxed{: \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)}$$

$$2. \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad d(x, x_0) < \delta \implies \bar{d}(f(x), f(x_0)) < \epsilon$$

Beispiel 1.19 \mathbb{C}, \mathbb{R}^m **Beispiel 1.20** Projektionen: $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_{(1)} \\ \vdots \\ x_{(n)} \end{pmatrix} \rightarrow x^{(1)} \quad \text{stetig} \quad \boxed{UE}$$

Beispiel 1.21 $f(x, y, z) = 3 + 4xz^2 - 5y^3 \dots$ stetig

(Zusammensetzung stetiger Funktionen)

Beispiel 1.22 $f(z) = e^z \quad \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

1. $\lim_{z \rightarrow 0} e^z = e^0 = 1$

$$|e^z - 1| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z|^n = \frac{|z|}{1-|z|} \quad \left(\frac{1}{n!} \leq 1 \right)$$

(ohne Beschränkung der Allgemeinheit: $|z| < 1$)

$$\implies \lim_{|z| \rightarrow 0} |e^z - 1| = 0 \quad \iff \quad \lim_{|z| \rightarrow 0} e^z = 1$$

2. $\lim_{z \rightarrow z_0} e^z = \lim_{|z-z_0| \rightarrow 0} e^z = e^{z_0} \cdot \lim_{|z-z_0| \rightarrow 0} e^{z-z_0} = e^{z_0} \cdot 1$

$$e^z = e^{z_0} \cdot e^{z-z_0}$$

Beispiel 1.23 $\sin z, \cos z, \sinh z, \cosh z \dots$ stetig

Satz 1.11 $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n, \quad |z| < R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

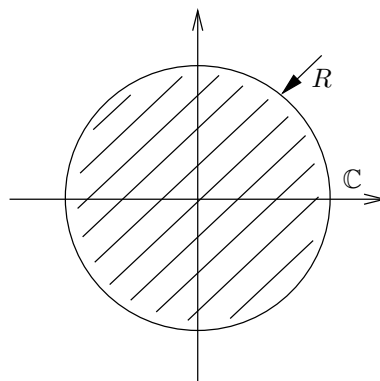


Abbildung 1.15: Konvergenzradius einer Reihe

ist stetig für $|z| < R \quad R \in [0, \infty]$

Satz 1.12 (Nullstellensatz)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

$f(a) < 0, \quad f(b) > 0$

$\implies \xi \in (a, b) : f(\xi) = 0$

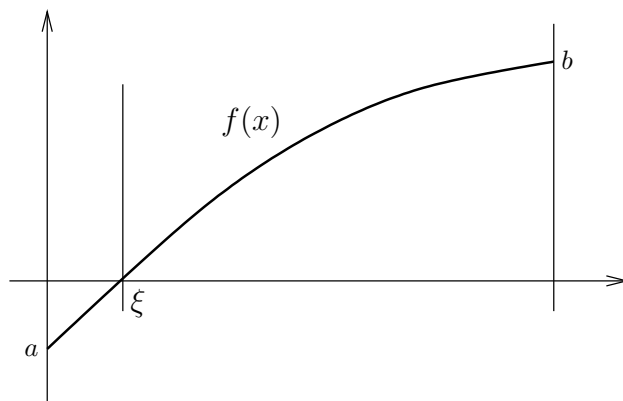


Abbildung 1.16: Graphische Darstellung des Nullstellensatzes

Beweis:

$$I_{n+1} \subseteq I_n, \quad l(I_{n+1}) = \frac{1}{2}l(I_n), \quad \xi := \bigcap_{n \geq 1} I_n$$

$$a_n \rightarrow \xi, \quad f(a_n) < 0$$

$$b_n \rightarrow \xi, \quad f(b_n) > 0$$

$$f \text{ stetig} \implies f(a_n) \rightarrow f(\xi) \leq 0$$

$$b(a_n) \rightarrow f(\xi) \geq 0$$

$$\implies f(\xi) = 0$$

Satz 1.13

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

$$f(a) \leq f(b)$$

$$\implies \forall \eta \in [f(a), f(b)] \exists \xi \in [a, b] : f(\xi) = \eta$$

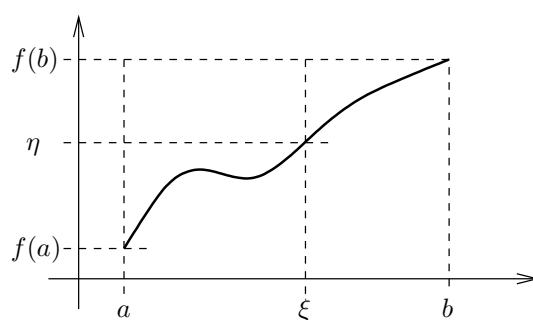


Abbildung 1.17: Graphische Veranschaulichung des Satzes 1.13

Beweis:

$$g(x) = f(x) - \eta$$

$$g(x) = 0 \iff f(x) = \eta$$

$$g(a) \leq 0$$

$$g(b) \geq 0$$

Satz 1.14

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

1. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig
2. $\exists \xi_1 \in [a, b] : f(\xi_1) = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$
 $\exists \xi_2 \in [a, b] : f(\xi_2) = \min_{a \leq x \leq b} f(x)$

Beispiel 1.24 $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, 1)$ stetig, nicht beschränkt

Umkehrfunktion:

$$f^{-1}(x) : f(f^{-1}(x)) = x, \quad f^{-1}(f(x))$$

Satz 1.15 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

1. $\exists f^{-1}(x) \iff f$ streng monoton
2. $f^{-1}(x)$ stetig **UE**

Beispiel 1.25

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{stetig} \quad (x \geq 0)$$

$$f(x) = \ln x \quad \text{stetig}$$

$$x < y \implies e^x < e^y = e^x \cdot \underbrace{e^{y-x}}_{>1} > e^x$$

$$t > 0 \implies e^t > 1 + t > 1$$

Beispiel 1.26 $f(x) = e^x \quad (x \in \mathbb{R})$

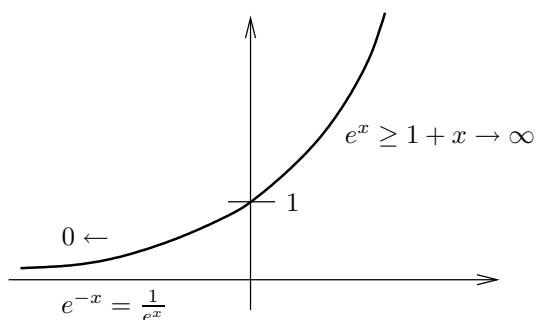


Abbildung 1.18: Graphische Darstellung der Exponentialfunktion

streng monoton, Intervall im Bild 1.18 = $(0, \infty)$

Umkehrfunktion:

$$f^{-1}(x) = \ln x \quad (x > 0)$$

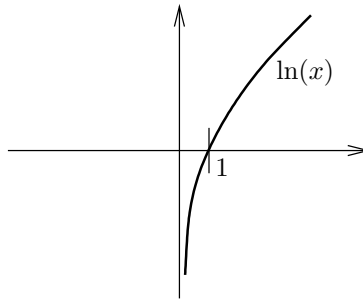


Abbildung 1.19: Logarithmus: Umkehrung der Exponentialfunktion

streng monoton, Intervall im Bild 1.19 = \mathbb{R}

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b) \quad [\Leftrightarrow \underbrace{e^x}_{=a} \cdot \underbrace{e^y}_{=b} = e^{x+y}]$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a), \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \quad \boxed{\text{UE}}$$

Allgemeine Exponentialfunktion:

$$a > 0, \quad a^x = e^{x \cdot \ln a}, \quad a^3 = a \cdot a \cdot a \quad e^{3 \ln a} = e^{\ln(a^3)} = a^3 = a \cdot a \cdot a$$

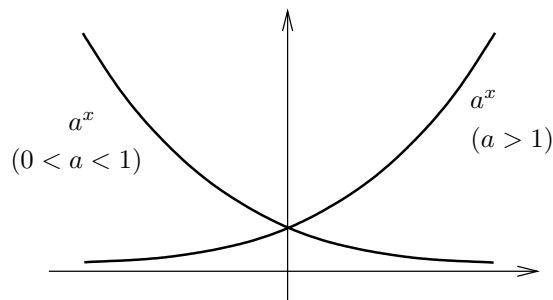


Abbildung 1.20: Graphische Darstellung der allg. Logarithmusfunktion

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

Allgemeiner Logarithmus:

$$f(x) = a^x, \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$f^{-1}(x) = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \quad a > 1 \quad \boxed{\text{UE}}$$

Beispiel 1.27 Winkelfunktionen:

$$\cos x \quad \text{stetig,} \quad x \in \mathbb{R}, \quad \cos 0 = 1, \quad |\cos(x)| \leq 1$$

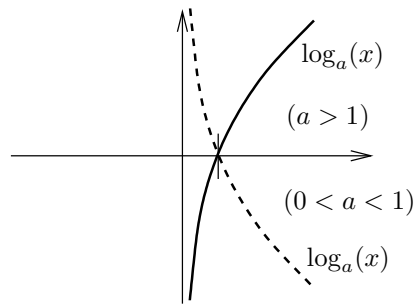


Abbildung 1.21: Umkehrung der allgemeinen Logarithmusfunktion

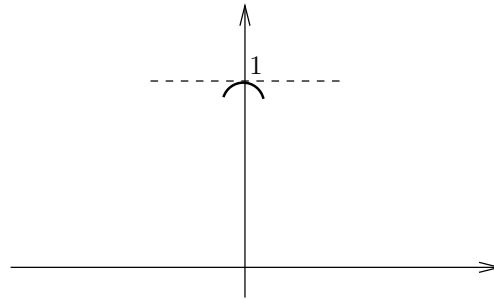


Abbildung 1.22: Graphische Darstellung der Cosinusfunktion im Nullpunkt

$$(\cos x)' = -\sin x \quad \cos^2 y + \sin^2 x = 1$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \cdot \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_0 - \sin x \cdot \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_1 = -\sin(x) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

\Rightarrow

$\begin{aligned} \cos(x + 2\pi) &= \cos x \\ \sin(x + 2\pi) &= \sin x \end{aligned}$
--

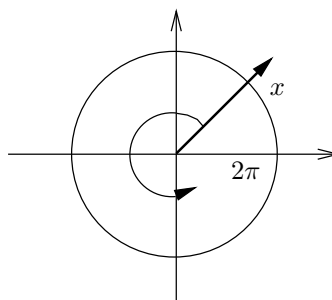


Abbildung 1.23: sin und cos durchlaufen einmal den Einheitskreis

$$z \in \mathbb{C}$$

$$z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z| \cdot e^{i\varphi} \quad [\cos z + i \sin z = e^{iz}]$$

UE

$\cos x + i \sin x = e^{ix}$

Asymptotische Beziehungen:

$$f(x) = O(g(x)) \quad x \rightarrow x_0 \quad x_0 \in [-\infty, \infty] \iff |f(x)| \leq C \cdot |g(x)|$$

(in einer Umgebung von x_0)

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \rightarrow x_0) \quad x_0 \in [-\infty, \infty] \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \rightarrow x_0) \quad x_0 \in [-\infty, \infty] \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

$$\iff f(x) = g(x) + o(g(x))$$

1.5 Differenzierbare Funktionen:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \underbrace{k}_{=f'(x_0)} \cdot (x - x_0)}_{= \text{Geradengleichung}} + o(x - x_0)$$

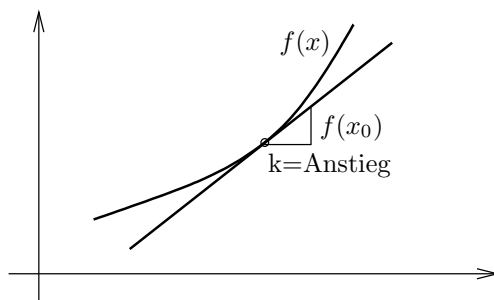


Abbildung 1.24: Approximation einer Funktion durch eine Gerade

$$\iff \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k + o(1) \quad (x - x_0)$$

$$\iff \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} := f'(x_0)$$

Eine Funktion ist differenzierbar in einem Punkt, wenn sie sich lokal um diesen Punkt durch eine Gerade approximieren lässt.

Ableitungsfunktion:

$$x \rightarrow f'(x) = \frac{df}{dx}$$

Satz 1.16 f' differenzierbar $\implies f$ stetig

UE

Beispiel 1.28 $f(x) = x^\alpha$, $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ $(e^x) = e^x$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + k_1 \cdot (x - x_0) + k_2 \cdot (y - y_0) + o\left(\left|\frac{x - x_0}{y - y_0}\right|\right)$$

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} := \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad (y = y_0)$$

$$k_2 = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} := \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad (x = x_0)$$

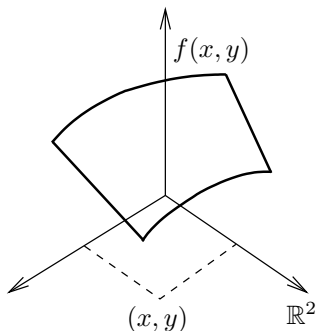


Abbildung 1.25: Darstellung einer Funktion mit 2 Variablen

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + o(|x - x_0|) = \\
 &= f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right) + o\left(\left| \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right| \right)
 \end{aligned}$$

Definition 1.6

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $x_0 : \iff \exists A \in \mathbb{R}^{m \times n} : \underline{f}(\underline{x}) = \underline{f}(\underline{x}_0) + A \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0) + o(|\underline{x} - \underline{x}_0|)$

$$\underline{f}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ f_n(\underline{x}) \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\underline{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(\underline{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\underline{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(\underline{x}_0) \end{pmatrix} := \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}(\underline{x}_0)$$

(Funktional- oder Jacobimatrix)

Satz 1.17

$$\begin{aligned}
 f \text{ stetig differenzierbar} &\Rightarrow \underline{f} \text{ differenzierbar} &\Rightarrow \exists \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \\
 \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \text{ stetig} \right) &\Leftrightarrow &\Leftrightarrow \\
 &&\Leftrightarrow f \text{ stetig}
 \end{aligned}$$

Beispiel 1.29 $f(x) = x^3$

$$\begin{aligned}
 \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)}{(x - x_0)} = x^2 + xx_0 + x_0^2 \\
 \longrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= 3x_0^2
 \end{aligned}$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

Beispiel 1.30 $f(x) = e^x \implies (e^x)' = e^x$

Beweis:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{e^x - e^{x_0}}{x-x_0} = e^{x_0} \underbrace{\frac{e^{x-x_0} - 1}{x-x_0}}_{\rightarrow 1}$$

$$\frac{e^t - 1}{t} = \frac{t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots}{t} = 1 + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \dots$$

$$\left| \frac{e^t - 1}{t} - 1 \right| \leq |t| + |t|^2 + |t|^3 + \dots = \frac{|t|}{1-|t|} \rightarrow 0 \quad \text{für } \lim |t| \rightarrow 0$$

oder:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$(e^x)' = 0 + 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Satz 1.18

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot z^n \quad |z| < R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$\implies \forall |z_0| < R : \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n \geq 1} a_n \cdot n \cdot z^{n-1}$$

Beweis-Idee:

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \sum_{n \geq 1} a_n \cdot \underbrace{\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0}}_{(z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z \cdot z_0^{n-2} + z_0^{n-1})} \\ &= \underbrace{\sum_{n \leq N} \dots}_{\rightarrow \sum_{n \leq N} a_n \cdot n \cdot z^{n-1}} + \underbrace{\sum_{n > N(\epsilon)} \dots}_{|\dots| < \epsilon} \end{aligned}$$

Beispiel 1.31

$$(\sin x)' = \cos x \quad (\sinh x)' = \cosh x$$

$$(\cos x)' = -\sin x \quad (\cosh x)' = \sinh x$$

Satz 1.19

$$1. \quad \alpha \cdot f(x) + \mu \cdot (g(x))' = \alpha \cdot f'(x) + \mu \cdot g(x) \quad (\text{Summenregel})$$

$$2. \quad (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad (\text{Produktregel})$$

$$3. \quad \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \quad (\text{Quotientenregel})$$

$$4. \quad (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad (\text{Kettentenregel})$$

$$5. \quad (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Beweis:

$$1. \quad \boxed{\text{UE}}$$

2. $f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|)$
 $g(x) - g(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|)$
 $\implies f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0) =$ / $\pm f(x) \cdot g(x_0)$
 $= f(x) \cdot (g(x) - g(x_0)) + f(x_0) \cdot g(x_0) =$
 $= \underbrace{f(x)}_{f(x)=f(x_0)+o(1)} \cdot g'(x_0) \cdot (x - x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \cdot g(x_0) + o(\quad) =$
 $= f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0) \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|)$
3. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ UE
4. $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|)$
 $\implies f(g(x)) - f(g(x_0)) =$
 $= f'(g(x_0)) \cdot (g(x) - g(x_0)) + o(g(x) - g(x_0))$
 $= f'(g(x_0)) \cdot (g'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|))$
 $= f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|)$
5. $f(f^{-1}(x)) = x$
 $\implies f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1}(x))' = 1$

Beispiel 1.32

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x$$

$$f^{-1}(x) = \ln x$$

$$\text{Beispiel 1.33 } (a^x)' = (e^{x \cdot \ln a})' = e^{x \cdot \ln a} \cdot \ln a = \ln a \cdot a^x$$

$$\text{Beispiel 1.34 } (\log_a x)' = \frac{1}{\ln a \cdot x}$$

$$\text{Beispiel 1.35 } (\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\text{Beispiel 1.36 } (\arctan x)' = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\text{Beispiel 1.37 } (\tan x)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\text{Beispiel 1.38 } (x^\alpha)' = (e^{\alpha \cdot \ln x})' = e^{\alpha \cdot \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \quad (x > 0)$$

Satz 1.20

$$1. \frac{d(\lambda f + \mu g)}{d\underline{x}} = \lambda \cdot \frac{df}{d\underline{x}} + \mu \cdot \frac{dg}{d\underline{x}}$$

$$2. \frac{d(f(g(\underline{x})))}{d\underline{x}}$$

$$3. \frac{d(f^{-1})}{d\underline{x}} = \left[\frac{df}{d\underline{x}}(f^{-1}(\underline{x})) \right]^{-1}$$

Beispiel 1.39 $f(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} g_1(x, y) \\ g_2(x, y) \end{array} \right\} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(g_1(x, y), g_2(x, y)) = h(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{dh}{d\underline{x}} = \frac{df(g(x, y))}{du} \cdot \frac{dg}{d\underline{x}}$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial u}(g_1(x, y), g_2(x, y)) \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(g_1, g_2) \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) & \vdots & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y) & \vdots & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x},$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial g_2}{\partial y}$$

$$h(x, y) = f(g_1(x, y), g_2(x, y))$$

Implizite Kurven:

$$F(x, y) = C$$

$$\epsilon = \{(x, y) | F(x, y) = C\}$$

Beispiel 1.40 $x^2 + y^2 = 1$

$$F(x) = \pm\sqrt{1-x^2}$$

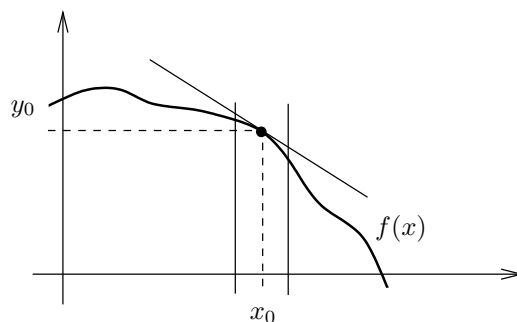


Abbildung 1.26: Mögliche Form einer impliziten Kurve

$$F(x, f(x)) = C$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot f'(x) = 0$$

$$\implies f'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)} \neq 0$$

$$= y_0 - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}(x_0, y_0)$$

Tangentengleichung:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

Hauptsatz für implizite Funktionen:

$F(x, y)$ stetig differenzierbar, $F(x_0, y_0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

$\implies f(x)$: (lokal um x_0)

- $f(x)$ stetig differenzierbar
- $F(x, f(x)) = 0$
- $f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}$

Beispiel 1.41

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

$$F(x, y) = 0 \quad x^2 + y^2 - 1 \quad (\text{Kreisgleichung})$$

$$\text{Kurve } \epsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1\} \quad F(x, y) = 0$$

$$x^2 + y^2 - 1 \implies y = \pm\sqrt{1 - x^2} = f(x)$$

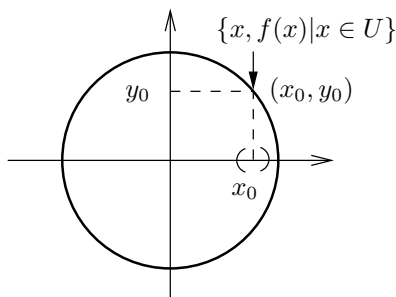


Abbildung 1.27: Darstellung eines Kreises als implizite Kurve

Flächen:

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0$$

Tangentialhyperebene am Punkt $(x_{1,0}, \dots, x_{n,0}) = \underline{x}_0$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(\underline{x}_0)(x_1 - x_{1,0}) + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(\underline{x}_0)(x_n - x_{n,0}) = 0$$

$$\underbrace{\frac{\partial F}{\partial \underline{x}}}_{\text{Funktionsmatrix}}(\underline{x}_0)(\underline{x} - \underline{x}_0) = 0$$

Funktionsmatrix

Mittelwerte der Differentialrechnung:

Satz 1.21

$$\begin{aligned} f : (a, b) &\rightarrow \mathbb{R} && \text{differenzierbar} \\ [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} && \text{stetig} \\ \implies \exists \xi \in (a, b) : & \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \end{aligned}$$

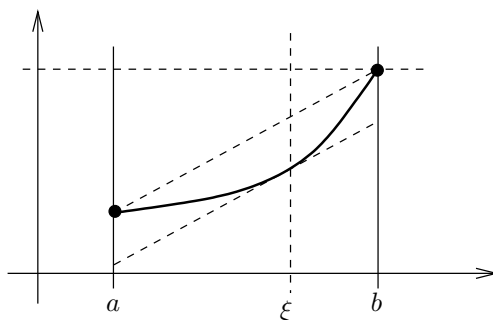


Abbildung 1.28: Graphische Darstellung des Mittelwertsatzes

Beweis:

1. Fall: $f(a) = f(b)$:

oBdA:¹

$$f(\xi) = \max_{a \leq x \leq b} f(x) > f(a) \implies a < \xi < b$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \begin{array}{l} \leq 0 \\ < 0 \end{array} \\ x < \xi \\ f'(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \begin{array}{l} \leq 0 \\ > 0 \end{array} \\ x > \xi \end{array} \right\} \begin{array}{l} \geq 0 \\ \leq 0 \end{array} \left. \right\} f'(\xi) = 0$$

2. Fall:

$$g(x) := f(x) - (x - a) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$g(a) = f(a), \quad g(b) = f(b)$$

$$\implies \exists \xi \in (a, b) : g'(\xi) = 0$$

$$\left[g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right]$$

$$\implies f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

2. Mittelwertsatz:

f, g differenzierbar, $g \neq 0$

$$\implies \xi \in (a, b)$$

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Beweis:

$$h(x) = f(x) - (g(x) - g(a)) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Regel von DesHospital:

$$f(x_0) = g(x_0) = 0$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

$$\implies \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

Beweis:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \xi \in (x_0, x)$$

$$x \rightarrow x_0 \implies \xi \rightarrow x_0 \text{ da } |x_0 - \xi| \leq |x_0 - x|$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = A$$

Beispiel 1.42 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

¹Ohne Beschränkung der Allgemeinheit

Satz 1.22 $f'(x) = 0 \quad x \in (a, b)$

$\implies f(x)$ konstant

Beweis:

Annahme: $c \neq d: f(c) \neq f(d) \implies \frac{f(d)-f(c)}{d-c} \neq 0$

$\implies \exists \xi: f'(\xi) = \frac{f(d)-f(c)}{d-c} \neq 0 \rightsquigarrow$ Widerspruch

Extremwertaufgaben:

Satz 1.23 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar

$x_0 \in (a, b)$ relatives Extremum $\implies f'(x_0) = 0$

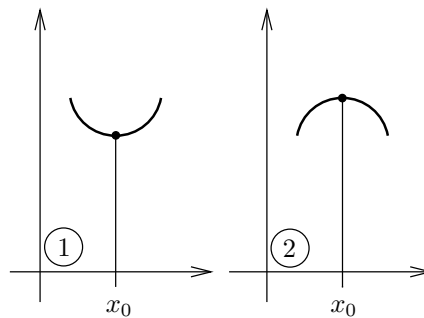


Abbildung 1.29: Abbildung eines lokalen Minimums (1) und Maximums (2)

Satz 1.24 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar

$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = \dots = f'(\xi_k) = 0$ (alle Nullstellen von f')

$\implies \max f(x) = \max\{f(a), f(\xi_1), \dots, f(\xi_k), f(b)\}$

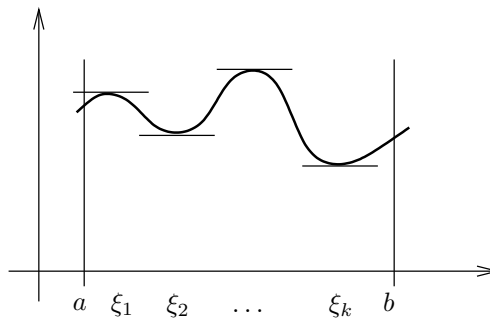


Abbildung 1.30: $\max f(x)$ ist die Nullstelle ξ_i mit dem maximalen Wert

Satz 1.25 $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, \underline{x}_0 lokales Extremum

$\implies \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0) = 0 \quad (1 \leq j \leq m)$

