182–183) Über welchem Körper $\mathbb{Z}_p$ (p Primzahl) ist die Matrix $\mathfrak{A}$ singulär?

182) $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 9 \\ 9 & 3 & 10 \end{pmatrix}$ **183)** $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

184–187) Man bestimme die Eigenwerte der Matrix $\mathfrak{A}$:

184) $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ **185)** $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

186) $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ **187)** $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 10 \\ -8 & 11 & 2 \\ 10 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

188) Bestimmen Sie einen Wert $a \in \mathbb{Z}$, sodaß die quadratische Form $3x^2 + axy + 2xz + 2y^2 + 2yz + 2z^2$ positiv definit ist.

189) Wie 188 für $x^2 + axy + 3xz + y^2 - 2yz + 4z^2$.

190) Aus der Basis $B = \{(2,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$ des $\mathbb{R}^3$ soll mittels Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt eine Orthonormalbasis gebildet werden (wobei das gewöhnliche innere Produkt zugrunde zu legen ist).

191) Wie 190 für $B = \{(1,2,3),(0,1,0),(1,2,2)\}$.

Analysis

201) Man bestimme rechnerisch (ohne Taschenrechner) und graphisch Summe und Produkt der komplexen Zahlen $z_1 = 3 - 4i$ und $z_2 = [2, \frac{\pi}{2}]$.

202) Wie bei 201) für $z_1 = 4 + 5i$ und $z_2 = [2, -\frac{\pi}{4}]$.

203) Wie bei 201) für $z_1 = 5 + 2i$ und $z_2 = [3, \frac{\pi}{2}]$.

204) Man berechne ohne Taschenrechner alle Werte von $\sqrt[4]{1+i}$ in der Form $[r, \varphi]$.

205) Wie bei 204) für $\sqrt[5]{18 - 6\sqrt{3}i}$.

206) Wie bei 204) für $\sqrt[3]{-i}$.

207) Wie bei 204) für $\sqrt[5]{\sqrt{2} - \sqrt{6}i}$.

208) Man beweise $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ und $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$.

209) Man beweise $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

210) Man beweise $N\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{N(z_1)}{N(z_2)}$.

211) Man beweise $N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2)$.

212) Für welche komplexe Zahlen gilt $\overline{z} = \frac{1}{z}$?

213) Man zeige $\left|\frac{z_1 + z_2}{2}\right|^2 + \left|\frac{z_1 - z_2}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.

214) Man beschreibe die Menge jener komplexen Zahlen z, die $\mathfrak{Re}\left(\frac{z-a}{b}\right) > 0$ erfüllen ($a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$).

215) Man beschreibe die Menge jener komplexen Zahlen z, die $\mathfrak{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right) > 0$ erfüllen ($a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$).

216–217) Welche Teilmenge der komplexen Zahlenebene beschreibt die angegebene Ungleichung?

216) $\left|\frac{z+4}{z-4}\right| < 3$ **217)** $\left|\frac{z+5}{z}\right| < 4$

218) Man berechne alle Werte von $\sqrt{7 + 24i} = a + ib$ ohne Benützung der trigonometrischen Darstellung. (Hinweis: Man quadriere die zu lösende Gleichung und vergleiche Real- und Imaginärteile.)

219) Wie Bsp. 218) für $\sqrt{8 - 6i} = a + ib$.

220) Man zeige: $(\mathbb{C}, \preceq)$ ist Halbordnung mit $z = a + ib \preceq w = c + id$, falls $a < c$ oder ($a = c$ und $b \leq d$). Weiters gebe man drei verschiedene komplexe Zahlen $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ an, für die $z_1 \preceq z_2$ und $z_3 \succeq 0$, aber $z_3 z_1 \succeq z_3 z_2$ gelten.

221) Man zeige: $(\mathbb{C}, \preceq)$ ist Halbordnung mit $z = a + ib \succeq w = c + id$, falls $a > c$ oder ($a = c$ und $b \geq d$). Weiters gebe man drei verschiedene komplexe Zahlen $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ an, für die $z_1 \succeq z_2$ und $z_3 \preceq 0$, aber $z_3 z_1 \succeq z_3 z_2$ gelten.

222) Seien (X_i, d_i), $i = 1, \ldots, n$, metrische Räume. Man zeige, daß dann auf $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ durch $d((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \max_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i)$ ebenfalls eine Metrik definiert wird.

223) Man wähle in Bsp. 222) $n = 2$, $X_1 = \mathbb{R}$, $X_2 = \mathbb{R}^2$ mit der jeweiligen Euklidischen Metrik und beschreibe die Kugelumgebungen in $X_1 \times X_2$.