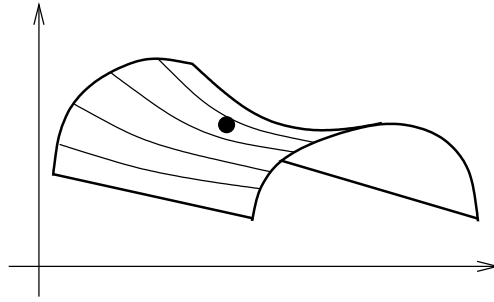


Abbildung 1.31: Graphische Darstellung eines Sattelpunktes

Beispiel 1.43 $f(x, y) = x^2 - 3xy + 2x - 5$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3y + 2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -3x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_0 = 0, y_0 = \frac{2}{3}$$

Skizze:

UE

Extrema mit Nebenbedingungen:

Beispiel 1.44 $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3x$,

NB: $x + y = 5$

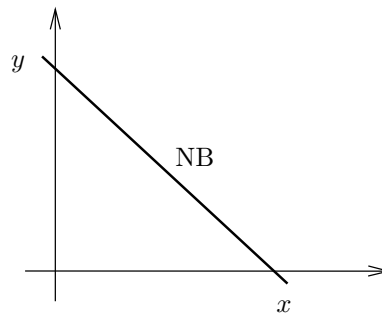


Abbildung 1.32: Extremwerte einer Funktion $f(x)$ unter Nebenbedingungen

La Grangsche Multiplikatoren:

NB: $x + y = 5$, $g(x, y) = x + y - 5 = 0$

$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y)$

Ersatzfunktion: $F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + 3x + \lambda \cdot (x + y - 5)$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 3 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y - 5 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_0 = \frac{7}{4} \\ y_0 = \frac{13}{4} \\ \lambda = \frac{26}{4} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} \end{array}} \right\} \text{extremwertverdächtiger Punkt}$$

Höhere Ableitungen:

$f(x), f'(x), f''(x) = (f'(x))', f'''(x), \dots, f^n(x) = n\text{-te Ableitung}$

Beispiel 1.45 $f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad f^n(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

Satz 1.26 $f(x)$... n-mal differenzierbar

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

$$\begin{aligned} n\text{-gerade: } f^{(n)}(x_0) > 0 &\implies x_0 \text{ lokales Maximum} \\ f^{(n)}(x_0) < 0 &\implies x_0 \text{ lokales Minimum} \end{aligned}$$

n -ungerade: x_0 "Sattelpunkt" (Siehe auch Abbildung 1.29 und 1.31)

Beispiel 1.46 $f(x, y) = x \cdot e^y + x^2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= f_x = e^y + 2x & \frac{\partial f}{\partial y} &= f_y = x e^y \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = 2 & \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = x e^y \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx} = e^y & \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} = e^y \end{aligned}$$

Satz 1.27 (Schwarz)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y \partial x} &\text{ stetig} \\ \implies \frac{\partial f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y \partial x} \end{aligned}$$

Satz 1.28 $f(x,y)$ 2-stetig differenzierbar

$$\begin{aligned} f_x(x_0, y_0), \quad f_y(x_0, y_0) &> 0 \\ f_{xx}(x_0, y_0) > 0, \quad f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0 &\implies (x_0, y_0) \text{ lokales Minimum} \\ f_{xx}(x_0, y_0) < 0, \quad f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 < 0 &\implies (x_0, y_0) \text{ lokales Maximum} \end{aligned}$$

1.6 Integralrechnung:

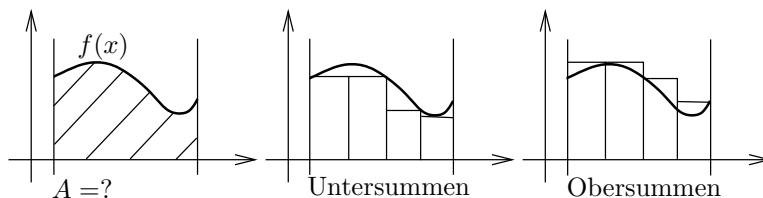


Abbildung 1.33: Darstellung der Prinzipien der Integralrechnung

Integral = $\int_a^b f(x)dx$ = gemeinsamer Grenzwert der Ober- und Untersummen, wenn die Feinheit der Zerlegung $\rightarrow 0$

Satz 1.29 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig $\implies \exists \int_a^b f(x)dx$

Satz 1.30 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (f ... stetig)

1. $F(x) := \int_a^x f(t)dt \implies F' = f$
2. $F' = f \implies \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Bestimmtes Integral:

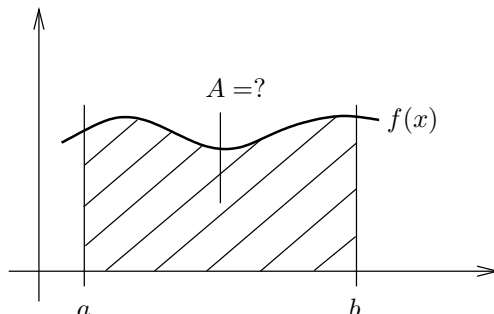


Abbildung 1.34: Bestimmung der Fläche über ein bestimmtes Integral

$$\left. \begin{array}{l} U(f, T_n) \quad T_n \dots \text{Zerlegung} \\ O(f, T_n) \\ Z(f, T_n, Z_n) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \end{array} \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$$

Z ... Zwischensumme

Rechenregeln:

1. $\int_a^b [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)]dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x) \cdot dx + \beta \cdot \int_a^b g(x) \cdot dx$
2. $\int_a^b f(x) \cdot dx + \int_b^c f(x) \cdot dx = \int_a^c f(x) \cdot dx \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$
wobei $\int_a^b f(x) \cdot dx = - \int_b^a f(x) \cdot dx \quad \text{für } b < a$
3. $f \leq g \implies \int_a^b f(x) \cdot dx \leq \int_a^b g(x) \cdot dx \quad (a < b)$

Mittelwertsatz der Integralrechnung: (Zwischenwertsatz)

$$f \text{ stetig auf } [a, b] \implies \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a), \quad a < \xi < b$$

Beweis:

$$\text{sei } g = \min f(x) \quad a \leq x \leq b, \quad G = \max F(x) \quad a \leq x \leq b$$

$$g \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) \cdot dx \leq G \cdot (b - a)$$

$$g \leq \underbrace{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \cdot dx}_{=f(\xi)} \leq G$$

$$\exists \xi \text{ mit } a < \xi < b : f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \cdot dx \quad \text{q.e.d.}$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

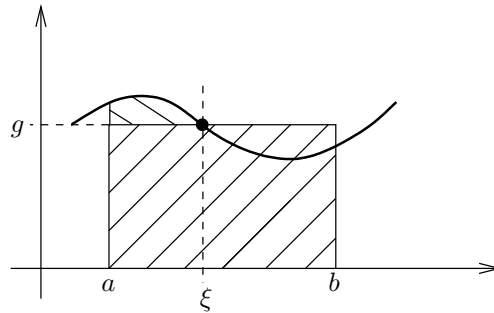


Abbildung 1.35: Graphische Darstellung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig, } F(x) := \int_a^x f(t) \cdot dt$$

\implies differenzierbar und $F'(x) = f(x)$

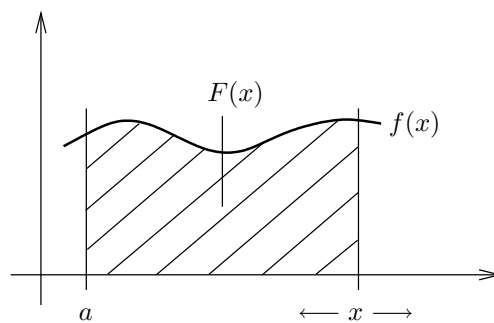


Abbildung 1.36: Darstellung des Hauptsatzes der Differential- Integralrechnung

Beweis: (siehe dazu auch Bild 1.37)

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$$

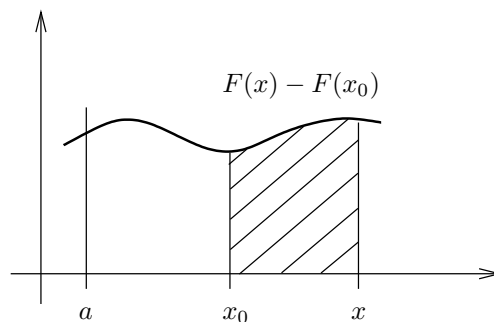


Abbildung 1.37: Beweis des Hauptsatzes der Differential- Integralrechnung

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= \int_a^x f(t) \cdot dt - \int_a^{x_0} f(t) \cdot dt = \\ &= \int_{x_0}^x f(t) \cdot dt = \\ &= (x - x_0)f(\xi) \text{ wobei } x_0 < \xi < x \\ \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} &= f(\xi) \longrightarrow f(x_0), \text{ also } F'(x_0) = f(x_0) \implies \xi \rightarrow x_0 \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Unbestimmtes Integral:

Definition 1.7

Eine Funktion $F(x)$ heißt Stammfunktion von $f(x)$, falls $F'(x) = f(x)$
Schreibweise: $F(x) = \int f(x) \cdot dx \dots$ "unbestimmtes Integral"

Gibt es mehrere Stammfunktionen zu einer Funktion $f(x)$?

Satz 1.31 $F_1(x), F_2(x)$ Stammfunktionen von $f(x) \implies F_1(x) = F_2(x) + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$

Beweis:

$$F_1(x) = F_2(x) \implies D'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \implies D = \text{konstant}$$

Satz 1.32 Zusammenhang zwischen bestimmten und unbestimmten Integral:

$$f(x) \text{ stetig, } F(x) \text{ beliebige Stammfunktionen von } f \implies \int_a^b f(x) \cdot dx = F(a) - F(b) = F(x) \Big|_a^b$$

Beweis:

$$F_1(x) = \int_a^x f(t) \cdot dt, \quad F_1' = f; \quad F_2(x) = \int_a^x f(t) \cdot dt, \quad F_2' = f;$$

$$\implies F_1' = F_2' + c \quad c \in \mathbb{R}; \quad x = a : \underbrace{F_1(a)}_{=0} = F_2(a) + c \implies$$

$$\implies \int_a^b f(t) \cdot dt = F_1(b) = F_1(a) + c = F_2(b) - F_2(a) \quad \text{q.e.d.}$$

$$= F(b) - F(a)$$

Beispiel 1.47

- $f(x) = x^2 \implies \frac{x^3}{3}$ eine Stammfunktion, $\frac{x^3}{3} + c$ alle Stammfunktionen
- $f(x) = \cos x \implies F(x) = \sin x$
- $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \implies F(x) = \arctan x$

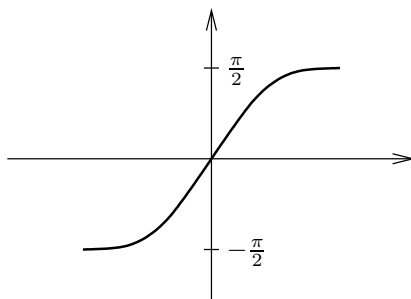


Abbildung 1.38: Graphische Darstellung des Arcustangens

$$\bullet \int_0^\pi \sin x \cdot dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2 = -\cos x + \underbrace{c}_{\text{fällt weg}} \Big|_0^\pi = \dots = 2$$

Integrationsregeln:

1. Partielles Integrieren:

Satz 1.33

$$(i) \int f(x) \cdot g'(x) \cdot dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \cdot dx$$

$$(ii) \int_a^b f(x) \cdot g'(x) \cdot dx = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) \cdot dx$$

Beweis:

(ii) folgt aus (i)

$$(ii) [f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$f(x) \cdot g'(x) = [f(x) \cdot g(x)]' - f'(x) \cdot g(x)$$

$$\int f(x) \cdot g'(x) = \int \underbrace{[f(x) \cdot g(x)]'}_{f(x) \cdot g(x)} - \int f'(x) \cdot g(x) \quad \text{q.e.d.}$$

$$\text{Beispiel 1.48 } \int \ln x \cdot dx = \int \underbrace{1}_{g'} \cdot \underbrace{\ln x}_f \cdot dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = x \cdot \ln x - x + c$$

2. Substitution:

$$\text{z.B. } \int x \cdot e^{x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} \int \underbrace{2x \cdot e^{x^2}}_{(e^{x^2})'} = \frac{1}{2} \cdot e^{x^2} + c$$

Satz 1.34

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \cdot dx = \int f(u) \cdot du \Big|_{u=\varphi(x)}$$

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \cdot dx = \int_{\varphi^a}^{\varphi^b} f(u) \cdot du \Big|_{u=\varphi(x)}$$

$$\text{oder äquivalent: } \int_\alpha^\beta f(u) \cdot du = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \cdot dx$$

(Beweis mittels Kettenregel)

$$\text{in der Praxis: } u = \varphi(x) \quad \frac{du}{dx} = \varphi'(x) \quad \text{“} \iff \text{”} \quad du = \varphi'(x) \cdot dx$$

Beispiel 1.49

$$\bullet \int x \cdot \sin(x^2 + 1) \cdot dx = \left| \frac{u=ax+b}{du=a \cdot dx} \right| = \frac{1}{2} \int \sin u \cdot du = \frac{1}{2}(-\cos u) = -\frac{1}{2} \cos(x^2 + 1) + c$$

- sei $f(x)$ Stammfunktion von f

$$\int \underbrace{f(ax+b)}_u \cdot dx = \left| \begin{array}{l} u=ax+b \\ du=a \cdot dx \end{array} \right| = \frac{1}{a} \int f(u) \cdot du = \frac{1}{a} F(u) = \frac{1}{a} F(ax+b)$$

- $\int \underbrace{\frac{1}{x^2+2x+2}}_{(x+1)^2+1} \cdot dx \left| \begin{array}{l} u=x+1 \\ du=dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{u^2+1} \cdot du = \arctan u = \arctan(x+1) + c$

Integration rationaler Funktionen:

$$r(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad f, g \text{ - Polynome}$$

z.B.: $r(x) = \frac{x^3+x+3}{x+1}$

1. falls $\text{Grad } f(x) \geq \text{Grad } g(x)$: Polynomdivision

$$\begin{array}{r} - \left\{ \begin{array}{l} (x^3 + x + 3) : (x + 1) = \underline{x^2 - x + 2} \\ x^3 + x^2 \end{array} \right. \\ - \left\{ \begin{array}{l} -x^2 + x + 3 \\ -x^2 - x \end{array} \right. \\ - \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3 \\ 2x + 2 \end{array} \right. \\ \hline 1 \text{ Rest} \end{array}$$

Also: $r(x) = x^2 - x + 2 + \frac{1}{x+1} \implies \int r(x) \cdot dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x+1| + c$

2. $r(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, wo $\text{Grad } f(x) < \text{Grad } g(x)$: Partialbruchzerlegung

Beispiel 1.50 $r(x) = \frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$ (nachrechnen)

$$\implies \int r(x) = \ln|x-1| - \ln|x+1| + c = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c$$

Fundamentalsatz der Algebra:

$g(x)$... Polynom n-ten Grades mit den Koeffizienten in \mathbb{R} und $\mathbb{C} \implies g(x)$ hat n-Nullstellen in \mathbb{C} (mit ihrer Vielfachheit gerechnet)

Also z.B. Nullstellen $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ (reel) und $\beta_1 + \gamma_1 i, \dots$ (komplex) \implies
 $\implies g(x) = c \cdot (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \beta_1 - \gamma_1 i) \dots$... in \mathbb{C}

Nullstellen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \underbrace{(\beta_1 + \gamma_1 i)(\beta_1 - \gamma_1 i), \dots}_{\text{(konjugiert komplexe Nullstellen)}}$

$$\begin{array}{l} \alpha : (x - \alpha) \\ \beta \pm \gamma i : (x - \beta - \gamma i)(x - \beta + \gamma i) = x^2 - \underbrace{2\gamma}_{\in \mathbb{R}} x + \underbrace{\beta^2 + \gamma^2}_{\in \mathbb{R}} \end{array}$$

Partialbruchzerlegung:

Wenn $g(x) = \underbrace{(x - \alpha_1)^{K_1} \dots (x - \alpha_s)^{K_s}}_{\text{(reelle Nullstellen)}} \cdot \underbrace{(x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{L_1} \dots (x^2 + \beta_t x + \gamma_t)^{L_t}}_{\text{(konjugiert komplexe Nullstellen)}}$

$$\implies \frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{K_i} \frac{A_{ij}}{(x - \alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{L_i} \frac{B_{ij}x + C_{ij}}{(x^2 + \beta_i x + \gamma_i)^j} \text{ mit } A_{ij}, B_{ij} \text{ und } C_{ij} \in \mathbb{R}$$

Dabei können A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} durch Koeffizientenvergleich bestimmt werden.

Beispiel 1.51

$$\begin{aligned}
 r(x) &= \frac{x^2+5}{x^3+x^2+x+1} = \frac{x^2+5}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \\
 \implies x^2 + 5 &= A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x + 1) \\
 &= (A + B)x^2 + (B + C)x + (A + C) \\
 \implies \left. \begin{array}{l} x^2 : \quad 1 = A + B \\ x^1 : \quad 0 = B + C \\ x^0 : \quad 5 = A + C \end{array} \right\} &\implies A = 3, B = -2, C = 2 \\
 \implies \int r(x) \cdot dx &= \int \frac{3}{x+1} \cdot dx + \int \frac{-2x+2}{x^2+1} \cdot dx = \\
 &= 3 \ln|x+1| - \int \frac{2x}{x^2+1} \cdot dx + 2 \int \frac{1}{x^2+1} \cdot dx = \\
 &= 3 \ln|x+1| - 2 \ln|x^2+1| + 2 \arctan x + c
 \end{aligned}$$

Beispiel 1.52

$$\begin{aligned}
 r(x) &= \frac{x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+2x+5)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5} \\
 &\text{(Reelle Nullstelle mit der Vielfachheit 2)} \\
 &\text{(Lösung: } A_1 = \frac{3}{8}, A_2 = 0, B = -\frac{3}{8}, C = -\frac{1}{8} \text{)} \\
 \implies \int r(x) \cdot dx &= \text{Terme mit } \ln|x-1|, \frac{1}{x-1}, \ln\left(\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1\right), \arctan \frac{x+1}{2};
 \end{aligned}$$

Uneigentliche Integrale:

1. Art: Stelle der Unbeschränktheit:

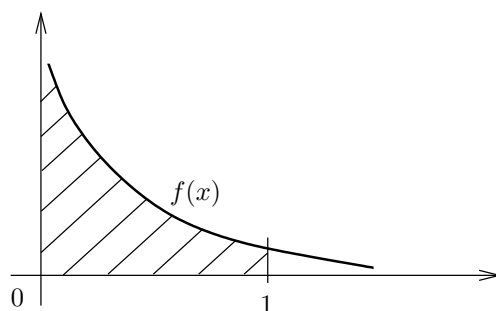


Abbildung 1.39: 0 als mögliche Stelle der Unbeschränktheit

$$\int_0^1 f(x) \cdot dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 f(x) \cdot dx$$

$$\text{Beispiel 1.53 } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} 2\sqrt{x} \Big|_{\epsilon}^1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} (2 - 2\sqrt{\epsilon}) = 2$$

$$\text{Beispiel 1.54 } \int_0^1 \frac{1}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \ln x \Big|_{\epsilon}^1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} (-\ln \epsilon) = \infty \implies \text{existiert nicht}$$

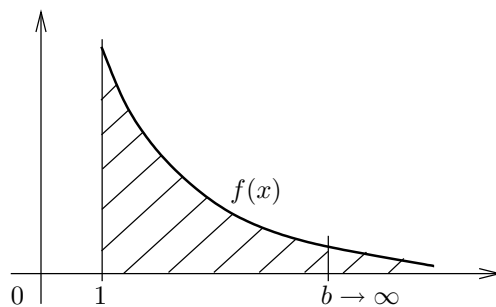


Abbildung 1.40: Unendliches Integrationsintervall als mögliche Unbeschränktheit

2. Art: Unendliches Integrationsintervall:

$$\int_a^\infty f(x) \cdot dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cdot dx$$

Beispiel 1.55 $\int_0^\infty e^{-x} \cdot dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} \cdot dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-x}) \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (1 - \underbrace{e^{-b}}_{\rightarrow 0}) = 1$

Satz 1.35 $f(x) \leq g(x)$, $\int_0^\infty g(x) \cdot dx$ existiert $\implies \int_0^\infty f(x) \cdot dx$ existiert

Beispiel 1.56 $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} (\approx 1,64)$

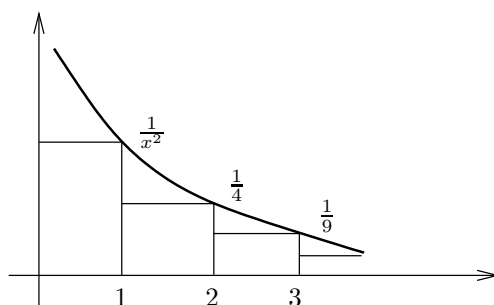


Abbildung 1.41: Darstellung der Reihe $\sum \frac{1}{x^2}$

$$\sum \frac{1}{n^2} \leq 1 + \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{x^2} \cdot dx}_{\underbrace{-\frac{1}{x} \Big|_1^\infty}_{=2}} \quad \dots \text{ existiert}$$

$$\sum \frac{1}{n^2} \geq \int_1^\infty \frac{1}{x^2} = 1 \text{ also } 1 \leq \sum \frac{1}{n^2} \leq 2$$

Satz 1.36 (Integralkriterium)

$f(x) \leq 0$ (für $x \geq 1$) und monoton \downarrow , dann gilt:

$$\int_1^\infty f(x) \cdot dx \text{ existiert} \iff \sum_{x=1}^\infty f(x) \text{ konvergent}$$

Mehrdimensionale Integrale, Bereichsintegrale:

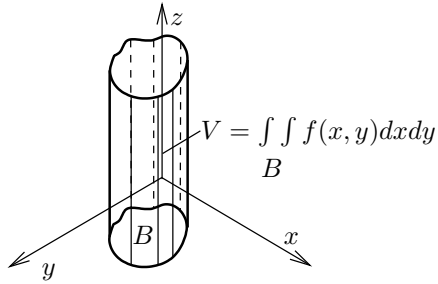


Abbildung 1.42: Integral über einen Bereich

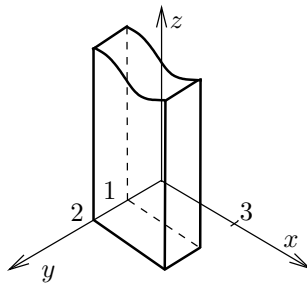


Abbildung 1.43: Integral über einen Bereich (zu Beispiel 1.57)

Beispiel 1.57 $B = [1, 2] \times [0, 3]$

$$\underbrace{\int \int_B (x^2 y + x) \cdot dx \cdot dy}_{\text{Scheibchen}} = \int_0^3 \left(\int_1^2 (x^2 y + x) dx \right) dy = \int_0^3 \left. \frac{x^3}{3} y + \frac{x^2}{2} \right|_1^2 dy =$$

$$= \int_0^3 \left(\frac{7y}{3} + \frac{3}{2} \right) dy = \left. \frac{7y^2}{6} + \frac{3y}{2} \right|_0^3 = \frac{63}{6} + \frac{9}{2} = \frac{90}{6} = 15$$

Satz von Fubini:

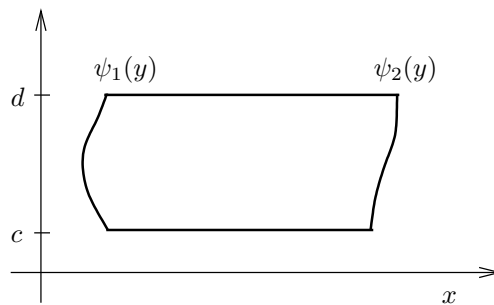


Abbildung 1.44: Darstellung des Satzes von Fubini

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), \quad c \leq y \leq d\}$$

$$\underbrace{\int \int_B f(x, y) \cdot dx \cdot dy}_{\text{Scheibchen}} = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) \cdot dx \right) dy$$

Substitution:

$$\int_{\varphi a}^{\varphi b} f(u) \cdot du = \int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \cdot dx \quad \begin{array}{l} \varphi(x) = u \\ \varphi'(x) \cdot dx = du \end{array}$$

$$\int_{\varphi[a,b]} f(u) \cdot du = \int_{[a,b]} f(\varphi(x)) |\varphi'(x)| \cdot dx$$

$$\underbrace{\int \int_B f(u, v) \cdot du \cdot dv}_{B} = \int \int f(\varphi(x, y), \psi(x, y)) \cdot \left| \begin{array}{cc} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{array} \right| \cdot dx \cdot dy$$

$$\left(\left| \dots \right| \right) = \text{Betrag der Funktionaldeterminante}$$

$$B' = \{ (\varphi(x, y), \psi(x, y)) \mid (x, y) \in B \}$$

Beispiel 1.58 $\underbrace{\int \int_{x^2+y^2 \leq 1} 1 \cdot dx \cdot dy}_{x^2+y^2 \leq 1} = \int_{-1}^1 2\sqrt{1-x^2} \cdot dx = \pi$

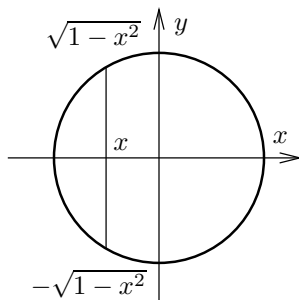


Abbildung 1.45: Integration über eine Kreisfläche

$$\begin{array}{ll} x = r \cdot \cos \varphi & 0 \leq r \leq 1 \\ y = r \cdot \sin \varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array}$$

$$\underbrace{\int \int_{x^2+y^2 \leq 1} 1 \cdot dx \cdot dy}_{x^2+y^2 \leq 1} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \underbrace{\left| \begin{array}{cc} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{array} \right|}_{r \cdot (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r} \cdot dx \cdot dy = \int_0^1 r \cdot dr \cdot \int_0^{2\pi} dy = \frac{r^2}{2} \Big|_0^1 \cdot 2\pi = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$$

Beispiel 1.59

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx = \sqrt{2\pi} \quad (\text{Gauss'sche Glockenkurve})$$

$$I \cdot I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot dy = \underbrace{\int \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \cdot dx \cdot dy}_{\mathbb{R}^2} = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi$$

$$\begin{array}{l} x = r \cdot \cos \varphi \\ y = r \cdot \sin \varphi \end{array} \quad \left| \quad \right| = r, \quad x^2 + y^2 = r^2$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r \cdot dr \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} = 2\pi$$

$$\frac{r^2}{2} = t \implies r \cdot dr = dt \quad \int_0^\infty e^{-t} \cdot dt = 1 \implies I = \sqrt{2\pi}$$

$$\phi(y) = \int_{-\infty}^y e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx \quad (\text{Verteilungsfunktion der Normalverteilung})$$

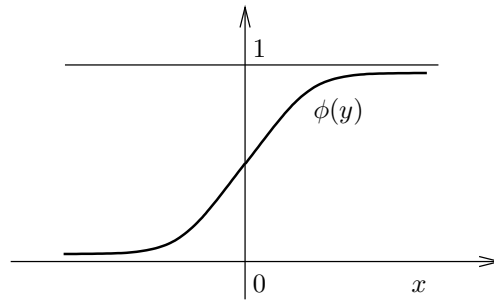


Abbildung 1.46: Verteilungsfunktion der Normalverteilung

Kurvenintegrale:

Definition 1.8 $c: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig \implies ist Kurve

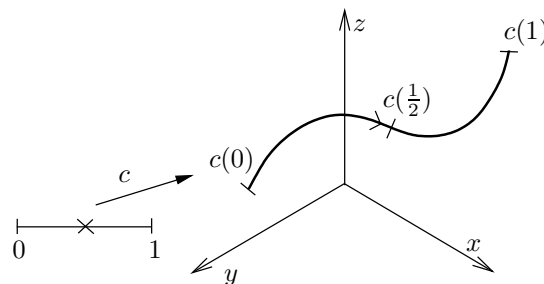


Abbildung 1.47: Abbildung eines Intervalls auf eine Kurve

Länge einer Kurve:

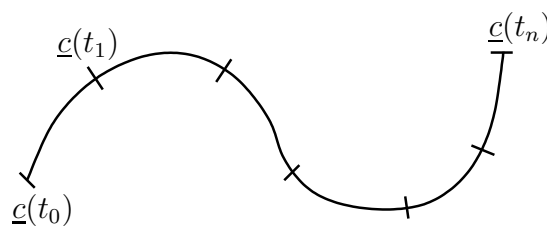


Abbildung 1.48: Unterteilung einer Kurve in Teilstücke

(für stetig differenzierbare Kurven = glatt)

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1$$

$$\begin{aligned} l &\approx \sum_{i=1}^N |\underline{c}(t_i) - \underline{c}(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^N \left| \begin{pmatrix} c_1(t_i) - c_1(t_{i-1}) \\ c_2(t_i) - c_2(t_{i-1}) \end{pmatrix} \right| = \sum_{i=1}^N \left| \begin{pmatrix} c'(\xi_i) \cdot (t_i - t_{i-1}) \\ c'(\eta_i) \cdot (t_i - t_{i-1}) \end{pmatrix} \right| = \\ &= \sum_{i=1}^N \left| \begin{pmatrix} c'_1(\xi) \\ c'_2(\eta) \end{pmatrix} \right| \cdot (t_i - t_{i-1}) \approx \int_0^1 |\underline{c}'(t)| \cdot dt \end{aligned}$$

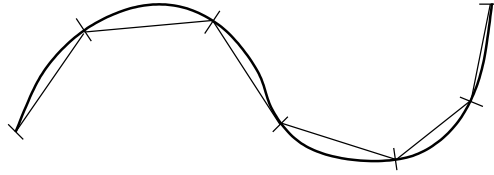


Abbildung 1.49: Approximation einer Kurve durch Geraden

$$c(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$$

$$l = \int_0^1 |\underline{c}'(t)| \cdot dt \quad (\text{Bogenlänge})$$

Beispiel 1.60

$$c(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq \varphi \quad l_\varphi = \int_0^\varphi \underbrace{\left| \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right|}_{=1} \cdot dt = \varphi$$

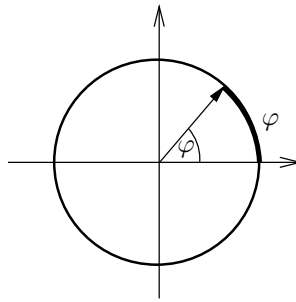


Abbildung 1.50: Die Bogenlänge eines Kreissegments ist gleich ihrem Winkel

Vektorfeld:

$$\underline{x} \longrightarrow \underline{u}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ \vdots \\ u_n(x) \end{pmatrix} \quad \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

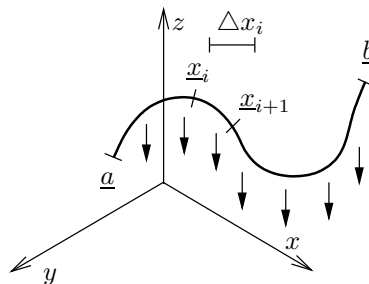


Abbildung 1.51: Darstellung eines Vektorfeldes

$$\text{Arbeit} \approx \sum \underline{u}(\underline{x}) \cdot \Delta \underline{x}_i \approx \Delta \underline{x}_i = x_{i+1} - x_i \approx \int_{\underline{c}} \underline{u}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} = \int_{\underline{c}} (u_1(\underline{x}) \cdot dx_1 + \dots + u_n(\underline{x}) \cdot dx_n)$$

$$\underline{c}(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$$

$$\underline{x}_i = \underline{c}(t_i), \quad \Delta \underline{x}_i = \underline{x}_{i+1} - \underline{x}_i = (\underline{c}(t_{i+1}) - \underline{c}(t_i)) \cdot \underbrace{(t_{i+1} - t_i)}_{\Delta t_i}$$

Definition 1.9 $\int_{\underline{c}} \underline{u}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} := \int_0^1 \underline{u}(\underline{c}(t)) \cdot \underline{c}'(t) \cdot dt = \int_0^1 (u_1(\underline{c}(t)) \cdot c'_1(t) + \dots + u_n(\underline{c}(t)) \cdot c'_n(t)) \cdot dt$

Beispiel 1.61 $\int P(x, y) \cdot dx + Q(x, y) \cdot dy = \int (P \cdot dx + Q \cdot dy) \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$

Beispiel 1.62

$$\underline{u}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x-y \\ y^2 \end{pmatrix} \quad \underline{c}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\int_{\underline{c}} \underline{u}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} = \int_0^1 u_1(\underline{c}(t)) \cdot c'_1(t) + u_2(\underline{c}(t)) \cdot c'_2(t) = \int_0^1 ((t^2 - t) \cdot 2t + t^2 \cdot 1) \cdot dt$$

$$u(x) = \begin{pmatrix} x-y \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2-t \\ t^2 \end{pmatrix} \quad d\underline{x} = \underline{c}'(t) \cdot dt = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} \cdot dt$$

$$\int_{\underline{c}} u(x) \cdot d\underline{x} = \int (t^2-t) \cdot (2t) \cdot dt$$

(Bemerkung: hängt nicht von der Parametrisierung ab)

UE

Satz 1.37 (Wegunabhängigkeit)

$$\int \underline{u}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} \text{ ist wegunabhängig} \iff \exists F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \underline{u} \nabla F = \text{grad } F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$\int_{\underline{a} \rightarrow \underline{b}} \underline{u}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} = F(b) - F(a)$$

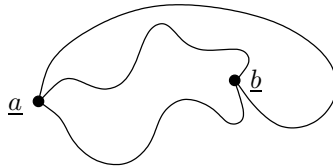


Abbildung 1.52: Wegunabhängigkeit bedeutet gleiche Energie trotz unterschiedlichem Weg

Beweis:

$$\begin{aligned} \Leftarrow \int_{\underline{c}} \underline{u}(\underline{x}) d\underline{x} &= \int_0^1 u(\underline{c}(t)) \cdot \underline{c}'(t) = \int_0^1 \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(c'_1(t)) + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(c'_n(t)) \right) \cdot dt = \\ &= \int_0^1 \underbrace{[F(c_1(t), \dots, c_n(t))]}_{F(\underline{c}(t))'} = F(\underline{c}(1)) - F(\underline{c}(0)) \end{aligned}$$

$$\implies F(\underline{x}) := \int_{\underline{a} \rightarrow \underline{x}} u(y) \cdot dy$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(F \left(\underline{x} + t \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right) - F(\underline{x}) \right) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \underbrace{\left(\int_{\underline{x} \rightarrow \underline{x} + t \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} \underline{u}(\underline{y}) \cdot d\underline{y} \right)}_{\int_0^t u_1(\underline{x}+y) \cdot dy} = u_1(\underline{x})$$

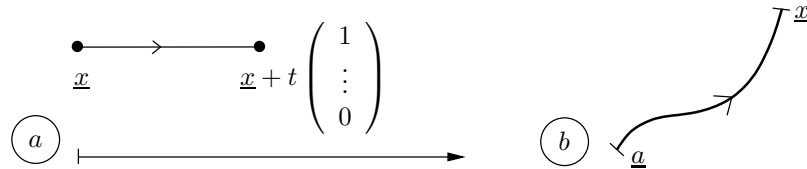


Abbildung 1.53: Bilder zum vorgeführten Beweis

Satz 1.38

$$1. \underline{u} = \text{grad } F \implies \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (1 \leq i, j \leq u)$$

$$2. \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (1 \leq i, j \leq u)$$

(Vektorfeld unabhängig, wenn diese Bedingung erfüllt)

(in einem einfach zusammenhängenden Gebiet $\implies \underline{u} = \text{grad } F$)

Beispiel 1.63

$$\int [(2xy^2 + 3) \cdot dx + (2x^2y - 1) \cdot dy]$$

$$\underline{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \underline{c}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

$$\int_0^1 [(2t \cdot t^4 + 3) \cdot 1 + (2t^2 \cdot t^2 - 1) \cdot 2t] \cdot dt = \frac{2}{6} + 3 + \frac{4}{6} - 1 = 3$$

Integrabilitätsbedingungen erfüllt?

$$P = 2xy^2 + 3 \quad Q = 2x^2y - 1$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4xy = \frac{\partial Q}{\partial x} \implies \exists F$$

$$\implies \exists F : \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = P = 2xy^2 + 3 & F = 2x^2y^2 + 3x + c(y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = Q = 2x^2y - 1 & \implies 2x^2y + c'(y) = 2x^2y - 1 \\ & \implies \underline{c}(y) + D \end{cases}$$

$$\implies F = x^2y^2 + 3y - y + D$$

$$\int_{(0,0) \rightarrow (1,1)} (P \cdot dx + Q \cdot dy) = F(1,1) - F(0,0) = 3 - 0 = 3$$

(einfach zusammenhängend \implies in einem Punkt zusammenziehbar)

Beweis:

$$\implies u_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} \implies \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

\Leftarrow 1. Variante: siehe Bsp.

2. Variante: Satz von Green

$$\implies \int_{\partial B} (P \cdot dy + Q \cdot dx) = \int_B \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \cdot dx \cdot dy \quad (\partial B \text{ siehe Abbildung 1.54})$$

$$\text{Folgerung: } \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \implies \int (P \cdot dx + Q \cdot dy) = 0 \implies \int \dots \text{wegunabhängig}$$

(Geschlossene Kurve)

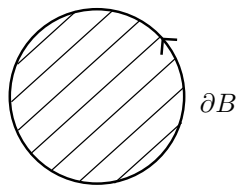


Abbildung 1.54: ∂B ... Randkurve im mathematisch positiven Sinn

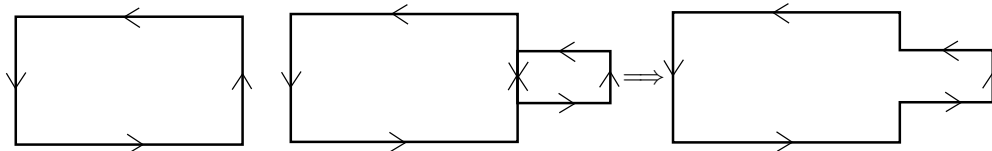


Abbildung 1.55: Integrale über Vektorfelder

Komplexe Kurvenintegrale:

\underline{c} ... Kurve in \mathbb{C}

$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

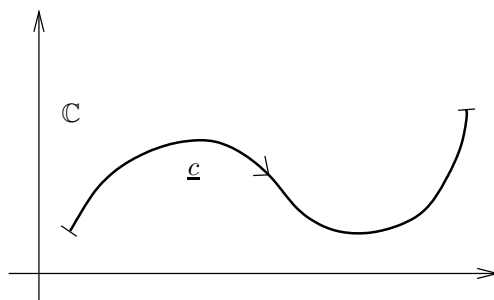


Abbildung 1.56: Darstellung einer Kurve im komplexen Raum \mathbb{C}

$$\int_{\underline{c}} f(z) \cdot dz \quad f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y) \quad z = x + i \cdot y$$

$$\int_{\underline{c}} f(z) \cdot dz = \int_{\underline{c}} (u + i \cdot v)(dx + i \cdot dy) = \int_{\underline{c}} (u \cdot dx - v \cdot dy) + i \cdot \int_{\underline{c}} (v \cdot dx + u \cdot dy)$$

Beispiel 1.64 $f(z) = z^2 = (x + i \cdot y)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_u + i \cdot \underbrace{2xy}_v$

$$\int f(z) \cdot dz = \int [(x^2 - y^2) \cdot dx - 2xy \cdot dy] + i \cdot \int [2xy \cdot dx + (x^2 - y^2) \cdot dy]$$

$$-2y = -2y \quad (\text{Integrabilitätsbedingung})$$

$$U = \frac{x^3}{3} - xy^2 \quad V = x^2y - \frac{y^3}{3}$$

$$F(x, y) = \frac{x^3}{3} - x^2y + i \cdot (x^2y - \frac{y^3}{3}) \quad \int_{a \rightarrow b} z^2 \cdot dz = F(b) - F(a)$$

$$\frac{z^3}{3} = \frac{1}{3} \cdot (x + i \cdot y)^3 = \frac{1}{3}(x^3 + i \cdot 3x^2y - 3xy^2 + i \cdot y^3) = \frac{x^3}{3} - xy^2 + i \cdot (x^2y - \frac{y^3}{3})$$

$$\int_{a \rightarrow b} z^2 \cdot dz = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} = \frac{z^3}{3} \Big|_a^b$$

Kapitel 2

Komplexe Analysis und Funktionaltransformation

2.1 Potenzreihen:

Taylor'scher Lehrsatz:

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{Tangente}} + o(|x - x_0|)$$

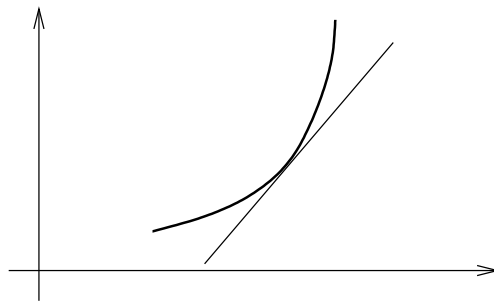


Abbildung 2.1: Taylorreihe nähert eine Funktion mittels Tangenten beliebig genau an

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \int_{x_0}^x f'(t) \cdot dt = f'(\xi) \cdot \int_{x_0}^x 1 \cdot dt = f'(\xi)(x - x_0) = \int_0^{x-x_0} 1 \cdot f'(x-t) \cdot dt = \\ &= t \cdot f'(x-t) \Big|_0^{x-x_0} - \int_0^{x-x_0} t \cdot f''(x-t) \cdot dt = (x-x_0) \cdot f'(x_0) + \int_0^{x-x_0} t \cdot f''(x-t) \cdot dt = \\ &= f'(x) \cdot (x-x_0) + f''(\xi) \underbrace{\int_0^{x-x_0} t \cdot dt}_{= \frac{x-x_0}{2}} \end{aligned}$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{\frac{f''(\xi)}{2} \cdot (x - x_0)^2}_{\int_0^{x-x_0} t \cdot f''(x-t) \cdot dt}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{x-x_0} t \cdot f''(x-t) \cdot dt &= \frac{t^2}{2} f''(x-x_0) \Big|_0^{x-x_0} - \int_0^{x-x_0} \frac{t^2}{2} \cdot f'''(x-t) \cdot dt = \\ &= \frac{f'''(x_0)}{3!} (x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + R_n(f) \end{aligned}$$

$$R_n = \frac{1}{n!} \int_0^{x-x_0} t^n \cdot f^{(n+1)}(x-t) \cdot dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}$$

f (n+1) mal stetig differenzierbar

Beispiel 2.1 $f(x) = e^x, \quad x_0 = 0 \quad f^{(k)}(e^x) = e^x, \quad f^{(k)}(x_0) = e^0 = 1$

$$\implies e^x = 1 + 1 \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot x^n + \frac{e^\xi}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^\xi \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

UE

\implies

$$e^x = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \cdot x^k$$

Satz 2.1 $f \in C^\infty$ oft differenzierbar

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k}_{\text{Taylorreihe von } f} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f) = 0$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y-y_0) + \\ &+ \frac{1}{2!} \cdot \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot (x-x_0)^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \cdot (x-x_0) \cdot (y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \cdot (y-y_0)^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{3!} \cdot \left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0, y_0) \cdot (x-x_0)^3 + 3 \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x_0, y_0) \cdot (x-x_0)^2 \cdot (y-y_0) + \right. \\ &+ \left. 3 \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x_0, y_0) \cdot (x-x_0) \cdot (y-y_0)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0, y_0) \cdot (y-y_0)^3 \right] + \\ &+ \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\partial^{(n)} f}{\partial x^{n-k} \partial y^k}(x_0, y_0) \cdot (x-x_0)^{n-k} \cdot (y-y_0)^k + R_n(f) \end{aligned}$$

$$R_n(f) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{\partial^{(n+1)} f}{\partial x^{n+1-k} \partial y^k}(\xi, \eta) \cdot (x-x_0)^{n+1-k} \cdot (y-y_0)^k$$

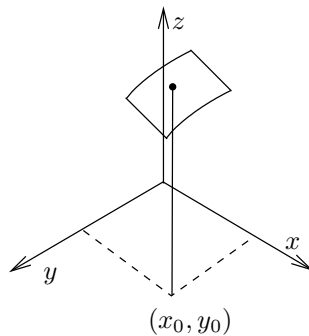


Abbildung 2.2: Tangentialebene einer Funktion zweier Veränderlicher

$$\implies (x+y)^3 = x^3 + xxy + xyx + yxx + \dots$$

Ersatzfunktion: $g(t) = f(x_0 + t \cdot (x-x_0), y_0 + t \cdot (y-y_0))$

$$g(0) = f(x_0, y_0), \quad g(1) = f(x, y)$$

$$\underbrace{g(1)}_{f(x,y)} = \underbrace{g(0)}_{f(x_0,y_0)} + \underbrace{g'(0)}_{=?} \cdot 1 + \underbrace{\frac{g''(0)}{2!}}_{=?} \cdot 1^2 + \dots + \underbrace{\frac{g^{(n)}(0)}{n!}}_{=?} \cdot 1^n + \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot 1^{n+1}$$

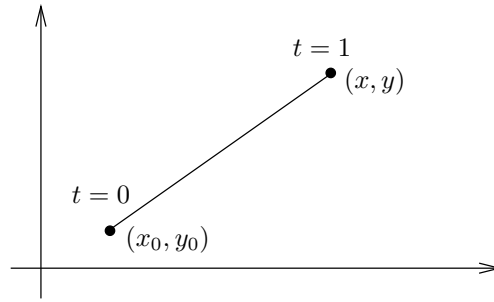


Abbildung 2.3: Vereinfachung mittels Ersatzfunktion $g(t)$

$$g'(t) = f_x(\dots) \cdot (x - x_0) + f_y(\dots) \cdot (y - y_0)$$

$$g''(t) = f_{xx}(\dots) \cdot (x - x_0)^2 + f_{xy}(\dots) \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0) + f_{yx}(\dots) \cdot (y - y_0) \cdot (x - x_0) + f_{yy}(\dots) \cdot (y - y_0)^2$$

$$g^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_{x^k y^{n-k}}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^k \cdot (y - y_0)^{n-k}$$

$$g^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \frac{\partial^{(n)} f(x_0 + t \cdot (x - x_0), y_0 + t \cdot (y - y_0))}{\partial x^{n-k} \partial y^k} \cdot (x - x_0)^{n-k} \cdot (y - y_0)^k$$

oder:

$$f(x, y) = f(\xi, \eta) + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, \eta) \cdot (x - x_0) + \dots =$$

$$= f(x_0, y_0) + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \right)}_{\text{Funktionalmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \cdot (x - x_0, y - y_0) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}}_{\text{Hessematrix}} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x}} > 0 \quad \implies \text{positiv definierte Matrix}$$

Bemerkung:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{positiv} \\ \text{(negativ)} \end{matrix} \text{definiert} \implies (x_0, y_0) \text{ lokales } \begin{matrix} \text{Minimum} \\ \text{(Maximum)} \end{matrix}$$

$$\left[\text{H positiv definiert: } \iff \forall \underline{x} \neq \underline{0} : \underline{x}^T \cdot H \cdot \underline{x} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0 \iff \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0 \wedge \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0 \right]$$

Potenzreihen:

$$\sum_{n \geq 0} a_n \cdot (x - x_0)^n \quad a_n \in \mathbb{R} \quad x, x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\left[\sum_{n \geq 0} a_n \cdot (z - z_0)^n \quad a_n \in \mathbb{C} \quad z, z_0 \in \mathbb{C} \right]$$

Satz 2.2 $R := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, \infty] \dots$ Konvergenzradius

1. $|x - x_0| < R \implies f(x) = \sum a_n(x - x_0)^n$ absolut konvergent
2. $|x - x_0| > R \implies f(x) = \sum a_n(x - x_0)^n$ absolut divergent
3. $0 < r < R \implies f(x) = \sum a_n(x - x_0)^n$ gleichmäßig konvergent für $|x - x_0| \leq r$
(Reihenrest gleichmäßig klein)

Beweis:

$$\begin{aligned} \lim \sqrt[n]{|a_n \cdot (x - x_0)|} &= |x - x_0| \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \\ &= \frac{x - x_0}{R} < 1 \text{ absolut konvergent (1)} \\ &= \frac{x - x_0}{R} > 1 \text{ absolut divergent (2)} \end{aligned}$$

zu zeigen: $\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon)$

$\forall x |x - x_0| \leq r$

$$\left| \underbrace{f(x) - \sum_{n \geq N(\epsilon)} a_n \cdot (x - x_0)^n}_{|\sum_{n \geq N(\epsilon)} a_n \cdot (x - x_0)^n|} \right| < \epsilon$$

$$|\sum_{n \geq N(\epsilon)} a_n \cdot (x - x_0)^n| \leq \sum |a_n| \cdot r^n < \epsilon \text{ für } n > N(\epsilon) \text{ und } |x - x_0| \leq r$$

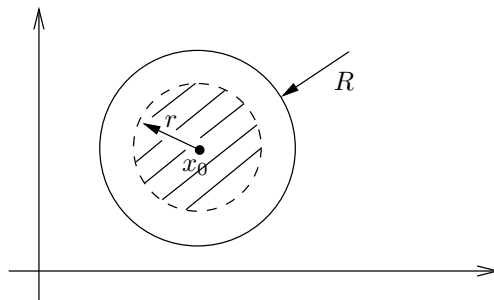


Abbildung 2.4: Konvergenzradius einer Reihe

Bemerkung: Satz gilt in \mathbb{R} und \mathbb{C}

Beispiel 2.2 $f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ $x_0 = 0$; $a_n = \frac{1}{n!}$, $R = \infty$

Beispiel 2.3 $f(x) = \sum_{n \geq 0} x^n$, $x_0 = 0$, $a_n = 1$, $R = 1$
 $= \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$

Beispiel 2.4 $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$, $x_0 = 0$, $a_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \frac{1}{n} & n > 0 \end{cases}$ $R = 1$
 $= \log \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$
 $= -\log(1-x)$
 $\implies = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$

$$f'(x) = 1 + x + x^2 + \dots$$

$$x^n, \quad 0 \leq x \leq 1$$

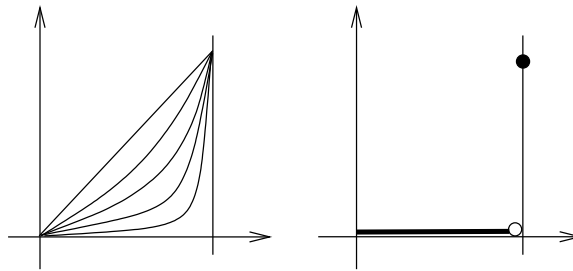


Abbildung 2.5: Die Grenzfunktion einer Folge stetiger Funktionen kann auch springen

Satz 2.3 $(f_n(x)) \quad n \geq 0 \dots$ Folge von Funktionen, $\forall x \in D : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$

1. $(f_n(x))$ gleichmäßig konvergent, $f_n(x)$ stetig $\implies f(x)$ stetig

2. $f_n(x)$ stetig differenzierbar,

$\exists h(x) \quad f'_x \longrightarrow h(x)$ gleichmäßig in $D \implies f(x)$ stetig differenzierbar,

$$f'(x) = h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

Beweis:

$$(1) \quad f(x) - f(x_0) = \underbrace{(f(x) - f_N(x))}_{|\dots| < \frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{(f_N(x) - f_N(x_0))}_{\text{falls } |x-x_0| < \delta} + \underbrace{(f_N(x_0) - f(x_0))}_{|\dots| < \frac{\epsilon}{3}}$$

$$\implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \text{ für } |x - x_0| < \delta$$

Folgerung:

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot (x - x_0)^n, \quad R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

1. $f(x)$ stetig für $|x - x_0| < R$

$$r = \frac{|x-x_0|+R}{2} < R \quad r > |x - x_0|$$

2. $f(x)$ stetig differenzierbar für $|x - x_0| < R$

$$f'(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot n \cdot (x - x_0)^{n-1}$$

$$R' = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|n \cdot a_n|}} \quad \text{Konvergenzradius von der differenzierten Potenzreihe}$$

$$\frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|n \cdot a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad (\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1)$$

Identitätssatz für Potenzreihen:

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot (x - x_0)^n, \quad R > 0$$

$$\implies a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Beweis:

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot (x - x_0)^n, \quad a_0 = f(x_0)$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n \geq k} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (x-x_0)^{n-k}$$

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \dots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x-x_0) + \dots$$

$$f(x_0) = a_0$$

$$f'(x_0) = a_1$$

$$f''(x_0) = a_2$$

⋮

$$f^{(k)}(x_0) = a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$	(Taylorreihe)
---------------------------------	---------------

(Potenzreihe ist Taylorpolynom der Funktion, die sie darstellt)

Satz 2.4 $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot (z - z_0)^n, \quad a_n \in \mathbb{C}, \quad z, z_0 \in \mathbb{C} \quad |z - z_0| < R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$

$$\implies \underbrace{\exists \lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}}_{:= f'(z)} = \sum_{n \geq 1} a_n \cdot n (z - z_0)^{n-1}$$

Beweis:

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot \frac{w^n - z^n}{w - z} = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot \underbrace{(w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + wz^{n-2} + z^{n-1})}_{\star}$$

$$z_0 = 0 \quad (\text{Ohne Beschränkung der Allgemeinheit})$$

$$= \sum_{n \leq N} a_n \cdot (\star) + \sum_{n > N} a_n \cdot (\star)$$

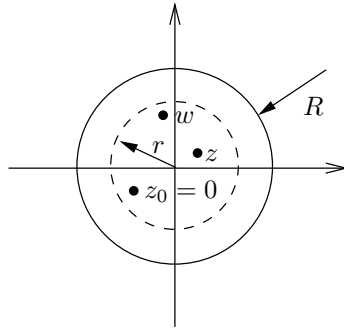


Abbildung 2.6: Abbildung des Konvergenzradius begleitend zum Satz 2.4

$$\left. \begin{array}{l}
 \bullet \quad \left| \sum_{n>N} a_n(\star) \right| \left| \sum_{n>N} |a_n| \cdot n \cdot r^{n-1} < \frac{\epsilon}{3} \right. \\
 \text{(wenn } N \text{ genügend groß)} \\
 \lim_{w \rightarrow z} \sum_{n \leq N} a_n(\star) = \sum_{n \leq N} a_n \cdot n \cdot r^{n-1} \\
 \bullet \quad \Rightarrow \left| \sum_{n \leq N} a_n(\star) - \sum_{n \leq N} a_n \cdot n \cdot r^{n-1} \right| < \frac{\epsilon}{3} \\
 \text{für } |w - z| < \delta \\
 \bullet \quad \left| \sum_{n>N} a_n \cdot n \cdot r^{n-1} \right| \leq \sum_{n>N} |a_n| \cdot n \cdot r^{n-1} < \frac{\epsilon}{3}
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \Rightarrow \left| \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - \sum_{n \geq 1} a_n \cdot n \cdot r^{n-1} \right| < \epsilon \\
 \Rightarrow \lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \sum_{n \geq 1} a_n \cdot n \cdot r^{n-1}
 \end{array}$$

Operationen für Potenzreihen:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot (z - z_0)^n, \quad g(z) = \sum_{n \geq 0} b_n \cdot (z - z_0)^n$$

1. $f(z) \pm g(z) = \sum_{n \geq 0} (a_n \pm b_n) \cdot (z - z_0)^n$
2. $f(z) \cdot g(z) = \sum_{n \geq 0} (\sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k}) \cdot (z - z_0)^n$
3. $c_0 + c_1 \cdot f(z) + c_2 \cdot f(z)^2 + \dots = c(f(z)), \quad |f(z)| < R_c$

$$c(w) = \sum_{k \geq 0} c_k \cdot w^k \quad \text{konvergent für } |z| < R_c$$

4. $a_0 \neq 0$

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{a_0 + (f(z) - a_0)} = \frac{1}{a_0 \cdot \left(1 + \left(\frac{f(z) - a_0}{a_0}\right)\right)} = a_0 \cdot \left(1 + \left(1 - \frac{f(z)}{a_0}\right) + \left(1 - \left(\frac{f(z)}{a_0}\right)^2 + \dots\right)\right)$$

$$\left|1 - \frac{f(z)}{a_0}\right| < 1$$

5. $\int f(z) \cdot dz = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} \cdot (z - z_0)^{n+1} + c$

Beispiel 2.5 Binomsche Reihe:

$$(1 - z)^\alpha = e^{\alpha \cdot \log(1+z)} \quad (\text{hat Taylorreihe für } |z| < 1) \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\log(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} \pm \dots \iff \frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 \pm \dots \quad |z| < 1$$

$$f(z) = (1 + z)^\alpha$$

$$f^{(n)}(z) = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 2) \cdot \dots \cdot (\alpha - n + 1) \cdot (1 + z)^{\alpha - n}$$

$$\implies a_n = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} \quad (1+z)^\alpha = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} z^n \quad |z| < 1$$

Beispiel 2.6

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 \pm \dots \implies \arctan(z) = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} \pm \dots \quad |z| < 1$$

Abelscher Grenzwertsatz:

$$a_n \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot x^n, \quad |x| < R, \quad \sum_{n \geq 0} a_n \cdot R^n$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow R^-} f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot R^n$$

Beispiel 2.7

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \pm \dots = \ln 2$$

2.2 Komplexe Analysis:

Definition 2.1

$G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet (offen und zusammenhängend)

$f: G \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar: $\iff \forall z \in G: \exists \lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} =: f'(z)$

Beispiel 2.8 Potenzreihen

Bemerkung: alle Differentiationsregeln gelten auch hier

Satz 2.5 $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, G einfach zusammenhängend

$\implies \int_\gamma f(z) \cdot dz$... wegunabhängig

Beweis:

$$f(z) = u(z) + i \cdot v(z), \quad z := x + i \cdot y$$

$$\int_\gamma f(z) \cdot dz = \int_\gamma (u \cdot dx - v \cdot dy) + i \int_\gamma (v \cdot dx + u \cdot dy)$$

Behauptung:

$$\left. \begin{array}{l} uy = -vx \\ vy = ux \end{array} \right\} \quad (\text{Cauchy-Riemann'sche-Gleichungen})$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(z) = \lim_{\bar{x} \rightarrow x} \frac{u(x+i \cdot y) + i \cdot v(x+i \cdot y) - u(\bar{x} + i \cdot y) - i \cdot v(\bar{x} + i \cdot y)}{\bar{x} - x} = u_x + i \cdot v_x \\ (y = \bar{y}) \\ z = x + i \cdot y \quad x = \bar{x} + i \cdot \bar{y} \\ f'(z) = \lim_{\bar{y} \rightarrow y} \frac{u(x+i \cdot y) + i \cdot v(x+i \cdot y) - u(x+i \cdot \bar{y}) - i \cdot v(x+i \cdot \bar{y})}{\bar{y} - y} = \frac{1}{i} u_y + v_y \\ (x = \bar{x}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{array}$$

Satz 2.6 $f : G \implies$ komplex differenzierbar, G einfach zusammenhängend

$$\implies F(z) = \int_{z_0}^z f(w) \cdot dw \quad (\text{komplex differenzierbar})$$

$$F'(z) = f(z)$$

Beweis:

$$F(w) - F(z) = \int_z^w f(t) \cdot dt \quad f(t) = f(z) + o(|t - z|)$$

$$\begin{aligned} \implies \frac{F(w) - F(z)}{w - z} &= \frac{1}{w - z} \int_z^w (f(z) + o(|t - z|)) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{w - z} \cdot f(z) \cdot \underbrace{\int_z^w 1 \cdot dt}_{(w-z)} + o\left(\frac{1}{|w-z|}\right) \cdot \underbrace{\int_z^w |t - z| \cdot dt}_{\left|\frac{w-z}{z}\right|^2} \\ &= f(z) + o(|w - z|) \end{aligned}$$

Satz 2.7 $f : G \longrightarrow \mathbb{C} \quad \gamma_1, \gamma_2$ homotop

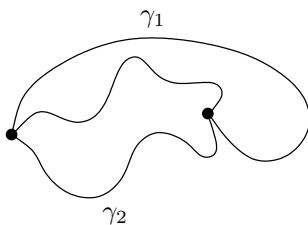


Abbildung 2.7: Abbildung zweier homotoper Kurven

$$\exists H(s, T) \text{ stetig,} \quad 0 \leq s, t \leq 1 \quad H(0, t) = \gamma_1(t) \quad H(1, t) = \gamma_2(t)$$

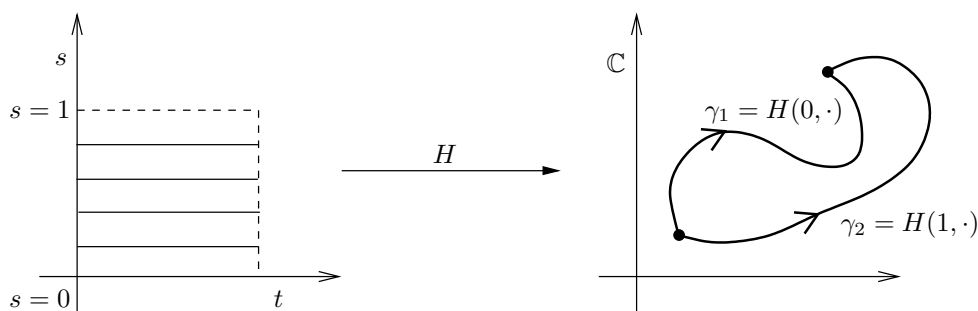


Abbildung 2.8: Eine Kurve ist homotop, wenn es eine Funktion $H(s, t)$ gibt

$$H(s, 0) = a \quad H(s, 1) = b \quad \implies \int_{\gamma_1} f(z) \cdot dz = \int_{\gamma_2} f(z) \cdot dz$$

Beispiel: $G = \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad f : G \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\implies \int_{\gamma_1} f(z) \cdot dz = \int_{\gamma_2} f(z) \cdot dz$$

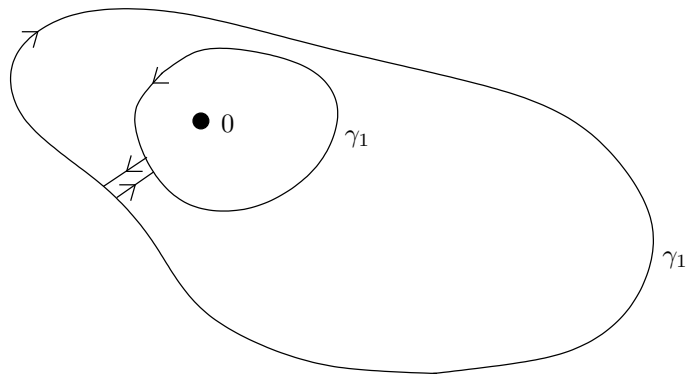


Abbildung 2.9: Integral über zwei homotope Kurven ist gleich

Satz 2.8 $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, $G \dots$ Gebiet

- (1) $f \dots$ komplex differenzierbar in G
 (2) $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} \cdot dz$
 (3) $\forall z_0 \in G \exists R > 0 \forall |z - z_0| < R$
- } gleichwertig
- $$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

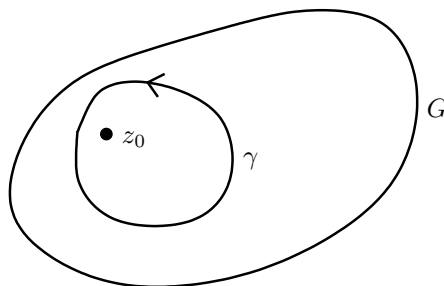


Abbildung 2.10: Abbildung einer komplex differenzierbaren Funktion

Bemerkung: (3) \implies (1)

Beweis:

$$(1) \implies (2) : \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot dz = 0 \quad \longrightarrow f'(z) \text{ für } z \rightarrow z_0$$

$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \dots$ komplex differenzierbar für $z \neq z_0$

$$= \underbrace{\int_{|z - z_0| < \epsilon} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot dz}_{\text{beschränkt}} \longrightarrow 0 \quad \text{für } \epsilon \longrightarrow 0!$$

$$\implies \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} \cdot dz = f(z_0) \cdot \underbrace{\int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}}_{2\pi i} \implies f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} \cdot dz$$

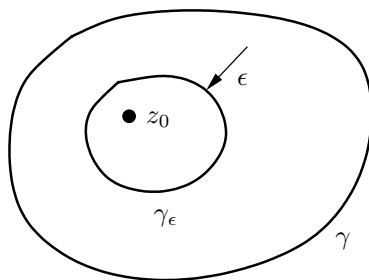


Abbildung 2.11: Epsilonbereich um z_0 einer homotopen Kurve

(2) \implies (3)

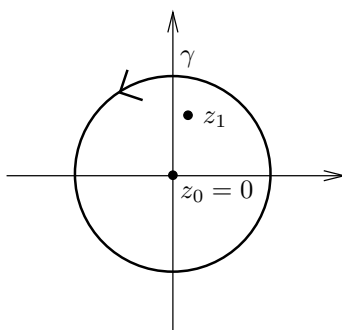


Abbildung 2.12: Abbildung des Entwicklungspunktes zu Punkt 2

$$\begin{aligned} \implies f(z_1) &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_1} \cdot dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma} f(z) \cdot \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{z^{n+1}} \cdot dz = \\ &= \sum_{n \geq 0} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \cdot dz \right)}_{\sum_{n \geq 0} a_n \cdot z_1^n} \cdot z_1^n \end{aligned}$$

$$z \in \gamma \quad |z| > |z_1| \quad \left| \frac{z_1}{z} \right| < 1$$

$$\frac{1}{z-z_1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{z_1}{z}} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z_1}{z} \right)^n$$

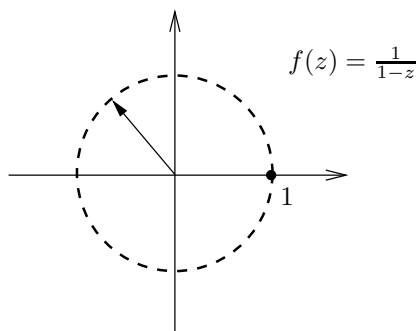
Beispiel 2.9 $f(z) = \frac{1}{1-z}$ $G = \mathbb{C} \setminus \{1\}$

$z_0 = 0$ $f(z) = \sum_{n \geq 0} z^n$ $R = 1$

Zusatz: $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot (z - z_0)^n$

$$\implies \boxed{a_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \cdot dz}$$

Polstelle:



Abbildungung 2.13: Der Konvergenzradius bei 1 als Stelle der Unbeschränktheit (Beispiel: 2.9)

$$\frac{1}{z} \implies 0 \dots \text{Polstelle}$$

$$\dots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1 \cdot (z-z_0) + a_2 \cdot (z-z_0)^2 + \dots$$

$$z_0 \dots \text{Polstelle}, \quad a_{-1} \dots \text{Residuum}$$

Bemerkung: $f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} \cdot dz$

Satz 2.9 $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot (z-z_0)^n \quad \{z \mid |z-z_0| < R\} \subseteq G$

$$M_R = \max_{|z-z_0| \leq R} |f(z)| \implies |a_n| \leq \frac{M_R}{R^n}$$

Beweis:

$$\gamma = \{z \mid |z-z_0| < R\} \quad z = z_0 + R e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \cdot dz = \frac{1}{R^n} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{f(z_0 + R \cdot e^{it})}_{|\dots| = M_R} \cdot e^{i \cdot n \cdot t} \cdot dt$$

$$\frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{R} \cdot e^{-it} \quad dz = i \cdot R \cdot e^{it} \cdot dt \quad \implies |a_n| \leq \frac{1}{R^n} \cdot M_R$$

Satz 2.10 $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, f beschränkt $\implies f$ konstant

Beweis:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot z^n \quad \implies |a_n| \leq \frac{M}{R^n} \quad \implies a_n = 0, \quad (n \geq 1)$$

$$M = \sup |f(z)| \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\implies f(z) = a_0 \text{ konstant}$$

Satz 2.11 $f(z) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot z^k$ Polynom vom Grad $n \geq 1$

$$\implies \exists z_0 \in \mathbb{C} : f(z_0) = 0 \quad (\text{Fundamentalsatz der Algebra})$$

Beweis:

Annahme: $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad g(z) = \frac{1}{f(z)} : \quad \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar

$g(z) = \frac{1}{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n}$ beschränkt $\lim_{|z| \rightarrow z_0} \dots$

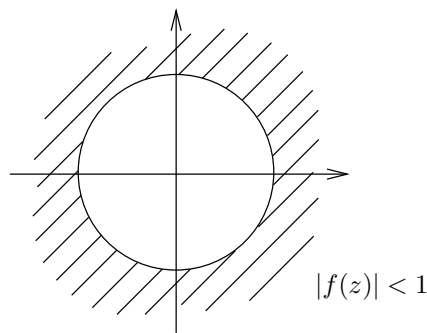


Abbildung 2.14: Kehrwert einer Funktion < 1 ist immer größer 1

$\implies g(z)$ konstant $\implies f(z)$ konstant \implies Widerspruch (Polynom von Grad $n \geq 1$)

Satz 2.12

$f_n : G \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar

$f_n \rightarrow f$ gleichmäßig in abgeschlossenen beschränkten Teilmengen von G

$f_n : G \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar

Beweis:

$$f_n(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_n(z)}{z-z_0} \cdot dz \implies f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} \cdot dz \implies$$

$\implies f$ komplex differenzierbar (Grenzfunktion) (f_n gleichmäßig konvergent)

$$\forall z \in \gamma : |f_n(z) - f(z)| < \epsilon \implies \left| \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} \cdot dz - \int_{\gamma} \frac{f_n(z)}{z-z_0} \cdot dz \right| < \epsilon \cdot \underbrace{\int_{\gamma} \frac{dz}{|z-z_0|}}_C$$

Folgerung:

$f(z, t)$ stetig $z \in G, t \in [0, 1] \quad z \rightarrow f(z, t)$ komplex differenzierbar

$\implies f(z) := \int_0^1 f(z, t) \cdot dt \dots$ komplex differenzierbar

Beweis:

$$\int_0^1 \underbrace{f(z, t)}_{F(z)} \cdot dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} F\left(z, \frac{k}{n}\right)}_{F_n(z)}$$

$F(z, t)$ gleichmäßig stetig $\implies F_n \rightarrow F$ gleichmäßig in abgeschlossener, beschränkter Teilmenge

oder

$$f(z_0, t) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma} \frac{f(z, t)}{z-z_0} \cdot dz \quad \left| \int_0^1 \right.$$

$$\implies F(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} \cdot dz$$

Gammafunktion: $\Gamma(s)$ (ist dort komplex differenzierbar)

$$\Gamma(s) := \int_0^{\infty} x^{s-1} \cdot e^{-x} \cdot dx, \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > 0$$

$$= \int_0^1 x^{s-1} \cdot e^{-x} \cdot dx + \int_1^{\infty} x^{s-1} \cdot e^{-x} \cdot dx$$

$$|x^s| = |e^{\ln x \cdot (\sigma - i \cdot \tau)}| = e^{\sigma \cdot \ln x} \cdot \underbrace{|e^{i \cdot \tau \cdot \ln x}|}_{=1} = x^{\sigma} = x^{\operatorname{Re}(s)}$$

$$s = \sigma + i \cdot \tau \quad \sigma > 0$$

$$\int_0^1 x^{\sigma-1} \cdot e^{-x} \cdot dx \leq \int_0^1 x^{\sigma-1} \cdot dx = \frac{1}{\sigma}$$

$$\int_1^T x^{\sigma-1} \cdot e^{-x} \cdot dx = \int_1^T \frac{1}{x} \cdot e^{-x+\sigma \cdot \ln x} \cdot dx \leq c + \int_{x_0}^T e^{-\frac{x}{2}} \cdot dx$$

$$-x + \sigma \ln x \leq \frac{x}{2}$$

$s \rightarrow x^s = e^{s \cdot \ln x}$ komplex differenzierbar, auch gleichmäßig für $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$

$\implies s \rightarrow x^s = \int_{\epsilon}^T x^{s-1} \cdot e^{-x} \cdot dx$ komplex differenzierbar, auch gleichmäßig für $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$

$\implies s \rightarrow \Gamma(s) = \int_{\epsilon}^T x^{s-1} \cdot e^{-x} \cdot dx$ komplex differenzierbar, auch gleichmäßig für $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$

$$s \cdot \Gamma(s) = \Gamma(s+1) \quad \operatorname{Re}(s) > 0 \quad \Gamma(n+1) = n!$$

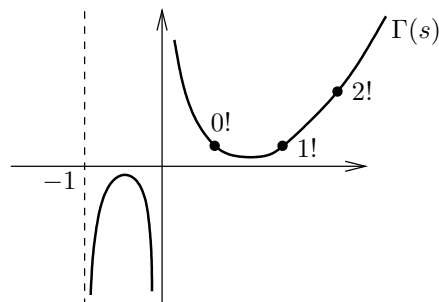


Abbildung 2.15: Mit der Gammafunktion $\Gamma(s)$ kann man die Faktorielle einer Zahl berechnen

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s} \quad -1 < \operatorname{Re}(s) \leq 0, \quad s \neq 0 \quad (\text{Abbildung 2.15})$$

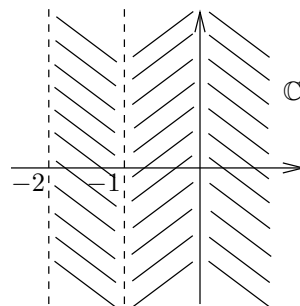


Abbildung 2.16: Im Negativen bewegt sich $\Gamma(s)$ immer zwischen ganzzahligen Werten

$$\operatorname{Re}(s) > 0 \quad -2 < \operatorname{Re}(s) \leq -1, \quad s \neq -1 \quad (\text{Abbildung 2.16})$$

$$\Gamma: \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\text{überall } s \cdot \Gamma(s) = \Gamma(s+1)$$

Beispiel 2.10

$$\binom{\alpha}{\beta} := \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1) \cdot \Gamma(\alpha-\beta+1)}$$

$$\binom{\alpha}{\beta} := \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\underbrace{\Gamma(\beta+1) \cdot \Gamma(\alpha-\beta+1)}_{\alpha \cdot (\alpha+1) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}} \cdot \frac{1}{k!}$$

Satz 2.13 (Eindeutigkeitssatz)

$$f: G \rightarrow \mathbb{C}$$

$$g: G \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{komplex differenzierbar}$$

$$g(z) = f(z), \quad z \in Z \subseteq G \quad \Longrightarrow \quad \boxed{f = g}$$

Beispiel 2.11

$$G = \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$$

$$Z = \{z \mid \operatorname{Re}(z) > 0\} \quad Z = \mathbb{R}^+$$

Beweis:

$$Z_0 \in HP(Z) \quad \Longrightarrow \quad f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0) \quad \Longrightarrow \quad f(z) = g(z) \quad |z - z_0| < R$$

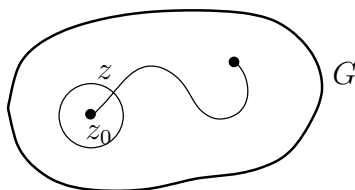


Abbildung 2.17: Wie lange sind die Kurven gleich?

Beispiel 2.12

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\Longrightarrow \sin^2 z + \cos^2 z = 1 \quad (z \in \mathbb{C})$$

$\sin^2 x$ analytisch (nur auf eine Art) fortsetzbar

Nullstellen und Polstellen:

Satz 2.14

$f : G \rightarrow \mathbb{C} \dots$ komplex differenzierbar, $f(z_0) = 0$

$z_0 \in G \dots$ Gebiet $f(z_0) = 0$

$$\implies \underbrace{\exists N}_{\in \mathbb{N}} = \min\{j \geq 0 \mid f^{(j)}(z_0) \neq 0\} \geq 1$$

$\implies \exists h : G \rightarrow \mathbb{C} \dots$ komplex differenzierbar $h(z_0) \neq 0$

$$\implies \boxed{f(z) = (z - z_0)^N \cdot h(z)}$$

$N \dots$ Nullstellenordnung von f an der Stelle z_0

Beweis:

$$f(z) = a_0 + a_1 \cdot (z - z_0) + a_2 \cdot (z - z_0)^2 + \dots + a_N \cdot (z - z_0)^N + S_{N+1} \cdot (z - z_0)^{N+1}$$

$$|z - z_0| < R$$

$$a_0 = f(z_0) = 0 \quad a_1 = [f'(z_0)] = 0 \quad a_{N-1} = 0$$

$$a_N \neq 0 = (z - z_0)^N \cdot \underbrace{[a_N + a_{N+1} \cdot (z - z_0) + \dots]}_{h(z)} \quad h(z_0) = a_N \neq 0$$

$$f(z_0) = 0, \quad f'(z_0) = 0, \quad \dots, \quad f^{(N+1)}(z_0) = 0$$

$$\boxed{f^{(N)}(z_0) \neq 0}$$

$$N = \min\{j \geq 0 \mid f^{(j)}(z_0) \neq 0\} \quad (\text{Nullstellenordnung})$$

Beispiel 2.13 $f(z) = \frac{1}{1-z}$ $G = \mathbb{C} \setminus \{1\}$

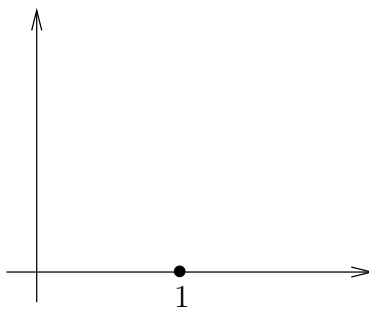


Abbildung 2.18: 1 ist islierte Singularität von $f(z) = \frac{1}{1-z}$

Definition 2.2 $G \dots$ Gebiet

z_0 isolierte Singularität von f , wenn $f : G \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar

Definition 2.3

$z_0 \dots$ Polstelle von $f : G \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C} : \iff \underbrace{\exists N \geq 1}_{\in \mathbb{N}} : f(z) \cdot (z - z_0)^N$

ist auf G analytisch fortsetzbar

$$\exists h(z) : G \rightarrow \mathbb{C}, \quad h(z) = f(z) \cdot (z - z_0)^N \text{ f\"ur } z \in G \setminus \{z_0\}$$

Polstelle:

$f : G \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C} \quad z_0 \in G \dots$ isolierte Singularität

$\exists N \geq 1, \quad \exists h : G \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar $h(z_0) \neq 0$

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^N} \quad N \dots \text{Polstellenordnung} \quad (z \in G \setminus \{z_0\})$$

Beispiel 2.14 $f(z) = \frac{1}{z} \quad z_0 = 0 \quad$ Polstelle erster Ordnung

Beispiel 2.15 $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ rationale Funktion $g(z_0) = 0 \dots$ Polstelle

Beispiel 2.16 $f(z) = e^{\frac{1}{z}} : \mathbb{B} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$

$z_0 = \dots$ isolierte Singularität $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2 \cdot z^2} + \frac{1}{6 \cdot z^3} + \dots$

keine Polstelle: $\forall N \geq 1 : e^{\frac{1}{z}} : z^N$ ist nicht komplex differenzierbar an $z_0 = 0$

Laurentreihe:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n = \dots + \frac{a_{-3}}{(z - z_0)^3} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1 \cdot (z - z_0) + a_2 \cdot (z - z_0)^2 + \dots$$

Satz 2.15 $f : G \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C} \quad$ komplex differenzierbar

$z_0 \in G \dots$ isolierte Singularität

$$\implies f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n \quad a_n = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \cdot dz$$

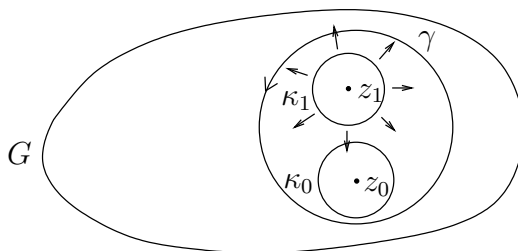


Abbildung 2.19: Die zwei Kreise sind kozentrisch

(ohne Beschränkung der Allgemeinheit $z_0 = 0$)

$$\begin{aligned}
f(z_1) &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \int_{\kappa} \frac{f(z)}{(z-z_1)} \cdot dz = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_1)} \cdot dz - \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \int_{\kappa_0} \frac{f(z)}{(z-z_1)} \cdot dz = \\
&= \sum_{n \geq 0} \underbrace{\left(\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z_{n+1}} \cdot dz \right)}_{\text{Potenzreihenanteil}} \cdot z_1^n + \sum_{n \geq 0} \underbrace{\left(\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \int_{\kappa_0 \text{ bzw. } \gamma} f(z) \cdot z_n \cdot dz \right)}_{\text{Laurentreihenanteil}} \cdot \frac{1}{z_1^{n+1}}
\end{aligned}$$

$$z \in \gamma = \frac{1}{z-z_1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{z_1}{z}} = \sum_{n \geq 0} \frac{z_1^n}{z^{n+1}}$$

$$z \in \kappa_0 \implies |z| < |z_1| \implies \frac{1}{z-z_1} = \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{z_1}} = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{z_1^{n+1}}$$

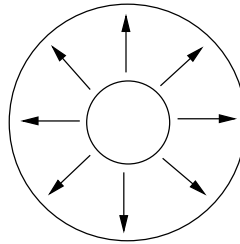


Abbildung 2.20: Die Kurve ändert sich, das zugehörige Integral aber nicht

Satz 2.16 $z_0 \dots$ isolierte Singularität $(f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot (z-z_0)^n)$

$\implies z_0 \dots$ Polstelle oder z_0 wesentliche Singularität $\exists \infty$ viele $n \geq 0, a_n \neq 0$

Beispiel 2.17 $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$

$$f(z) = \frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1 \cdot (z-z_0) + \dots$$

Beispiel 2.18 $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ rationale Funktion

Bemerkung:

$$a_{-1} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \int_{\gamma} f(z) \cdot dz$$

(=0 wenn geschlossene Kurve und zusammenhängend)

Definition 2.4

z_0 isolierte Singularität von $f : G \setminus \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot (z-z_0)^n \implies$

$\implies a_{-1} := \text{Res}(f(z), z = z_0) \dots$ Residuum

Bemerkung:

$$z_0 \dots \text{Polstelle, } f(z) = \frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1 \cdot (z-z_0) + \dots$$

$$f(z) \cdot (z-z_0)^N = a_{-N} + \dots + a_{-N+1} \cdot (z-z_0) + \dots + a_{-1} \cdot (z-z_0)^{N-1} + a_0 \cdot (z-z_0)^N + \dots$$

(jetzt Potenzreihe - Polstelle * Polynom)

$$\implies \operatorname{Res}(f(z), z = z_0) = a_{-1} = \frac{1}{(N-1)!} \cdot \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} (f(z) \cdot (z - z_0)^N) \Big|_{z=z_0}$$

Speziell: $N = 1$

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \cdot (z - z_0)]$$

Beispiel 2.19 $\operatorname{Res}(f(s), s = -n) = \frac{(-1)^N}{n!}$ **UE**

Satz 2.17 (Residuensatz)

$z_1, z_2, \dots, z_r \dots$ isolierte Singularitäten in einem beschränktem, zusammenhängenden Gebiet G (von einer Funktion f)

$\gamma \dots$ Randkurve von G

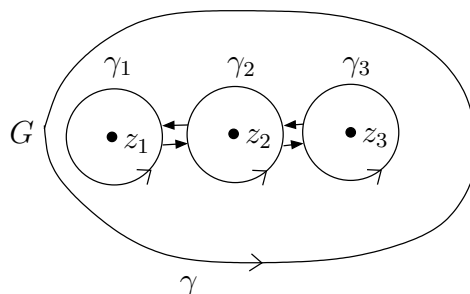


Abbildung 2.21: Inneren Kurven sind monotop zur Randkurve

$$\implies \int_{\gamma} f(z) \cdot dz = 2 \cdot \pi \cdot i \cdot \sum_{i=0}^r \operatorname{Res}(f(z), z = z_i)$$

Lemma:

1. $z_0 \dots N$ -fache Nullstelle $\implies \frac{f'(z)}{f(z)}$ einfache Polstelle an $z = z_0$, $\operatorname{Res} \left(\frac{f'(z)}{f(z)}, z = z_0 \right) = N$
2. $z_0 \dots N$ -fache Polstelle $\implies \frac{f'(z)}{f(z)}$ einfache Polstelle an $z = z_0$, $\operatorname{Res} \left(\frac{f'(z)}{f(z)}, z = z_0 \right) = P$

Satz 2.18

$$\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} \cdot dz = \tilde{N} - \tilde{P}$$

$\tilde{N} = \sum$ Summe der Nullstellenordnungen

$\tilde{P} = \sum$ Summe der Polstellenordnungen

Partialbruchzerlegung:

$$f(z) = \frac{z^2+2}{z^2 \cdot (z-3)} = \frac{A}{z^2} + \frac{B}{z} + f_1(z) \implies f(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z-3}$$

(Zählergrad kleiner als Nennergrad)

$f_1(z) \dots$ rationale Funktion (hier 0 keine Singularität)

Polstellen: $\{0, 3\}$

$$f_1(z) = \frac{C}{z-3} + f_2(z) \quad \implies \quad f_2(z) = 0$$

(rationale Funktion, Zählergrad < Nennergrad, Polstellen \emptyset)

Nichtisolierte Singularitäten:

Beispiel 2.20 $f(z) = \prod_{n \geq 1} \frac{1}{1-z^n} \quad |z| < 1 \quad \boxed{UE}$

Logarithmen \implies Summe von Logarithmen

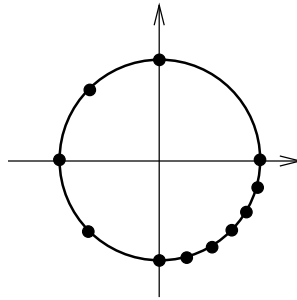


Abbildung 2.22: Bei der n-ten Einheitswurzel liegt eine Singularität

$$\frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z^2} \cdot \frac{1}{1-z^3} \cdot \frac{1}{1-z^4} \cdot \dots \cdot \frac{1}{1-z^n}$$

(bei der n-ten Einheitswurzel Singularität (Siehe auch Abbildung 2.22))

Algebraische Singularitäten:

Beispiel 2.21 $f(z) = \sqrt{z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_- \cup \{0\})$

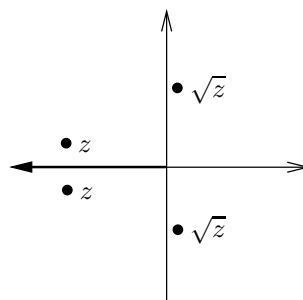


Abbildung 2.23: Bei $f(z) = \sqrt{z}$ muß die ganze linke Halbgerade weggenommen werden

$$-\pi < \arg(z) < (\leq) \pi$$

$$g(z) = 1 - \sqrt{1-z} = \sum a_n \cdot z^n \quad |z| < 1 = R$$

Logarithmische Singularität:

$$\log z = \ln |z| + i \cdot \varphi \quad z = |z| \cdot e^{i\varphi}$$

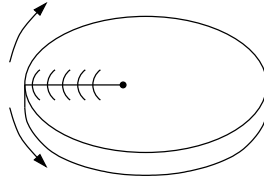


Abbildung 2.24: Graphische Darstellung einer Riemann'schen Fläche

$$\varphi = \arg(z), \quad -\pi \arg(z) < \pi \text{ oder } -3\pi < \arg(z) \leq -\pi$$

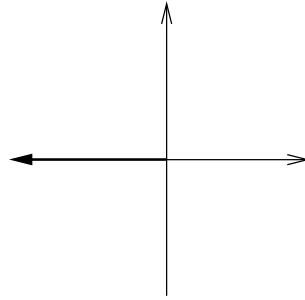


Abbildung 2.25: Reduktion des Definitionsbereich um $|z| < 1$

Beispiel 2.22 $g(z) = \log \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1$

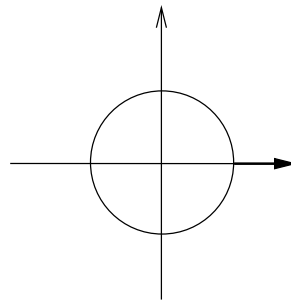


Abbildung 2.26: Reduktion des Definitionsbereich um $|z| > R$

$$\sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2} \cdot \log z}$$

2.3 Laplace - Transformation:

Definition 2.5 $f(t), \quad t \geq 0$

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) := \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt \text{ für alle } s \in \mathbb{C}, \text{ für die } F(s) \text{ existiert}$$

Lemma:

$$\exists \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{s \cdot t}, \quad \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(s_0) \implies \exists \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-s \cdot t}$$

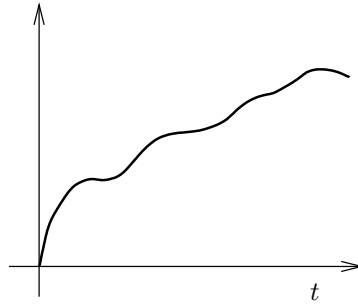


Abbildung 2.27: Abbildung eines Signals $f(t)$

$|e^{-s \cdot t}| = e^{-\operatorname{Re}(s) \cdot t}$ und ist komplex differenzierbar

Beweis:

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt &= \int_0^T \underbrace{f(t)}_{f'} \cdot e^{-s_0 \cdot t} \cdot \underbrace{e^{-(s-s_0) \cdot t}}_g \cdot dt = \\ &= \underbrace{\int_0^T f(t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt}_{=O(1)} \cdot \underbrace{e^{-(s-s_0) \cdot T}}_{\rightarrow 0} + (s-s_0) \cdot \underbrace{\int_0^T \int_0^t f(u) \cdot e^{-s_0 \cdot u} \cdot du}_{=O(1)} \cdot \underbrace{e^{-(s-s_0) \cdot T}}_{\text{exponentiell } \rightarrow 0} \cdot dt \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\exists \lim_{T \rightarrow \infty}} \end{aligned}$$

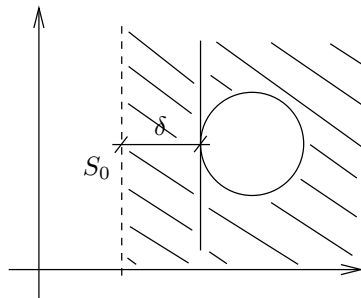


Abbildung 2.28: Integral konvergiert immer in Halbebene

$$|e^{-(s-s_0) \cdot t}| \leq e^{-\delta \cdot t}$$

Definition 2.6

$\delta_c := \inf \{ \operatorname{Re}(s) \mid \exists \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt \} \dots$ Konvergenzabszisse

- $\operatorname{Re}(s) > \delta_c : \quad \exists F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt$
- $\operatorname{Re}(s) < \delta_c : \quad \nexists F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt$
- $\operatorname{Re}(s) = \delta_c : \quad$ keine allgemeine Aussage

Beispiel 2.23 $f(t) = e^{a \cdot t}, \quad t \geq 0, \quad a \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$

$$F(s) = \mathcal{L}(e^{a \cdot t}) = \int_0^\infty e^{a \cdot t} \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt = \int_0^\infty e^{-(s-a) \cdot t} \cdot dt = -\frac{1}{s-a} \cdot e^{-(s-a) \cdot t} \Big|_0^\infty = 0 + \frac{1}{s-a} e^0 = \frac{1}{s-a}$$

$$\boxed{Re(s) > Re(a)} = \delta_c \quad (\text{Konvergenzabszisse})$$

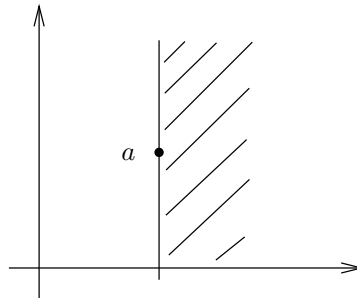


Abbildung 2.29: Für die Laplace-Transformation existiert eine Konvergenzabszisse

Beispiel 2.24 $f(t) = e^{t^2}, \quad t \geq 0 \implies \delta_c = \infty$

Lemma:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt, \quad Re(s) > \delta_c$$

$$F'(s) = - \int_0^\infty t \cdot f(t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt, \quad Re(s) > \delta_c$$

$$\boxed{\frac{d}{ds} \mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(-t \cdot f(t))}$$

Beispiel 2.25

$$\boxed{\mathcal{L}(t^k \cdot e^{a \cdot t}) = (-1)^K \cdot \frac{d^K}{ds^K} \left(\frac{1}{s-a} \right) = \frac{K!}{(s-a)^{K+1}}}$$

Satz 2.19

$$\mathcal{L} \left(\sum_{i=1}^r p_i(t) \cdot e^{a_i \cdot t} \right) = \text{genau die rationale Funktion in } s, \text{ mit Zählergrad} < \text{Nennergrad}$$

$p_i(t) \dots$ Polynome $a_i \dots$ Polstellen

(Grad von $p_i(t)$)+1 = Polstellenordnung von a_i

Bemerkung:

$f(t) = \sum p_i(t) \cdot e^{a_i \cdot t} \dots$ sind genau die Lösungen von homogenen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Satz 2.20

1. $\mathcal{L}(\lambda \cdot f(t) + \mu \cdot g(t)) = \lambda \cdot \mathcal{L}(f(t)) + \mu \cdot \mathcal{L}(g(t))$
2. $\mathcal{L}(f'(t)) = s \cdot \mathcal{L}(f(t)) - f(0+), \quad f(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$
 $\mathcal{L}(f^{(k)}(t)) = s^k \cdot \mathcal{L}(f(t)) - s^{k-1} \cdot f(0+) - s^{k-2} \cdot f'(0+) - \dots - f^{(k-1)}(0+)$
3. $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u) \cdot du\right) = \frac{1}{s} \cdot \mathcal{L}(f(t))$

Beweis:

1. \checkmark
2. $\mathcal{L}(f'(t)) = \int_0^\infty f'(t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt = f(t) \cdot e^{-s \cdot t} \Big|_0^\infty + s \cdot \int_0^\infty f(t) e^{-s \cdot t} \cdot dt = -f(0+) + s \cdot \mathcal{L}(f(t))$
3. folgt aus (2)

Beispiel 2.26

$$f'(t) = f(t), \quad t \geq 0, \quad f(0) = 1, \quad F(s) = \mathcal{L}(f(t))$$

$$f' = f \xrightarrow{\mathcal{L}} \underbrace{\mathcal{L}(f')}_{s \cdot \mathcal{L} - f(0)} = \mathcal{L}(f)$$

$$\boxed{s \cdot F(s) - 1 = F(s)} \quad \implies F(s) = \frac{1}{s-1} \quad \xrightarrow{a=1} \quad f(t) = e^t$$

$$f^{(k)} + c_1 \cdot f^{(k-1)} + \dots + c_k \cdot f = 0 \quad \xrightarrow{\mathcal{L}}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} s^k \cdot F(s) - \text{Polynom}_{k-1}(s) + c_1 \cdot (s^{k-1} \cdot F(s) - \text{Polynom}_{k-2}(s)) + \dots + c_k \cdot F(s) = 0$$

$$\implies (s^k + c_1 \cdot s^{(k+1)} + \dots + c_k) \cdot F(s) = q(s) \dots \text{Polynom vom Grad} \leq k+1$$

$$= F(s) = \frac{f(s)}{\underbrace{s^k + c_1 \cdot s^{(k+1)} + \dots + c_k}_{\text{charakteristisches Polynom}}} = \text{Partialbruchzerlegung}$$

$$\implies f(t) = \sum p_i(t) \cdot e^{a_i \cdot t}$$

Satz 2.21 $f(t) \dots$ stetig, $F(s) = \mathcal{L}(f(t)), \quad \delta_c \dots$ Konvergenzabszisse

$$\implies f(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{c-i \cdot T}^{c+i \cdot T} F(s) \cdot e^{s \cdot t} \cdot ds \quad (c > \delta_c)$$

Beispiel 2.27 $F(s) = \frac{1}{s-a} \quad (f(t) = e^{a \cdot t})$

$$\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \int_\gamma \frac{1}{s-a} \cdot e^{s \cdot t} \cdot ds = \text{Res} \left(\frac{1}{s-a} \cdot e^{s \cdot t}, a \right) = e^{a \cdot t}$$

$$\int_{\gamma_{2,3,4}} \frac{1}{s-a} \cdot e^{-s \cdot t} \cdot ds \longrightarrow 0 \text{ f\u00fcr } s, t \rightarrow \infty \quad e^{-s \cdot t} \dots \text{beschr\u00e4nkt durch } e^{c \cdot t}$$

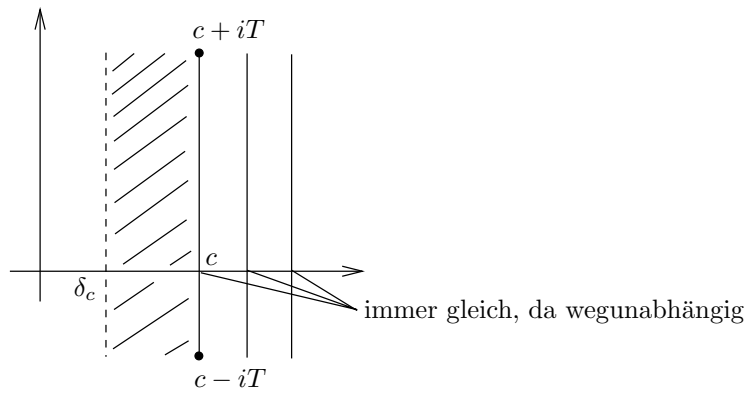


Abbildung 2.30: Laplace-Transformation ist wegunabhängig

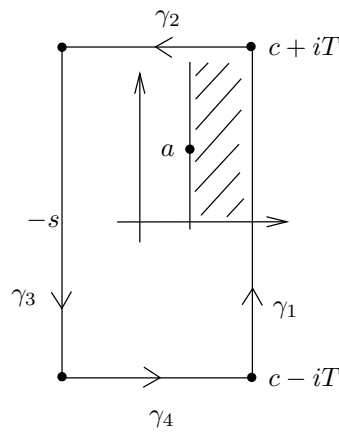


Abbildung 2.31: Laplace-Transformation entspricht dem Residuum

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}(f(t))$
$-t \cdot f(t)$	$F'(s)$
$f'(t)$	$s \cdot F(s) - f(0+)$
$\int_0^t f(\tau) \cdot d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
$f(t) \cdot e^{a \cdot t}$	$F(s - a)$ (Verschiebung)
$f(t - a)$ ($a > 0, t \geq a$)	$e^{-a \cdot s} \cdot F(s)$
$f(a \cdot t)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$ (Skalierung)
$h(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau$	$H(s) = F(s) \cdot G(s)$ (Faltung)

Beispiel 2.28 Berechnung der Übertragungsfunktion einer elektrischen Schaltung:

Widerstand:

$$u_R = R \cdot i_R \xrightarrow{\mathcal{L}} U_R = R \cdot I_R \quad (\text{Siehe dazu auch Abbildung 2.34})$$

Spule:

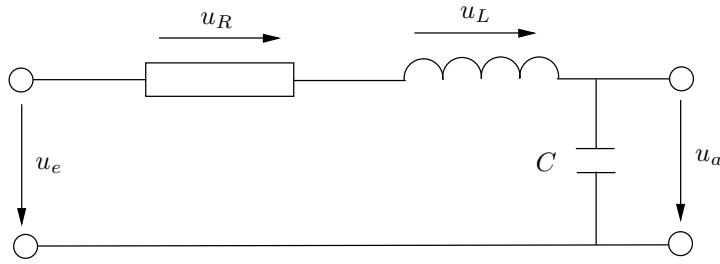


Abbildung 2.32: Einfaches Beispiel eines Netzwerkes

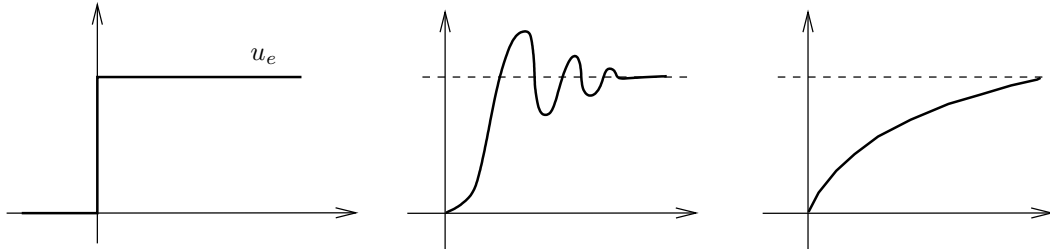


Abbildung 2.33: Überspringen und Kriechfall als Einschwingvorgang

$$u_L = L \cdot \frac{d}{dt} i_L \xrightarrow{\mathcal{L}} U_L = s \cdot L \cdot I_L, \quad i_L(0+) = 0 \quad (\text{Siehe dazu auch Abbildung 2.35})$$

Kondensator:

$$u_C = C \cdot \frac{d}{dt} u_C \xrightarrow{\mathcal{L}} U_C = s \cdot C \cdot U_C \quad (\text{Siehe dazu auch Abbildung 2.36})$$

Anwendung der Kirchhoff'schen Maschenregel:

$$u_e = U_R + U_L + U_a \quad u_a = u_c \implies i = C \cdot \frac{d}{dt} u_a, \quad I = s \cdot C \cdot U_a$$

$$u_e = R \cdot i + L \cdot \frac{d}{dt} i + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i \cdot dt \xrightarrow{\mathcal{L}} R \cdot I + s \cdot L \cdot I + \frac{1}{s \cdot C} \cdot I = (R + s \cdot L + \frac{1}{s \cdot C}) \cdot I =$$

$$= s \cdot C \cdot (R + s \cdot L + \frac{1}{s \cdot C}) \cdot U_a = (1 + s \cdot R \cdot C + s^2 \cdot L \cdot C \cdot U_a)$$

$$\boxed{U_a = \frac{1}{1 + s \cdot R \cdot C + s^2 \cdot L \cdot C} \cdot U_e} \quad \frac{1}{1 + s \cdot R \cdot C + s^2 \cdot L \cdot C} \quad \dots \quad \text{Übertragungsfunktion}$$

Beispiel 2.29 $u(t) = 1 \quad (t \geq 0) \xrightarrow{\mathcal{L}} u_e = \frac{1}{s}$

$$\implies U_a = \frac{1}{s \cdot (1 + s \cdot R \cdot C + s^2 \cdot L \cdot C)} = \frac{1}{s} + \frac{A}{s - s_1} + \frac{B}{s - s_2}$$

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{R}{L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4 \cdot L^2} - \frac{1}{L \cdot C}} \quad \text{Re}(s_{1,2}) < 0 \text{ oder } s_1, s_2 < 0$$

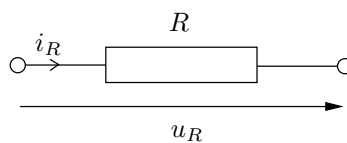


Abbildung 2.34: Schaltbild eines Widerstandes

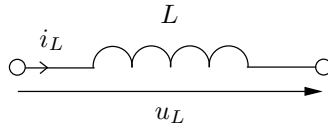


Abbildung 2.35: Schaltbild einer Spule

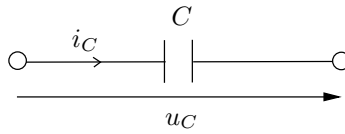


Abbildung 2.36: Schaltbild eines Kondensators

$$\implies u_a(t) = 1 + A \cdot e^{s_1 \cdot t} + B \cdot e^{s_2 \cdot t}$$

(Die letzten 2 Terme klingen ab gegen 0 \rightarrow Einschürungen um 1)

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{1+s \cdot R \cdot C + s^2 \cdot L \cdot C} = G(s) \dots \text{Übertragungsfunktion}$$

(Wenn für alle Nullstellen des Nenners der Realteil $< 0 \implies$ System stabil)

Re(s) ... beschreibt Abklingverhalten

Im(s) ... Schwingung

Spannungsteiler:

$$i \cdot \omega = s \quad \frac{U_a}{U_e} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{s \cdot R \cdot C + s^2 \cdot L \cdot C + 1} = G(s)$$

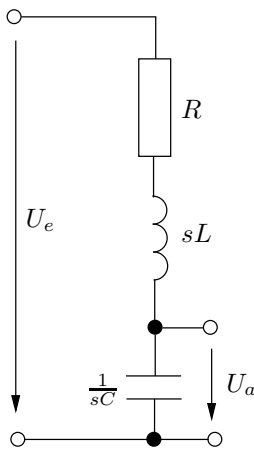


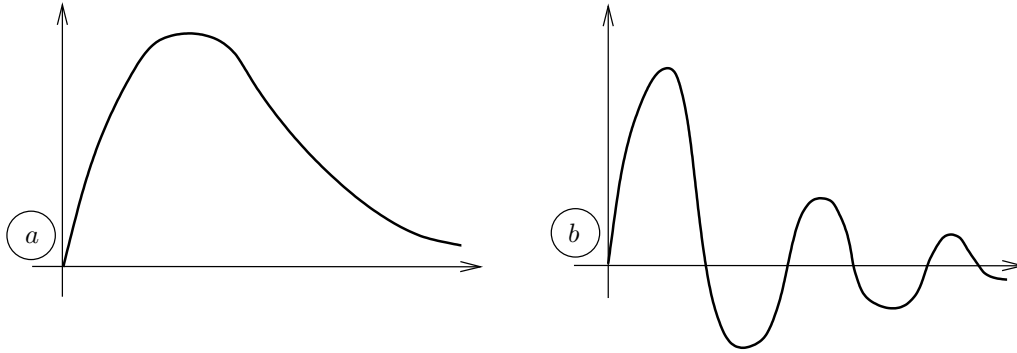
Abbildung 2.37: Schaltbild eines Spannungsteilers

Stoßantwort:

“Diracfunktion”: $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t) \cdot dt = f(0) \dots$ Abtasteigenschaft

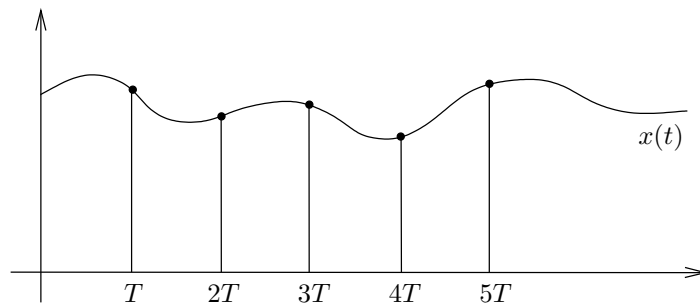
$$\mathcal{L}(\delta(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt = 1$$

$$U_e = \delta(t) \implies U_a = G(s) \quad U_a = A' \cdot e^{s_1 \cdot t} + B' \cdot e^{s_2 \cdot t} \rightarrow 0$$



Abbildungung 2.38: Abbildungen von Stoßantworten

2.4 Z - Transformation:



Abbildungung 2.39: Die Z-Transformation ist diskretes Analogon zur Laplace - Transformation

$x^*(t) := \sum_{k=0}^{\infty} x(k \cdot T) \cdot \delta(t - k \cdot T)$... codierte Folge von Funktionswerten

$$\mathcal{L}(\delta(t - k \cdot T)) = e^{-s \cdot k \cdot T} \implies \mathcal{L}(x^*(t)) = \sum_{k \geq 0} x(k \cdot T) \cdot e^{-s \cdot k \cdot T}$$

$$\implies \boxed{e^{s \cdot T} = z} \implies$$

$$= \sum_{k \geq 0} x(k \cdot T) \cdot z^{-k} = x(0) + x(T) \cdot \frac{1}{z} + \dots$$

Definition 2.7 $x(t)$, $T \dots$ Taktzeit, $t \geq 0$

Z-transformierte $Z(x(t)) = x(z) := \sum_{k=0}^{\infty} x(k \cdot T) \cdot z^{-k}$

(Diskretes Analogon zur \mathcal{L} -Transformation)

Inverse Z-transformation:

$$x(k \cdot T) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \int_{\gamma} x(z) \cdot z^{k-1} \cdot dz$$

2.5 Fouriertransformation:

Definition 2.8

$$f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \exists \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \cdot dt$$

Fouriertransformierte: $\mathcal{F}(f(t)) = \widehat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \quad (\omega \in \mathbb{R})$

Bemerkung:

$$f(t) = 0 \text{ für } t < 0 \implies \widehat{f}(\omega) = \mathcal{F}(1\omega)$$

* **Eigenschaften:**

$$1. \mathcal{F}(f'(t)) = i \cdot \omega \cdot \widehat{f}(\omega)$$

$$2. (f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot dt \implies \widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g} \dots \text{Faltung}$$

Beispiel 2.30 $f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$... Dichte der Normalverteilung

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2} - i \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = e^{-\frac{\omega^2}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \cdot (t^2 + 2 \cdot i \cdot \omega \cdot t + (i \cdot \omega)^2)} \cdot dt = e^{-\frac{\omega^2}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \cdot (t + i \cdot \omega)^2} \cdot dt$$

$$u = t + i \cdot \omega = e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot \int_{-\infty + i \cdot \omega}^{\infty + i \cdot \omega} e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot du = e^{-\frac{\omega^2}{2}} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot du}_{\sqrt{2 \cdot \pi}} = \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

Inverse Fouriertransformation:

Satz 2.22 $f(t)$ stetig, $\exists \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \cdot dt$, $\exists \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)| \cdot d\omega$

$$\implies f(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \cdot d\omega}_* = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \widehat{\widehat{f}} \quad * \text{wieder Fouriertransformierte}$$

Begründung (kein Beweis):

$$\widehat{f}(\omega) = L(i \cdot \omega) \implies f(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \int_{c - i \cdot \infty}^{c + i \cdot \infty} F(s) \cdot e^{s \cdot t} \cdot ds$$

$$\|s = i \cdot \omega\| = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{F(i \cdot \omega)}_{f(\omega)} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \cdot d\omega$$

Bemerkung:

$$e^{i \cdot \omega \cdot t} = \cos(\omega \cdot t) + i \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} b(\omega) \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot d\omega$$

(Überlagerung von cos- und sin-Schwingungen)

$$a(\omega) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot dt \quad b(\omega) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot dt$$

Fourierreihen:

leben nur in einem Intervall

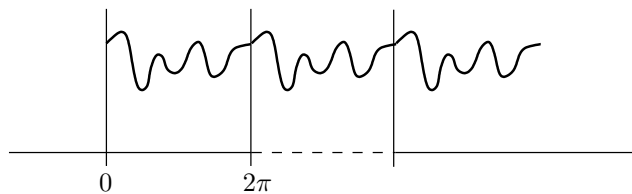


Abbildung 2.40: Abbildung einer 2π -periodischen Reihe

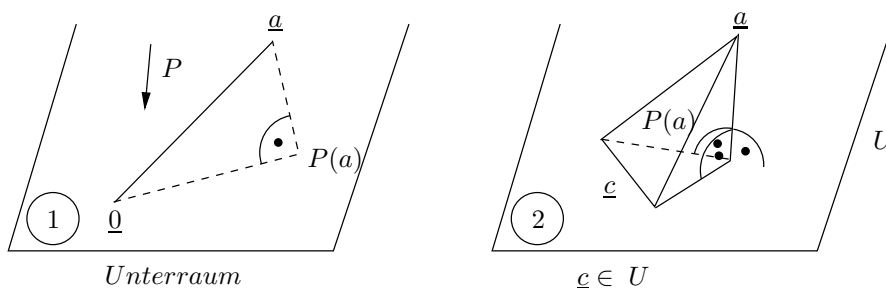


Abbildung 2.41: Orthogonalprojektion (Bestapproximation)

$$\|\underline{c} - \underline{a}\|^2 = \underbrace{\|c - p(a)\|^2}_{\geq 0} + \|a - p(a)\|^2 \implies \|\underline{a} - p(\underline{a})\| = \min_{c \in U} \|a - c\|$$

Bemerkung:

Skalarprodukt: $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle \in \mathbb{R} \quad \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \langle \underline{b}, \underline{a} \rangle$

$\langle \lambda \cdot \underline{a}_1 + \mu \cdot \underline{a}_2, \underline{b} \rangle = \lambda \cdot \langle \underline{a}_1, \underline{b} \rangle + \mu \cdot \langle \underline{a}_2, \underline{b} \rangle$ [Linearität]

$\langle \underline{a}, \underline{a} \rangle > 0 \quad \underline{a} \neq 0$

Länge (des Vektors): $\|a\| = \sqrt{\langle \underline{a}, \underline{a} \rangle}$

Pythagoras:

$\underline{a} \perp \underline{b} \quad (\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = 0) \quad \|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$

Beweis:

$$\begin{aligned} \|a + b\|^2 &= \langle \underline{a} + \underline{b}, \underline{a} + \underline{b} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{a} + \underline{b} \rangle + \langle \underline{b}, \underline{a} + \underline{b} \rangle = \\ &= \langle \underline{a}, \underline{a} \rangle + \underbrace{\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle}_0 + \underbrace{\langle \underline{b}, \underline{a} \rangle}_0 + \langle \underline{b}, \underline{b} \rangle = \\ &= \|a\|^2 + \|b\|^2 \end{aligned}$$

Satz 2.23 $\{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ Orthogonalbasis von U

(Orthogonalbasis paarweise aufeinander orthogaonal)

$p \dots$ Orthogonalprojektion auf U

$$\implies p(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\langle \underline{a}, \underline{b}_i \rangle}{\langle \underline{b}_i, \underline{b}_i \rangle} \cdot \underline{b}_i$$

Beweis:

zu zeigen: $\langle \underline{a} - p(\underline{a}), \underline{b}_i \rangle = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$

[$\implies \langle \underline{a} - p(\underline{a}), \underline{c} \rangle = 0, \quad \underline{c} \in U, \quad \underline{c} = \sum_{i \geq 1} y_i \cdot \underline{b}_i$

[wenn es orthogonal zu allen Basisvektoren, die U aufspannen, ist, ist es auch orthogonal zu U]

$$\begin{aligned} \langle \underline{a}, \underline{b}_j \rangle - \langle p(\underline{a}), \underline{b}_j \rangle &= \langle \underline{a}, \underline{b}_j \rangle - \sum_{i=1}^n \frac{\langle \underline{a}, \underline{b}_i \rangle}{\langle \underline{b}_i, \underline{b}_i \rangle} \cdot \underbrace{\langle \underline{b}_i, \underline{b}_j \rangle}_{=0 \text{ für } i \neq j} = \\ &= \langle \underline{a}, \underline{b}_j \rangle - \frac{\langle \underline{a}, \underline{b}_j \rangle}{\langle \underline{b}_j, \underline{b}_j \rangle} \cdot \langle \underline{b}_j, \underline{b}_j \rangle = 0 \end{aligned}$$

Fourierreihen:

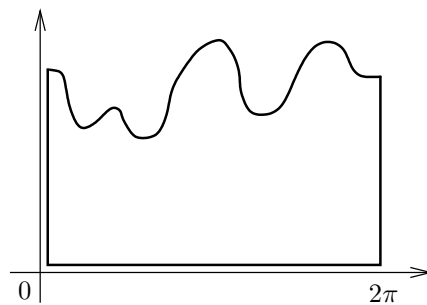


Abbildung 2.42: Abbildung einer Fourierreihe in einem Intervall

Vektoren $\dots f : [0, 2 \cdot \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar

Skalarprodukt $\dots \langle f, g \rangle = \int_0^{2 \cdot \pi} f(x) \cdot g(x) \cdot dx$

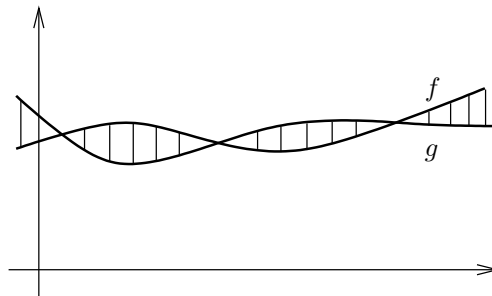


Abbildung 2.43: Abstand zwischen 2 Funktionen

$$\|f - g\| = \sqrt{\int_0^{2 \cdot \pi} (f(x) - g(x))^2} \text{ quadratisches Fehlermittel}$$

Unterraum $\dots U = \{c_0 + c_1 \cdot \cos(x) + c_2 \cdot \cos(x) + \dots + c_k \cdot \cos(k \cdot x) + c_{-1} \cdot \sin(x) + \dots + c_{-k} \cdot \sin(k \cdot x) \mid c_i \in \mathbb{R}\}$

k \dots fest $2 \cdot k + 1$ Basisfunktionen

Trigonometrische Polynome:

$$\text{z.B.: } f(x) = 5 - 2 \cdot \cos(x) + 7 \cdot \cos(3 \cdot x) - 2 \sin(2 \cdot x) \implies f(x + 2 \cdot \pi) = f(x) \quad 0 \leq x \leq 2 \cdot \pi$$

Orthogonalbasis: $\dots, 1, \cos(x), \dots, \cos(k \cdot x), \sin(x), \dots, \sin(k \cdot x)$

$$\langle 1, \cos(j \cdot x) \rangle = \int_0^{2 \cdot \pi} 1 \cdot \underbrace{\cos(j \cdot x)}_{(\sin(j \cdot x))} \cdot dx = 0$$

$$\langle \cos(j \cdot x), \sin(l \cdot x) \rangle = \int_0^{2 \cdot \pi} \cos(j \cdot x) \cdot \sin(l \cdot x) \cdot dx = 0 \quad \boxed{\text{UE}}$$

$$j \neq l \quad \langle \cos(j \cdot x), \cos(l \cdot x) \rangle = \dots$$

Problem:

Gegeben: $f(x)$, $0 \leq x \leq 2 \cdot \pi$, stetig, $k \geq 1$

Gesucht: $g(x) = c_0 + c_1 \cdot \cos(x) + \dots + c_k \cdot \cos(k \cdot x) + c_{-1} \cdot \sin(x) + \dots + c_{-k} \sin(k \cdot x)$

mit $\int_0^{2 \cdot \pi} (f(x) - g(x))^2 \cdot dx$ minimal (Siehe auch Abbildung 2.43)

Lösung:

$$c_0 = \frac{\langle f, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(x) \cdot dx \quad (\text{Skalarprojektion})$$

$$c_j = \frac{\langle f, \cos(j \cdot x) \rangle}{\langle \cos(j \cdot x), \cos(j \cdot x) \rangle} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(x) \cdot \cos(j \cdot x) \cdot dx \quad j = 1, \dots, k$$

$$c_{-j} = \frac{\langle f, \sin(j \cdot x) \rangle}{\langle \sin(j \cdot x), \sin(j \cdot x) \rangle} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(x) \cdot \sin(j \cdot x) \cdot dx \quad j = 1, \dots, k$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2 \cdot \pi} (f(x) - g(x))^2 \cdot dx &= \langle f - g, f - g \rangle && = \\ &= \langle f, f \rangle - \langle g, g \rangle && = \\ &= \langle f, f \rangle - \left(2 \cdot \pi c_0^2 + \pi \cdot \sum_{j=1}^k \left(\underbrace{c_j^2}_{a_j} + \underbrace{c_{-j}^2}_{b_j} \right) \right) \geq 0 \end{aligned}$$

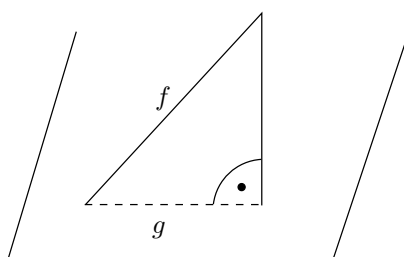


Abbildung 2.44: Skalarprojektion

$$\|g\| \geq \|f\|$$

$$\begin{aligned} \langle g, g \rangle &= \langle \sum_j c_j \underline{b}_j, \sum_l c_l \underline{b}_l \rangle && = \\ &= \sum_j \sum_l \langle c_j, c_l \rangle \cdot \langle \underline{b}_j, \underline{b}_l \rangle = 0 \quad j \neq l \\ &= \sum_j c_j^2 \cdot \underbrace{\langle \underline{b}_j, \underline{b}_j \rangle}_{\pi} \end{aligned}$$

$$\left(a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot dx \right)$$

Definition 2.9 $f(x)$, $0 \leq x \leq 2 \cdot \pi$

$$a_k := \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(k \cdot x) \cdot dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k := \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(k \cdot x) \cdot dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Fourierreihe:

$$f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(k \cdot x) + b_k \cdot \sin(k \cdot x))$$

Bemerkung:

$$g_k = \frac{a_0}{2} + \sum (a_k \cdot \cos(k \cdot x) + b_k \sin(k \cdot x))$$

(Partialsommenfolge von Fourierreihe)

ist bestmögliche Approximation in dem trigonometrischen Polygon von Grad $\leq k$

Bemerkung:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} (f(x) - g(x))^2 \cdot dx = 0 \quad \implies \quad \int_0^{2\pi} f(x)^2 \cdot dx = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right)$$

(Parseval'sche Gleichung)

Beispiel 2.31

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

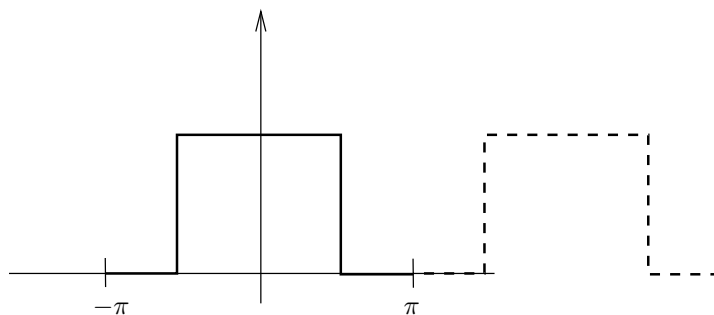


Abbildung 2.45: Abbildung zu Beispiel 2.31

Bemerkung:

$$\text{genau } f(x), \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

$$a_k := \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(k \cdot x) \cdot dx, \quad b_k := \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(k \cdot x) \cdot dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} = 1$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(k \cdot x) \cdot dx = \frac{1}{k \cdot \pi} \cdot \sin(k \cdot x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{k \cdot \pi} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & k \dots \text{gerade} \\ \pm \frac{2}{k \cdot \pi} & k \dots \text{ungerade} \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(k \cdot x) \cdot dx = 0$$

$$\text{Fourierreihe:} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{2}\right) \cdot \cos(k \cdot x)$$

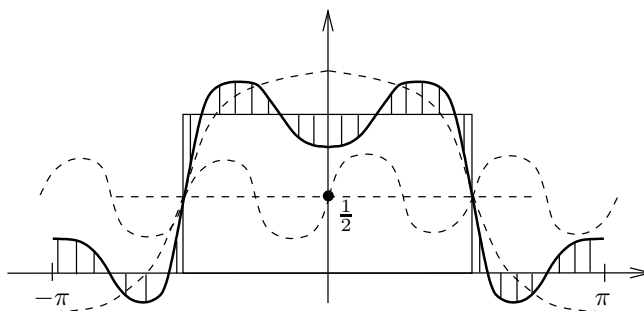


Abbildung 2.46: Der Impuls ergibt sich durch Überlagerungen von sin- und cos-Folgen

Satz 2.24

$f(x)$ $2 \cdot \pi$ - periodische, stückweise stetig differenzierbare Funktion, dazwischen Sprungstelle (d.h. die einseitigen Ableitungen existieren)

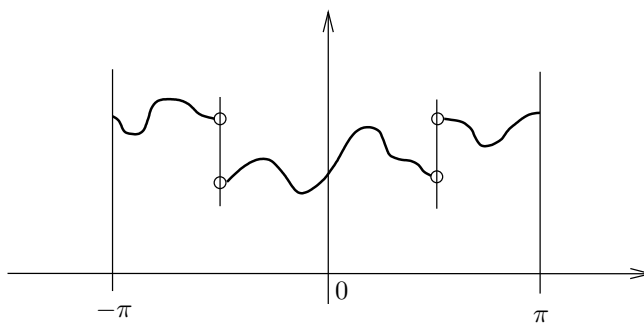


Abbildung 2.47: Abbildung einer stückweise stetigen Funktion (zu Satz 2.24)

$$\implies \text{Fourierreihe in } f(x) = \begin{cases} f(x) & \dots x \text{ keine Sprungstelle} \\ \frac{f(x+) + f(x-)}{2} & \dots x \text{ Sprungstelle} \end{cases}$$

Komplexe Fourierreihe:

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \cdot \int f(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} \cdot dx$$

$$(k \in \mathbb{Z}) \quad e^{-i \cdot k \cdot x} \dots \cos(k \cdot x) - i \cdot \sin(k \cdot x)$$

$$\implies c_k = \frac{1}{2} \cdot (a_k - i \cdot b_k) \quad (k > 0) \quad \implies c_{-k} = \frac{1}{2} \cdot (a_k + i \cdot b_k)$$

$$a_k = c_k + c_{-k} \quad b_k = \frac{c_k - c_{-k}}{-i}$$

$$\begin{aligned} \text{Fourierreihe} &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k + c_{-k}) \cdot (\cos(k \cdot x)) - i \cdot ((c_k - c_{-k}) \cdot (\sin(k \cdot x))) = \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x} + c_{-k} \cdot e^{-i \cdot k \cdot x}) = \\ &= \boxed{\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x}} \end{aligned}$$

2l - periodische Funktion:

$$f(x), \quad -l \leq x \leq l$$

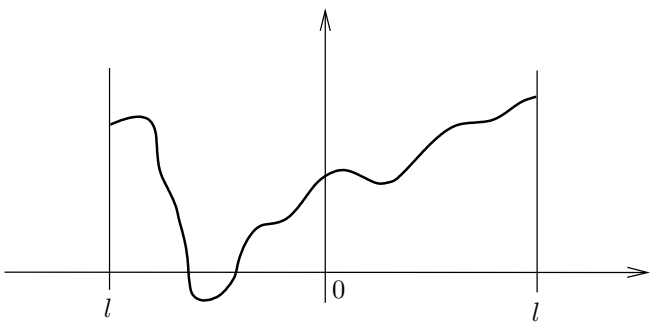


Abbildung 2.48: Abbildung einer l-periodischen Funktion

$$a_k := \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^l f(x) \cdot \cos\left(\frac{k \cdot \pi \cdot x}{l}\right) \cdot dx \quad b_k := \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^l f(x) \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot x}{l}\right) \cdot dx$$

$$\text{Fourierreihe: } \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos\left(\frac{k \cdot \pi \cdot x}{l}\right) + b_k \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot x}{l}\right) \right)$$

Komplexe 2-l periodische Fourierreihe:

$$c_k := \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^l f(x) \cdot e^{-\frac{i \cdot k \cdot \pi \cdot x}{l}} \cdot dx \quad \text{Fourierreihe: } \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \cdot e^{\frac{i \cdot k \cdot \pi \cdot x}{l}}$$

Diskrete Fouriertransformation:

$$\begin{aligned} a_k &= f(k \cdot T), & 0 \leq k \leq m \\ (a_0, \dots, a_{m-1}) & & \text{endliche Folge} \in \mathbb{R} (\mathbb{C}) \end{aligned}$$

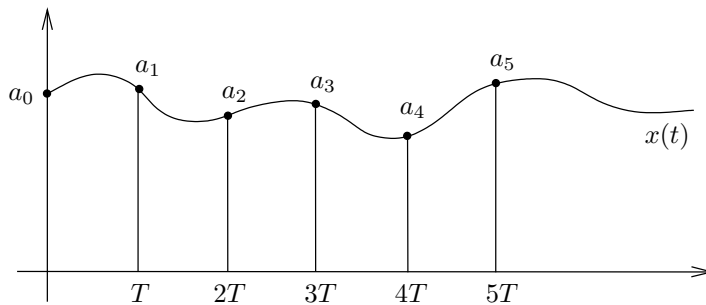


Abbildung 2.49: Ein kontinuierliches Signal wird mit der Periode T abgetastet

$$c_k := \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=0}^{m-1} a_j \cdot e^{-2 \cdot \pi \cdot \frac{j \cdot k}{m}} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=0}^{m-1} a_j \cdot \xi_m^{-k \cdot j}$$

$$(0 \leq k \leq m) \quad (\text{insgesamt } m^2 \text{ Operationen})$$

$$\xi_m := e^{\frac{2 \cdot \pi \cdot i}{m}} \quad (\text{primitive } m\text{-te Einheitswurzel})$$

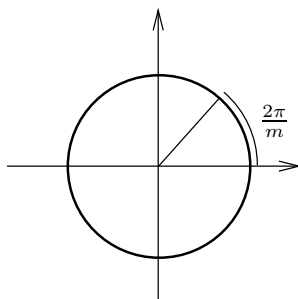


Abbildung 2.50: Abbildung einer primitiven m-ten Einheitswurzel

$$(a_0, \dots, a_{m-1}) \quad \longrightarrow \quad (c_0, \dots, c_{m-1}) \quad (c_m = c_0, \quad usw.)$$

Rücktransformation:

$$a_k = \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=0}^{m-1} c_j \cdot \xi_m^{k \cdot j}$$

Fast Fouriertransformation (FFT):

angenommen: $m = 2^l$

$$m \cdot c_{2 \cdot k} = \sum_{j=0}^{m-1} a_j \cdot \xi_m^{-j \cdot 2 \cdot k} = \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} a_j \cdot \xi_m^{-j \cdot 2 \cdot k} + \sum_{j=\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}-1} a_j + \frac{m}{2} \cdot \xi_m^{-(j+\frac{m}{2}) \cdot 2 \cdot k} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (a_j + a_{j+\frac{m}{2}}) \cdot \xi^{-j \cdot 2 \cdot k} \quad \implies \quad \xi_m^{-m \cdot k} = 1, \quad \xi_m^{-2 \cdot j \cdot k} = \xi_{\frac{m}{2}}^{-j \cdot k}, \quad \xi_m^2 = \xi_{\frac{m}{2}}$$

$$m \cdot c_{2 \cdot k+1} = \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}-1} [(a_j - a_{j+\frac{m}{2}})] \cdot \xi_{\frac{m}{2}}^{-j}$$

(kann man mehrmals anwenden)

vorher: $m \cdot m$ Multiplikationen

nachher: $2 \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{m}{2} + m = \frac{m^2}{2} + m$

Nach Iteration dieses Verfahrens bekommt man $m \cdot \log(m)$ Multiplikationen (FFT).

Kapitel 3

Höhere Kombinatorik

3.1 Erzeugende Funktionen:

Definition 3.1

$$(a_n) \quad n \geq 0 \quad a_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

- gewöhnliche erzeugende Funktion $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot x^n$
- exponentielle erzeugende Funktion $\hat{A}(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot \frac{x^n}{n!}$

Beispiel 3.1 $a_n = 1 \quad A(x) = \frac{1}{1-x} \quad \hat{A}(x) = e^x$

Bemerkung:

$$(a_n) \longleftrightarrow A(x)$$

$$(a_n) \longleftrightarrow \hat{A}(x)$$

Beispiel 3.2 Türme von Hanoi:

Steine umlagern, ohne dass ein größerer Stein auf einen kleineren gelegt wird (Abbildung: 3.1).

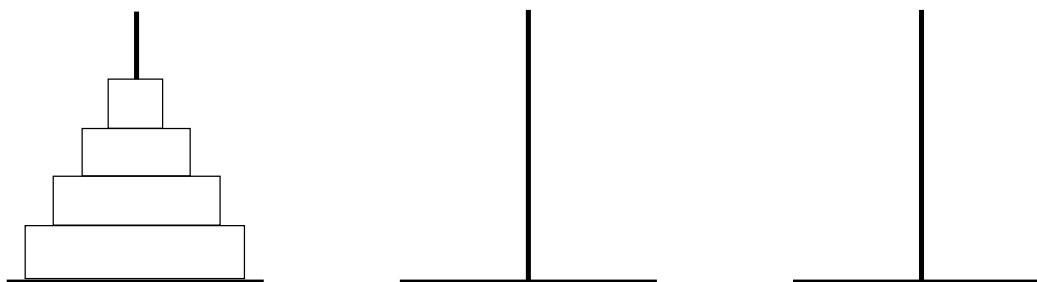


Abbildung 3.1: Abbildung der Türme von Hanoi

a_n ... minimale Anzahl von Zügen um einen Turm der Höhe n umzulegen

$$\left[\begin{array}{l} a_1 = 1, \quad a_0 = 0 \\ a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 1 \quad \dots \quad a_n = 2^n - 1 \end{array} \right] \quad 0, 1, 3, 7, 15, \dots \text{ (Ergebnisse sind } 2^n - 1 \text{)}$$

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot x^n$$

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 1 \quad | \cdot x^n \quad | \sum \implies \underbrace{\sum_{n \geq 1} a_n \cdot x^n}_{A(x) - a_0} = 2 \cdot \underbrace{\sum_{n \geq 1} a_{n-1} \cdot x^n}_{a_0 \cdot x + a_1 \cdot x^2 + \dots = x \cdot A(x)} + \sum_{n \geq 1} a_n \cdot x^n \implies$$

$$\implies A(x) = 2 \cdot x \cdot A(x) + \frac{x}{1-x} \implies A(x) \cdot (1 - 2 \cdot x) = \frac{x}{1-x} \implies$$

$$\implies A(x) = \frac{\frac{x}{(1-2 \cdot x) \cdot (1-x)}} = \underbrace{\frac{1}{1-2 \cdot x}}_{\sum 2^n \cdot x^n} - \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\sum x^n} \implies a_n = 2^n - 1$$

Beispiel 3.3 *Fibonacci - Zahlen:*

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... (immer der Summe der 2 vorangehenden Zahlen)

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \quad F(x) = \sum_{n \geq 0} F_n \cdot x^n$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 0) \quad | \cdot x^n \quad | \sum_{n \geq 2} \implies$$

$$\implies \sum_{n \geq 2} F_n \cdot x^n = \sum_{n \geq 2} F_{n-1} \cdot x^n + \sum_{n \geq 2} F_{n-2} \cdot x^n \implies$$

$$\implies F(x) - \underbrace{F_1 \cdot x}_{=1} - \underbrace{F_0}_{=0} = x \cdot (F(x) - \underbrace{F_0}_{=0}) + x^2 \cdot F(x) \implies$$

$$\implies F(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot x}}_{\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \cdot x^n} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot x}$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{grad } f < \text{grad } g, \quad g(x) = c \cdot (x - x_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x - x_r)^{k_r}$$

x_1, \dots, x_r ... Nullstellen k_1, \dots, k_r ... Vielfachheiten

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x-x_1)} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \dots + \frac{C_1}{(x-x_r)} + \dots + \frac{C_{k_r}}{(x-x_r)^{k_r}}$$

$$\frac{-\frac{A_1}{x_1}}{\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)} + \frac{\frac{A_2}{x_1^2}}{\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)^2} + \dots + \frac{(-1)^{k_1} \frac{A_{k_1}}{x_1^{k_1}}}{\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)^{k_1}} + \dots =$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A'_1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{A'_2}{\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)^2} + \dots + \frac{A'_{k_1}}{\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)^{k_1}} + \dots \quad (\text{modifizierte Partialbruchzerlegung})$$

$$\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} = \sum_{n \geq 0} x_1^{-n} \cdot x^n, \quad \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)^2} = \sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{x_1^n} \cdot x^n,$$

$$\frac{1}{(1-x)^k} = (1-x)^{-k} = \sum_{n \geq 0} \binom{-k}{n} \cdot (-x)^n = \sum_{n \geq 0} \binom{n+k-1}{k-1} \cdot x^n \quad \boxed{\text{UE}}$$

$\binom{n+k-1}{k-1} \dots$ Polynom in n vom Grad $k-1$

$$\binom{-k}{n} \cdot (-1)^n = \binom{n+k-1}{k-1} \quad \binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}{k!}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot x^n$$

$$\begin{aligned} a_n &= A'_1 \cdot x_1^{-n} + A'_2 \cdot \binom{n+1}{1} \cdot x_1^{-n} + \dots + A'_{k_1} \cdot \binom{n+k_1-1}{k_1-1} \cdot x_1^{-n} + \dots = \\ &= (A'_1 + A_1 \cdot \binom{n+1}{1} + \dots + \dots) \cdot x_1^{-n} + \dots + (\dots) \cdot x_r^{-n} = \\ &= P_{1,k_1-1}(n) \cdot x_1^{-n} + \dots + P_{r,k_r-1}(n) \cdot x_r^{-n} \end{aligned}$$

$P_{1,k_1-1} \dots$ Polynom in n vom Grad $k_1 - 1$

Lineare Rekursionen:

$$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + \dots + c_r \cdot a_{n-r}$$

$[a_0, a_1, \dots, a_{n-r} \mid n \geq r]$ müssen gegeben sein (Anfangsbedingungen)

Beispiel 3.4 *Fibonacci*zahlen:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 1,$$

$$r = 2, \quad c_1 = c_2 = 1 \quad A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot x^n,$$

$$a_n \cdot x^n = c_1 \cdot a_{n-1} \cdot x^{n-1} \cdot x + \dots + c_r \cdot a_{n-r} \cdot x^{n-r} \cdot x^n \quad | \sum_{n \geq r} \implies$$

$$\implies \sum_{n \geq r} a_n \cdot x^n = c_1 \cdot \sum_{n \geq r} a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + c_r \cdot x^r \cdot \sum_{n \geq r} a_{n-r} \cdot x^{n-r} \implies$$

$$\begin{aligned} \implies A(x) - (a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_{r-1} \cdot x^{r-1}) &= \\ &= c_1 \cdot x \cdot [A(x) - (a_0 + \dots + a_{r-2} \cdot x^{r-2})] + \dots + c_r \cdot x^r \cdot A(x) \implies \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies A(x) \cdot (1 - c_1 \cdot x - \dots - c_r \cdot x^r) &= \\ &= \underbrace{a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_{r-1} \cdot x^{r-1} - c_1 \cdot x \cdot (a_0 + \dots + a_{r-2} \cdot x^{r-2})}_{\implies \frac{f(x)}{1 - c_1 \cdot x - \dots - c_r \cdot x^r}} \implies \end{aligned}$$

$$\implies a_n = P_{1,k_1-1}(x) \cdot x_1^{-n} + \dots + P_{l,k_l-1}(n) \cdot x_l^{-n}$$

$x_1, \dots, x_r \quad \dots$ Nullstellen von $1 - c_1 \cdot x - \dots - c_r \cdot x^n$

k_1, \dots, k_l ... Vielfachheiten

Satz 3.1 $a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + \dots + c_r \cdot a_{n-r}$

Charakteristisches Polynom:

$$x(t) = t^r - c_1 \cdot t^{r-1} - \dots - c_r = \left[t^r \cdot \left(1 - c_1 \cdot \frac{1}{t} - c_2 \cdot \left(\frac{1}{t}\right)^2 - \dots - c_r \cdot \left(\frac{1}{t}\right)^r \right) = t^r \cdot g \cdot \left(\frac{1}{t}\right) \right]$$

$$g(x) = 1 - c_1 \cdot x - \dots - c_r \cdot x^n \quad q_1, \dots, q_l \quad \dots \text{ Nullstellen von } x(t)$$

$$\left[q_j = \frac{1}{x_j} = x_j^{-1}, \quad x_j^{-n} = q_j^n \right] \quad \implies P_{1, k_1-1}(n) \text{ Polynome in } n \text{ vom Grad } \leq k_j - 1$$

$$a_n = P_{1, k_1}(n) \cdot q_1^n + \dots + P_{l, k_l}(n) \cdot q_l^n$$

Beispiel 3.5

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad F_0 = 0, F_1 = 1, \quad x(t) = t^2 - t - 1 = 0$$

$$F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0 \quad q_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1}$$

$$F_n = A \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$n = 0: \quad 0 = A + B \quad n = 1: \quad 1 = A \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + B \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\implies A = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad B = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \implies F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Beispiel 3.6

$$a_n = 4 \cdot a_{n-1} - 4 \cdot a_{n-2} \quad x(t) = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2$$

$$q_1 = 2, k_1 = 2 \quad a_n = (A + B \cdot n) \cdot 2^n = A \cdot 2^n + B \cdot n \cdot 2^n$$

Bemerkung:

Ansatzmethode, $a_n = q^n$ (Annahme)

$$q^n = 4 \cdot q^{n-1} - 4 \cdot q^{n-2} \quad | : q^{n-2}$$

$$q^2 = 4 \cdot q - 4$$

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + b_n \quad | \cdot x^n \quad | \sum$$

$$b_n = n^2, \quad B(x) = \sum_{n \geq 0} n^2 \cdot x^n?$$

$$1 \iff \frac{1}{1-x}$$

$$n \iff \left(\frac{1}{1-x}\right)' \cdot x = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$n^2 \iff \left(\frac{x}{1-x^2}\right)' \cdot x = \frac{x^2 \pm x}{(1-x)^3}$$

Rechenregeln für erzeugende Funktionen:

$$a_n \iff A(x), \quad b_n \iff B(x)$$

$$\lambda \cdot a_n + \mu \cdot b_n \iff \lambda \cdot A(x) + \mu \cdot B(x)$$

$$\sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k} \iff A(x) \cdot B(x)$$

$$\sum_{k=0}^n a_k \iff \frac{1}{1-x} \cdot A(x)$$

$$a_n \cdot \gamma^n \iff A(\gamma \cdot x)$$

$$a_{n-1} \iff x \cdot A(x)$$

$$n \cdot a_n \iff x \cdot A'(x)$$

Beispiel 3.7

$$a_n = \sum_{k=0}^n k = \binom{n+1}{2} = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

$$1 \iff \frac{1}{1-x}$$

$$n \iff \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$a_n = \sum_{k=0}^n k \iff \frac{1}{1-x} \cdot \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^3}$$

$$\implies \binom{n-1+2}{2} = a_n$$

Rechenregeln für exponentiell erzeugende Funktionen:

$$a_n \iff \widehat{A}(x), \quad b_n \iff \widehat{B}(x)$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k \cdot b_{n-k} \iff \widehat{A}(x) \cdot \widehat{B}(x)$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k \iff e^x \cdot \widehat{A}(x) \quad (b_n = 1)$$

$$a_n \cdot \gamma^n \implies \widehat{A}(\gamma \cdot x)$$

$$a_{n-1} \iff \widehat{A}'(x)$$

$$n \cdot a_n \iff x \cdot \widehat{A}'(x)$$

3.2 Unmarkierte kombinatorische Strukturen - Kombinationen:

Beispiel 3.8 Urne mit Kugeln verschiedener Farbe:

- 2 oder 3 weiße Kugeln $w^2 + w^3 = ww + www$
- mindestens 1 gelbe Kugel $g + g^2 + g^3 + \dots$
- höchstens 1 rote Kugel $r^0 + r = 1 + r$

Kombinationen:

$$(w^2 + w^3) \cdot (g + g^2 + g^3 + \dots) \cdot (1 + r) = w^2 \cdot g + w^2 \cdot g^2 + w^2 \cdot g^3 + \dots + w^2 \cdot r + w^2 \cdot g^2 \cdot r + \dots +$$

Problem:

wie viel Kombinationen von n-Kugeln unter diesen Einschränkungen gibt es?

Lösung:

$$w = g = r = x \quad \implies \quad x^3 + x^4 + x^5 + \dots + x^4 + x^5$$

Erzeugende Funktionen:

$$(x^2 + x^3) \cdot \frac{x}{1-x} \cdot (1-x) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot x^n \quad \implies a_n = \dots \quad \boxed{\text{UE}}$$

Beispiel 3.9 Kombinationen ohne Wiederholung:

Wähle n verschiedene Elemente aus den Elementen a_1, \dots, a_n aus:

$$(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot \dots \cdot (1 + a_n)$$

Anzahl: $a_1 = \dots = a_n = x$

$$\text{Erzeugende Funktion} = (1+x)^N = \sum_{n \geq 0} \binom{N}{n} x^n \quad \implies \binom{N}{n} \dots \text{Anzahl der Möglichkeiten}$$

Beispiel 3.10 Kombinationen mit Wiederholung:

$$(1 + a_1 + a_1^2 + \dots) \cdot (1 + a_2 + a_2^2 + \dots) \cdot \dots \cdot ()$$

Anzahl: $a_1 = a_2 = \dots = a_n = x$

$$\text{Erzeugende Funktion: } \left(\frac{1}{1-x}\right)^N = \sum_{n \geq 0} \underbrace{\binom{n+N-1}{N-1}}_{\binom{N+n-1}{n}} \cdot x^n \implies$$

$$\implies \binom{N+n-1}{n} = \binom{n+N-1}{N-1} \dots \text{Anzahl der Möglichkeiten}$$

Beispiel 3.11 Ebene Wurzelbäume:

$$\implies EF \quad \implies P(x) = x + x \cdot P(x) + P(x) + \dots = \frac{x}{1-P(x)}$$

$$\implies P(x) = \sum_{n \geq 1} p_n \cdot x^n$$

$p_n = \#$ Wurzelbäume mit n Knoten

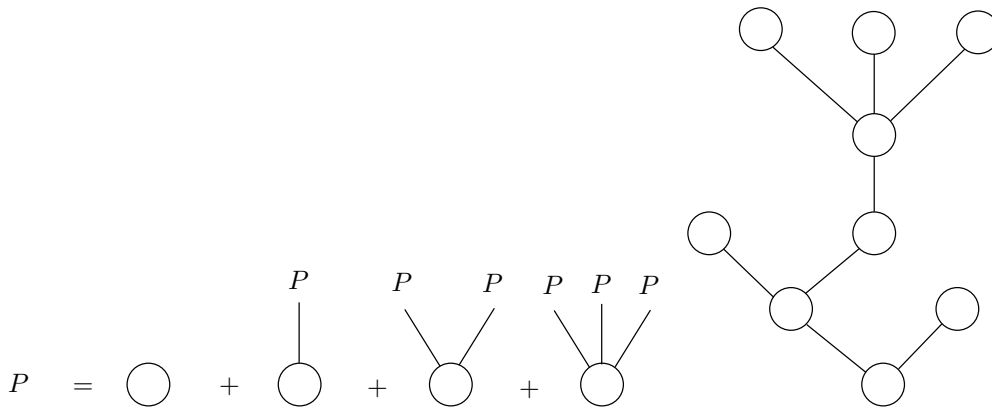


Abbildung 3.2: Ein Wurzelbaum kann aus mehreren zusammengesetzt werden

$$P(x) - P(x)^2 = x, \quad \implies \quad P(x)^2 - P(x) + x = 0$$

$$P(x) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - x} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2} \quad \implies \quad \left[p_n = -\frac{1}{2} \cdot (-4)^n \cdot \binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{1}{n} \cdot \binom{2n-2}{n-1} \right] \quad \boxed{UE}$$

(Catalanzahlen)

$$p_3 = \frac{1}{3} \cdot \binom{4}{2} = 2$$

3.3 Markierte kombinatorische Konstruktionen - Variationen:

(Reihenfolge spielt eine Rolle)

2 Kugeln: r, g

1. Kombinationen $r \cdot g = g \cdot r$

2. Variationen $r \cdot g, g \cdot r \quad \implies \quad EEF \quad \sum_{n \geq 0} a_n \cdot \frac{x^n}{n!}$

Beispiel 3.12

$$\underbrace{\text{weiß}}_{2,3} \quad \underbrace{\text{gelb}}_{\geq 1} \quad \underbrace{\text{rot}}_{1 \leq}$$

“Variationen” $(w^2 + w^3) \cdot (g + g^2 + g^3 + \dots) \cdot (1 - r)$

$\implies \quad EEF \quad \implies \quad \text{Variationen} \quad \implies$

$$\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \right) \cdot \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) \cdot (1 + x) = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right) \cdot (e^x - 1) \cdot (1 + x) = \sum a_n \cdot \frac{x^n}{n!}$$

$a_n \dots$ Anzahl der Variationen $a_n = \quad \boxed{UE}$

Variationen ohne Wiederholung:

$$a_1, \dots, a_N$$

$$(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot \dots \cdot (1 + a_N)$$

$$\implies \quad EEF \quad \implies$$

$$(1+x) \cdot (1+x) \cdot \dots \cdot (1+x) = (1+x)^N = \sum_{n \geq 1} \frac{N!}{n! \cdot (N-n)!} \cdot x^n = \sum_{n \geq 1} \frac{N!}{(N-n)!} \cdot \frac{x^n}{n!}$$

$$\implies \frac{N!}{(N-n)!} = \text{Anzahl der Variationen von } n \text{ Elementen an einer Menge von } N\text{-Elementen}$$

$$N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot (N-n+1)$$

Variationen mit Wiederholung:

$$a_1, \dots, a_N$$

$$(1 + a_1 + a_1^2 + a_1^3 + \dots) \cdot \dots \cdot (1 + a_N + a_N^2 + \dots)$$

$$\implies \quad EEF \quad \implies$$

$$e^x \cdot \dots \cdot e^x = e^{N \cdot x} = \sum_{n \geq 0} \frac{(N \cdot x)^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} N^n \cdot \frac{x^n}{n!}$$

$$\implies N^n = \text{Anzahl}$$

Kapitel 4

Graphentheorie

4.1 Grundlegende Begriffe:

$$\underbrace{G}_{\text{Graph}} = (\underbrace{V}_{\text{Knoten}}, \underbrace{E}_{\text{Kanten}})$$

$$\text{Kanten} \begin{cases} \text{gerichtet} \\ \text{ungerichtet} \end{cases}$$

$$e \in E, \quad e = (\underbrace{v}_{\text{Startknoten}}, \underbrace{w}_{\text{Startknoten}})$$

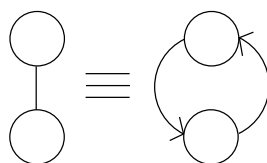


Abbildung 4.1: Äquivalenz der Kantendarstellungen

Notationen:

$$V = V(G) \quad \alpha_0(G) = |V(G)|$$

$$E = E(G) \quad \alpha_1(G) = |E(G)|$$

Knotengrad:

$$G \text{ gerichtet:} \quad d^+(v) \dots \text{Weggrad}$$

$$d^- \dots \text{Hingrad}$$

$$G \text{ ungerichtet: } d(v)$$

Adjazenzmatrix:

$$V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \quad A(G) = (a_{ij}) \quad 1 \leq i, j \leq n$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & (v_i, v_j) \notin E(G) \end{cases}$$

Beispiel 4.1

$$A(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

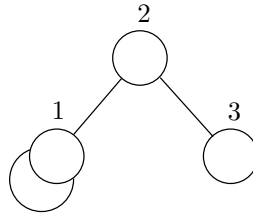


Abbildung 4.2: Beispiel eines Graphen mit einer Schlinge

Bemerkung:

G ungerichtet: $A(G)$ symmetrisch

Schlingen: Diagonale

[Mehrfachkanten: a_{ij} = Anzahl der Kanten]

Beispiel 4.2

$$A(G) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

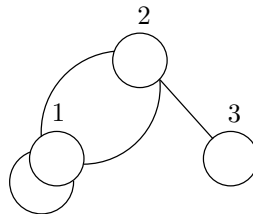


Abbildung 4.3: Beispiel eines Graphen mit einer Schlinge und einer Mehrfachkante

Kantenfolge:

- Folge von Kanten, die hintereinander durchlaufen werden können
- Länge: Anzahl der Kanten
- geschlossene Kantenfolge
- Kreis: geschlossene Kantenfolge, wo keine Knoten (und keine Kanten) mehrfach

Erreichbarkeitsrelation: $v, w \in V(G)$

$v \mathcal{R} w : \iff \exists$ Kantenfolge (v, w)

$A^k = (a_{ij}^{[k]})$, $a_{ij}^{[k]} = \text{Anzahl der Kantenfolgen } (v_i, v_j) \text{ der Länge } k$

$$I + A + A^2 + A^3 + \dots + A^{n+1} = R = (r_{ij}) \quad r_{ij} > 0 \iff v_i \mathcal{R} v_j$$

Zusammenhang:

G ungerichtet: G zusammenhängend: $\iff \forall v, w \in V(G) : v \mathcal{R} w$

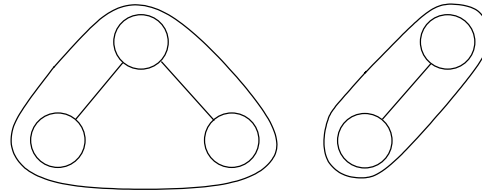


Abbildung 4.4: Maximal zusammenhängende Teilgraphen

Zusammenhangskomponente: maximaler zusammenhängender Teilgraph

G gerichtet: G stark zusammenhängend: $\iff \forall v, w \in V(G); v \mathcal{R} w$

Komponenten des starken Zusammenhangs: maximal stark zusammenhängende Teilgraphen

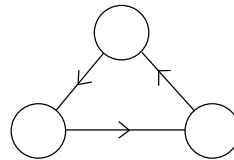


Abbildung 4.5: Falls stark zusammenhängend, kann jeder Punkt von jedem erreicht werden

4.2 Bäume und Wälder:

Definitionen:

- *Wald:* ungerichteter, kreisfreier Graph
- *Baum:* ungerichteter, kreisfreier, zusammenhängender Graph (Komponenten eines Waldes sind Bäume)
- *Wurzelbaum:* 1 Knoten (=Wurzel) ist ausgezeichnet

Satz 4.1

1. T Baum $\implies \alpha_0(T) = \alpha_1(T) + 1$
2. W Wald mit K Komponenten $\implies \alpha_0(w) = \alpha_1(w) + K$

Definition 4.1 G ungerichtet, zusammenhängend (keine Schlingen, keine Mehrfachkanten)

$T \dots$ spannender Baum $\iff V(T) = V(G), \quad E(T) \leq E(G)$

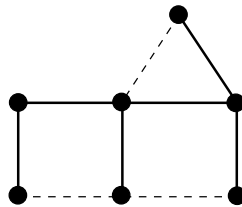


Abbildung 4.6: Darstellung eines spannenden Baumes

Definition 4.2 G ungerichtet, schlicht:

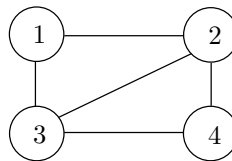
$W \dots$ Gerüst: $\iff W$ ist in jeder Komponente von G ein spannender Baum

Satz 4.2 (Matrix - Baum - Theorem von Kirchhoff)

$G \dots$ ungerichtet, zusammenhängend, schlicht

$$V(G) = \{v_1, \dots, v_n\} \quad A(G), D(G) = \text{diagonal}(d(v_1), \dots, d(v_n))$$

\implies Anzahl der spannenden Bäume von $G = (n-1)$ -zeilige Unterdeterminante von $D(G) - A(G)$



Beispiel 4.3

Abbildung 4.7: Beispielgraph zu Satz 4.2

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D(G) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

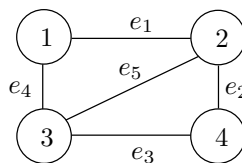


Abbildung 4.8: Beispielgraph zu Satz 4.2 mit Beschriftung aller Kanten

$$D(G) - A(G) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Davon eine Zeile und eine Spalte streichen (hier 2. Zeile und 2. Spalte) und daraus die Determinante berechnen.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 - (2 + 2) = 8$$

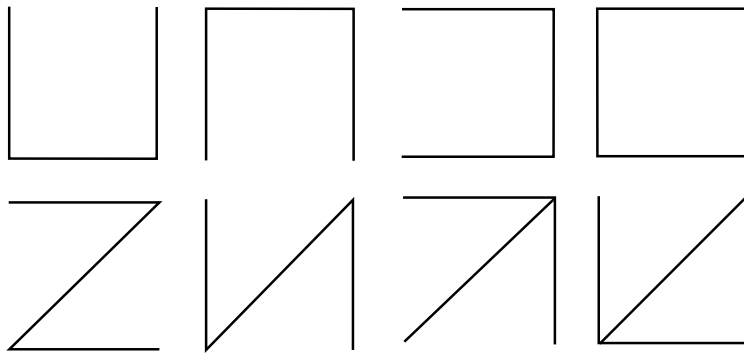


Abbildung 4.9: Darstellung aller möglichen spannenden Bäume zu Beispiel 4.3

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & e_1 & e_4 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad D(G) = \begin{pmatrix} e_1 + e_4 & & & \\ & e_1 + e_2 + e_5 & & \\ & & \ddots & \end{pmatrix}$$

(Es kommen bei der Determinante 8 Komponenten vor, die die spannenden Bäume beschreiben)

Minimaler spannender Baum:

Kantenbewertung: $w : E \rightarrow \mathbb{R} (\mathbb{R}_+)$

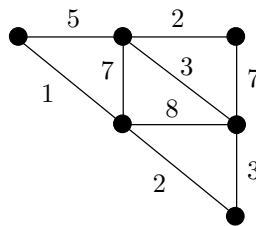


Abbildung 4.10: Darstellung eines Baumes mit Kantengewichtung

Gewicht: spannender Baum T: $w(T) = \sum_{e \in E(T)} w(e)$ kleinstmöglich

Kruskalalgorithmus:

1. (Kanten sortieren)
2. $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \dots \leq w(e_m)$
3. $E(T) = \emptyset$
for i=1 to m
if $T \cup \{e_i\}$ kreisfrei then
 $E(T) \leftarrow E(T) \cup \{e_i\}$

Analog: maximaler spannender Baume/Gerüste

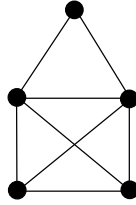


Abbildung 4.11: Abbildung eines Eulerschen Graphen

4.3 Eulersche und Hamiltonsche Linien:

Definition 4.3 *G* zusammenhängender Graph

Eulersche Linie ist Kantenfolge, die jede Kante *genau einmal* und jeden Knoten (mindestens einmal) durchläuft.

Satz 4.3 *G* zusammenhängender ungerichteter Graph

1. G besitzt geschlossene Eulersche Linie $\iff \forall v \in V(G) : d(v)$ ist gerade
2. G besitzt geschlossene Eulersche Linie $\iff \exists v_1, v_2 \in V(G) : d(v_1), d(v_2)$ ungerade, $(v_1 \neq v_2)$
 $\forall v \in V(G) \setminus \{v_1, v_2\} : d(v)$ ist gerade

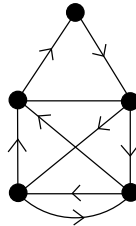


Abbildung 4.12: Markierung der Wege durch den Eulerschen Graphen

Satz 4.4 ein (schwach) zusammenhängender gerichteter Graph

1. G besitzt geschlossene Eulersche Linie $\iff \forall v \in V(G) : d^+(v) = d^-(v)$
2. G besitzt offene Eulersche Linie $\iff \implies \exists v_1, v_2 \in V(G) : d^+(v_1) = d^-(v_1), \quad d^+(v_2) = d^-(v_2) - 1$
 $\forall v \in V(G) \setminus \{v_1, v_2\} : d^+(v) = d^-(v)$
 $v_1, v_2 \dots$ Anfangs und Endpunkt

Definition 4.4 *Hamiltonsche Linie* ist eine Kantenfolge, die jeden Knoten genau einmal erreicht

Satz 4.5 $G =$ zusammenhängend, ungerichtet, $|V(G)| = n$

$$\forall v, w \in V(G), \quad (v, w) \notin E \quad d(v) + d(w) \geq n \quad \implies \exists \text{ Hamiltonsche Linie}$$

4.4 Planare (ebene) Graphen:

Definition 4.5 G planar, wenn er sich kreuzungsfrei in die Ebene einbetten läßt

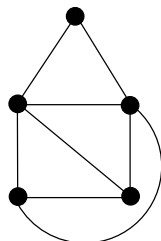


Abbildung 4.13: Abbildung eines planaren Graphen

$$\alpha_0(G) = |V(G)|$$

$$\alpha_1(G) = |E(G)|$$

$$\alpha_2(G) = \text{Anzahl, der Flächenstücke, in der die Ebene durch die Einbettung in } G \text{ zerlegt wird}$$

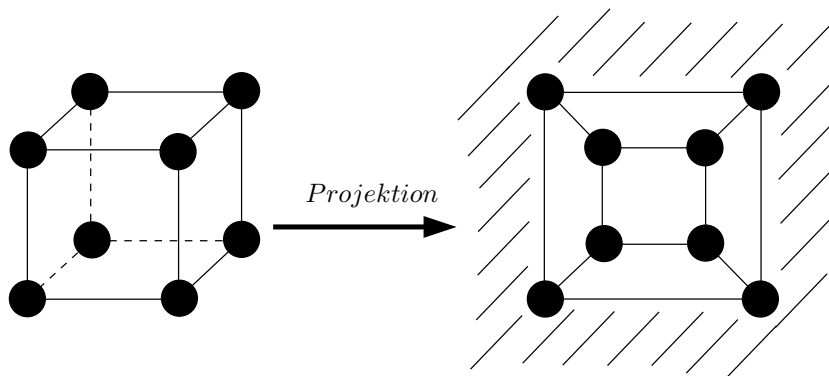


Abbildung 4.14: Abbildung einer Projektion eines Würfels in eine Ebene

Eulersche Polyederformel:

G zusammenhängend und planar \implies

$$\alpha_0(G) - \alpha_1(G) + \alpha_2(G) = 2$$

zB: Würfel: $8 - 12 + 6 = 2$

(Läßt sich zeigen, in dem man wiederholt eine Kante entfernt - $8 - 11 + 5 = 2$ usw.)

Kein Graph der C_5 oder $K_{3,3}$ als Unterteilung enthält, kann planar sein.

Satz 4.6 (*Kuratowski*)

G planar $\iff G$ enthält weder eine Unterteilung des C_5 , noch des $K_{3,3}$ als Teilgraph

Satz 4.7 (*4-Farbensatz*)

G planar $\implies \exists$ Färbung der Knoten mit ≤ 4 Farben, sodaß benachbarte Knoten verschieden gefärbt sind. (siehe auch Abbildung 4.17)

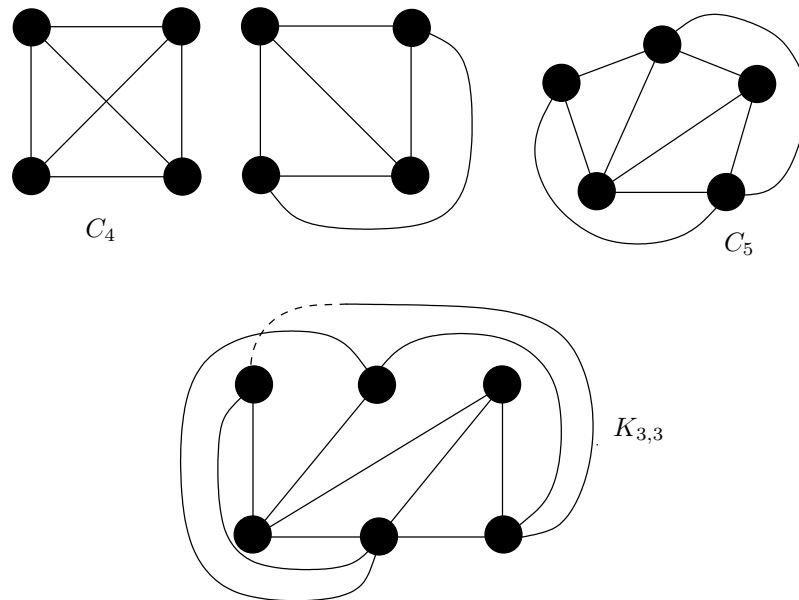


Abbildung 4.15: C_5 und $K_{3,3}$ sind nicht planar

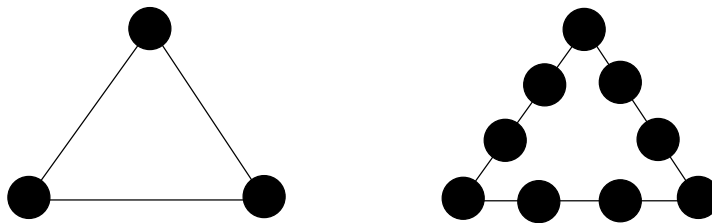


Abbildung 4.16: Unterteilung eines Graphen (Satz 4.6)

4.5 Netzwerke

$G = (V, E)$ gerichtet/ungerichtet

Kantenbewertung: $w : E \rightarrow \mathbb{R} \ (\mathbb{R}^+)$

Distanz:

$$d(v, w) = \min w(KF(v, w)) \qquad v, w \in V \qquad [w(KF) = \sum_{e \in KF} w(e)]$$

Dijkstra - Algorithmus:

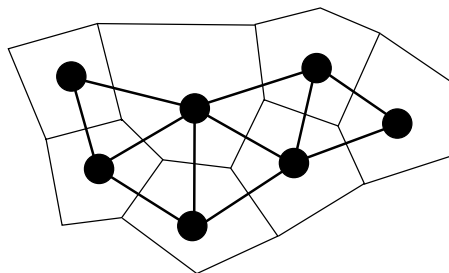


Abbildung 4.17: Dualer Graph zum Färben von Landkarten (Satz 4.7)

(zur Bestimmung des kürzesten Weg von v_0 zu v_{Ziel})

$$V = W \cup U, \quad W \cap U \neq \emptyset$$

W ... volle Information U ... unvollständige Information

label $l(v)$... trägt momentane Information

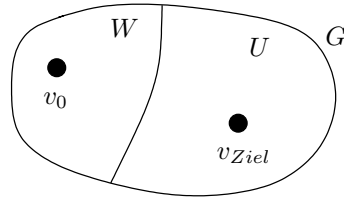


Abbildung 4.18: Abbildung zum Dijkstra-Algorithmus

$$\mathbf{v} \in \mathbf{W} : l(v) = d(v_0, v)$$

$\mathbf{v} \in \mathbf{U} : l(v) =$ Länge des kürzesten Weges von v_0 nach v mit der Eigenschaft, daß alle Schritte (bis auf den letzten Schritt) in W sind

Schleife im Algorithmus:

1. $m = \min l(v)$, wähle $z \in U$, $l(z) = m$, $v \in U$
2. $W \leftarrow W \cup \{z\}$, $U \leftarrow U \setminus \{z\}$ $v \in U : l(v) \leftarrow \min\{l(v), l(z) + w(z, v)\}$

Kapitel 5

Zahlentheorie

5.1 Teilbarkeit:

\mathbb{N} ... Halbring

\mathbb{Z} ... Ring (zusätzlich -1 als Teiler, Integritätsbereich)

Definition 5.1 $a|b : \iff \exists c \in \mathbb{Z} : b = a \cdot c$

Lemma:

1. $a|b \wedge b|c \implies a|c$
2. $a, b \neq 0, a|b \wedge b|a \iff a = \pm b$
3. $a|b \wedge a|c \implies a|b \pm c$

Beweis:

1. $b = a \cdot d_1 \quad c = b \cdot d_2 \implies c = a \cdot \underbrace{(d_1 \cdot d_2)}_{d \in \mathbb{Z}} \implies a|c$
2. $b = a \cdot c_1, \quad a = b \cdot c_2 \implies b = b \cdot (c_2 \cdot c_1) \quad (b \neq 0)$
 $\implies 1 = c_2 \cdot c_1 \implies c_1 = c_2 = \pm 1 \implies a = \pm b$
3. **UE**

Definition 5.2 $d = ggT(a, b)$ (größter gemeinsamer Teiler)

1. $d|a \wedge d|b$
2. $t|a \wedge t|b \implies t|d$

Division mit Rest:

$a, b \in \mathbb{Z}, \quad b \neq 0$

$\implies q, r \in \mathbb{Z} : a = b \cdot q + r \quad 0 \leq r < |b|$

Beweis:

$$q = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor, \quad r := a - b \cdot q = \underbrace{\left(\frac{a}{b} - q\right)}_{|\dots| < 1} \cdot b \quad 0 \leq \frac{a}{b} - q < 1 \quad \implies 0 \leq r < |b|$$

Euklidischer Algorithmus:

$$a, b \in \mathbb{Z}, \quad (b > 0)$$

$$a = q_0 \cdot b + r_0, \quad 0 < r_0 < b$$

$$b = q_1 \cdot r_0 + r_1, \quad 0 < r_1 < r_0$$

$$r_0 = q_2 \cdot r_1 + r_2, \quad 0 < r_2 < r_1$$

$$\vdots$$

$$r_{k-2} = q_k \cdot r_{k-1} + r_k, \quad 0 < r_k < r_{k-1}$$

$$r_{k-2} \geq r_{k-1} + r_k \geq 2 \cdot r_k$$

$$\boxed{r_k \leq \frac{1}{2} \cdot r_{k-2}}$$

$$r_{k-1} = q_{k+1} \cdot r_k + 0$$

$$r_{k+1} = 0$$

Satz 5.1 $r_k =$ der größte gemeinsame Teiler $(a, b) = ggT(a, b)$

Beweis:

$$1. r_k | r_{k-1} \implies r_k | r_{k-2} \implies r_k | r_1, r_k | r_0 \implies r_k | b, r_k | a$$

$$2. t | a, t | b \implies t | (a - q \cdot b) = r_0 \implies t | r_1 \implies \dots \implies t | r_k$$

Beispiel 5.1 $ggT(105, 60)$

$$105 = 1 \cdot 60 + 45$$

$$60 = 1 \cdot 45 + 15$$

$$45 = 3 \cdot 15 + 0$$

$$15 = 60 - 45$$

$$= 60 - (105 - 60)$$

$$= 2 \cdot 60 - 1 \cdot 105$$

Satz 5.2 $a, b \in \mathbb{Z} \quad d = ggT(a, b) \implies e, f \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{d = e \cdot a + f \cdot b}$$

Beispiel 5.2 $15, 17$

$$17 = 1 \cdot 15 + 2$$

$$15 = 7 \cdot 2 + 1 = \text{ggT}$$

$$2 = 2 \cdot 1 + 0$$

$$\begin{aligned} 1 &= 15 - 7 \cdot 2 \\ &= 15 - 7 \cdot (17 - 15) \\ &= 8 \cdot 15 - 7 \cdot 17 \end{aligned}$$

Definition 5.3 Primzahl $p < 1$, einziger Teiler: $\pm 1 \pm p$

\mathbb{P} ... Menge aller Primzahlen

Lemma:

$$p \leftarrow \mathbb{P} \quad p|a \cdot b \implies p|a \wedge p|b$$

Beweis:

1. Fall: $p|a$

2. Fall: $p \nmid a \implies \text{ggT}(p, a) = 1$

$$\implies \exists e, f \in \mathbb{Z}: \quad 1 = e \cdot p + f \cdot a$$

$$b = b \cdot 1 = \underbrace{b \cdot b \cdot p}_{p|} + f \cdot \underbrace{(a \cdot b)}_{p|} \implies p|b$$

Satz 5.3 $a \in \mathbb{N} \implies a = p_1 \cdot \dots \cdot p_r, \quad p_j \in \mathbb{P}$

Darstellung ist bis auf Reihenfolge eindeutig.

Beweis:

1. Fall: $a \in \mathbb{P}$

2. Fall: $a \notin \mathbb{P} \implies a = a_1 \cdot a_2, \quad 1 < a_1 < a, \quad a < a_2 < a$

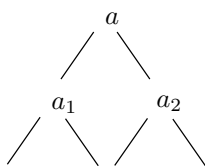


Abbildung 5.1: Baumdarstellung einer Primzahl

$$\implies a = p_1 \cdot \dots \cdot p_r, \quad p_j \in \mathbb{P}$$

(2) $a = p_1 \cdot \dots \cdot p_r = q_1 \cdot \dots \cdot q_s \quad p_j, q_s \implies \mathbb{P}$

$$p_1|q_1 \cdot \dots \cdot q_s \implies p|q_2 \vee \dots \vee p|q_s$$

$$p_1|q_1 \implies p_1 = q_1 \quad (\text{Primzahl teilt Primzahl})$$

$$\implies p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_r = q_2 \cdot \dots \cdot q_s = p_2 = q_2$$

Notation:

$$a \in \mathbb{N} \quad v_2(6 \cdot \delta) = 2$$

$$a = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_q(a)} \quad v_3(6 \cdot \delta) = 1$$

$$6 \cdot 0 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \quad v_5(6 \cdot \delta) = 1$$

Satz 5.4 $|\mathbb{P}| = \infty$

Beweis: Annahme: $\mathbb{P} = \{p_1, \dots, p_N\}$ (endlich)

$$Q = p_1 \cdot \dots \cdot p_N + 1 \quad p_1 \nmid Q, \dots, p_N \nmid Q \implies \text{Widerspruch}$$

Beispiel 5.3 2,3

$$Q = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$Q = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 43$$

Satz 5.5

$$ggT(a, b) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min\{v_q(a), v_p(b)\}}$$

$$kgV(a, b) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\max\{v_q(a), v_p(b)\}}$$

Gegenbeispiel:

$$R = \{a + b \cdot i \cdot \sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \quad \langle R, +, \cdot \rangle \dots \text{Integritätsbereich}$$

Primzahlen: $2, 3, 1 + i \cdot \sqrt{5}, 1 - i \cdot \sqrt{5}$ $6 = 2 \cdot 3 = (1 + i \cdot \sqrt{5}) \cdot (1 - i \cdot \sqrt{5})$

5.2 Kongruenzen:

$m \in \mathbb{Z}(N)$... Modul

$$a \equiv b(m) \iff m \mid b - a$$

$$a = b + k \cdot m \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Restklasse:

$$\begin{aligned} \bar{a} = a + m \cdot \mathbb{Z} &= \{\dots, a - 2 \cdot m, a - m, a, a + m, a + 2 \cdot m, \dots\} \\ &= \{b \in \mathbb{Z} \mid a \equiv b(m)\} \end{aligned}$$

$$\bar{a} = \bar{b} \iff a \equiv b(m)$$

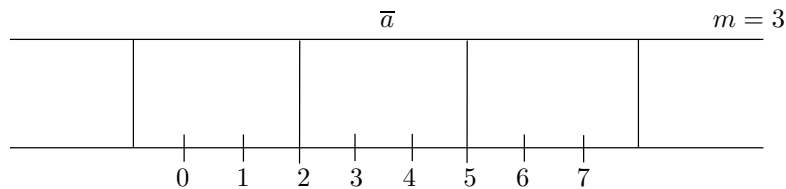


Abbildung 5.2: Darstellung einer Restklasse mit $m=3$

$$\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{m-1}\} \quad \text{Restklassen modulo } m$$

$$|\mathbb{Z}_m| = m \quad \boxed{\text{UE}}$$

$$\text{Definition 5.4} \quad \overline{a} + \overline{b} := \overline{a+b} \quad \overline{a} \cdot \overline{b} := \overline{a \cdot b} \quad \boxed{\text{UE}}$$

Restklassenring: $\langle \mathbb{Z}_m, +, \cdot \rangle$

$$\text{Beispiel 5.4} \quad \langle \mathbb{Z}_3, +, \cdot \rangle, \quad \mathbb{Z}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$$

+	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

·	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Achtung: $n = 6$

$$\overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{4} \cdot \overline{3} = \overline{0} \quad \implies \quad \overline{2} = \overline{4}$$

(Man darf aber nicht immer kürzen!)

$$R^* = E(R) = \{a \in \mathbb{R} \mid \exists b \in \mathbb{R} : a \cdot b = b \cdot a = 1\}$$

$$\text{Satz 5.6} \quad E(\mathbb{Z}_m) = \mathbb{Z}_m^* = \{\overline{a} \mid \text{ggT}(a, m) = 1\}$$

$$\text{Beispiel 5.5} \quad \mathbb{Z}_6^* = \{\overline{1}, \overline{5}\} \quad \mathbb{Z}_5^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \text{ggT}(a, m) = 1 &\iff \exists e, f : a \cdot e + m \cdot f = 1 \\ &\iff a \cdot e \equiv 1(m) \\ &\iff \overline{a} \cdot \overline{e} = \overline{1} \end{aligned}$$

Beispiel 5.6

$$\overline{15}^{-1} \text{ mod } 17$$

$$1 = 8 \cdot 15 - 7 \cdot 17$$

$$\implies \overline{15}^{-1} = \overline{8}$$

Eulersche φ -Funktion:

$$\varphi(m) = |\mathbb{Z}_m^*| = \{a \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq a \leq m, \text{ ggT}(a, m) = 1\}$$

$$\varphi(6) = 2, \quad \varphi(5) = 4$$

$$p \in \mathbb{P} \quad \varphi(p) = p - 1 \quad \implies \quad \boxed{\langle \mathbb{Z}_p, +, \cdot \rangle \text{ Körper}}$$

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^{k-1} \cdot (p - 1) = p^k \cdot \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Satz 5.7 $m = \frac{\varphi_1}{p_1}, \dots, \frac{\varphi_r}{p_r}$ P.F.Z.

$$\implies \varphi(m) = m \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

Kleiner Satz von Fermat:

$$(a, m) = 1 \quad \implies \quad a^{\varphi(m)} \equiv 1(m)$$

$$\left[\begin{array}{l} p \in \mathbb{P}, \quad p \nmid a \implies a^{p-1} \equiv 1(p) \\ p \mid (a^{p-1} - 1) \end{array} \right]$$

Beweis: $\mathbb{Z}_m = \{\overline{c_1}, \dots, \overline{c_k}\} \quad k = \varphi(m)$

$$\implies \{\overline{a} \cdot \overline{c_1}, \dots, \overline{a} \cdot \overline{c_k}\} = \{c_1, \dots, c_k\}$$

$$\implies \overline{a^{\varphi(m)}}, \dots, \overline{c_k} = c_1, \dots, c_k \implies \overline{a^{\varphi(m)}} = \overline{1}$$

Satz 5.8 $p, q \in \mathbb{P}, \quad p \neq q, \quad e, d \in \mathbb{Z}, \quad e \cdot d \equiv 1(v), \quad m = p \cdot q$

$$v = \text{kgV}(p^{-1}, q^{-1}) \quad \implies \quad \forall a \in \mathbb{Z}: \quad (a^e)^d \equiv a(m)$$

Beweis: $a^{e \cdot d} \equiv a(p \cdot q) \iff a^{e \cdot d} \equiv (p) \wedge a^{e \cdot d} \equiv a(q)$

1. Fall: $p \mid a \iff a^{e \cdot d} \equiv 0 \equiv a(p)$

2. Fall: $p \nmid a \iff a^{p-1} \equiv 1(p)$

$$e \cdot d = 1 + r \cdot v = 1 + r \cdot \underbrace{s(p-1)}_v \implies a^{1+e \cdot d} = a^{(r \cdot s) \cdot (p-1)} = a^{(a^{p-1})^{r \cdot s}} \equiv a \equiv 1(p)$$

RSA-Verfahren:

Öffentlicher Schlüssel (m, e)

Verschlüsselung: E: $a \longrightarrow a^e \bmod m$ $a \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$

Entschlüsselung: D: $b \longrightarrow b^d \bmod m$ $D(E(a))=a$

$m = p \cdot q,$ $e \cdot d \equiv 1(v),$ $v = \text{kgV}(p-1, q-1)$