224) Seien (X_i, d_i), $i = 1, \ldots, n$, metrische Räume. Man zeige, daß dann auf $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ durch $d((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)$ ebenfalls eine Metrik definiert wird.

225) Man wähle in Bsp. 224) $n = 2$, $X_1 = \mathbb{R}^2$, $X_2 = \mathbb{R}$ mit der jeweiligen Euklidischen Metrik und beschreibe die Kugelumgebungen in $X_1 \times X_2$.

226) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Man zeige, daß dann auch

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

Metrik auf X ist.

227) Man bestimme bezüglich d' aus Bsp. 226) alle beschränkten Mengen.

228) Man zeige: Ist d eine Metrik auf X, so ist auch durch $d'(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$ eine Metrik auf X festgelegt. Man bestimme weiters für d' die Mengen $K(x_0, 2)$, $x_0 \in X$.

229) Man bestimme bezüglich d' aus Bsp. 228) alle beschränkten Mengen.

230) Sei $f : Y \to X$ injektiv und (X, d) metrischer Raum. Man zeige, daß durch $d''(y_1, y_2) = d(f(y_1), f(y_2))$ eine Metrik auf Y definiert wird.

231) Sei (X, d) metrischer Raum und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend (d. h. $f(a) < f(b)$ für $a < b$) mit $f(0) = 0$ und $f(a + b) \leq f(a) + f(b)$. Man zeige, daß dann auch $d''(x, y) = f(d(x, y))$ eine Metrik auf X ist.

232) Sei $X = \mathbb{R}^2$ und $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$. Man bestimme die Streckensymmetrale $S((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid d((a_1, a_2), (x_1, x_2)) = d((b_1, b_2), (x_1, x_2))\}$ der Punkte $(a_1, a_2) = (0, 0)$ und $(b_1, b_2) = (2, 0)$.

233) Sei X eine beliebige, nichtleere Menge, $f : X \to \mathbb{R}$ und $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$. Welche Eigenschaft muß f haben, daß (X, d) metrischer Raum ist? (Beweis!)

234) Für $\mathbb{R}$ mit der Euklidischen Metrik sollen für die Menge

$$A = \{-4\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} \mid 1 < x \le 3\}$$

die Menge A° der inneren Punkte, die Menge $\mathrm{Rd}(A)$ der Randpunkte und der Abschluß $\overline{A} = A \cup \mathrm{Rd}(A)$ bestimmt werden.

235) Wie Bsp. 234) für $A = (\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\} \setminus \{\frac{1}{2}\}) \cup \{x \in \mathbb{Q} \mid 1 < x < 2\} \cup \{3\}$.

236) Man gebe eine Folge reeller Zahlen an, die als Häufungspunkte genau alle natürlichen Zahlen hat.

237) Man gebe eine Folge reeller Zahlen an, die als Häufungspunkte genau alle ganzen Zahlen hat.

238) Gibt es eine Folge reeller Zahlen, die als Häufungspunkte genau alle rationalen Zahlen hat?

239) Zeigen Sie, jeweils durch Angabe eines Beispiels, daß in $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Metrik die Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener Mengen nicht abgeschlossen sein muß und der Durchschnitt abzählbar vieler offener Mengen nicht offen sein muß.

240) Man finde alle Häufungspunkte der Folge $a_n = (-1)^n + \cos\frac{n\pi}{2}$ $(n \ge 0)$.

241) Man finde alle Häufungspunkte der Folge $a_n = \sin\frac{n\pi}{2} + (-1)^{n(n+1)/2}$ $(n \ge 0)$.

242) Man zeige, daß die Folge $a_n = \frac{\sin n}{n}$ $(n \ge 1)$ nur 0 als Häufungspunkt hat.

243) Man zeige, daß die Folge

$$a_n = \frac{\sin n + \cos n}{\sqrt{n}} \quad (n \ge 1)$$

nur 0 als Häufungspunkt hat.

244–245) Man zeige, daß die Folge a_n konvergiert, indem man zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ angebe.

244) $a_n = \dfrac{\sin n + \cos n}{\sqrt{n}}$ **245)** $a_n = \dfrac{\sin n}{\sqrt[4]{n}}$

246) Sei $\langle c_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige reelle Folge. Man zeige, daß es zwei beschränkte Folgen $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$, $\langle b_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllen.

247) Sei $\langle c_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige reelle Folge. Man zeige, daß es zwei Nullfolgen $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$, $\langle b_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllen.

248) Seien $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ und $\langle b_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $\lim a_n = a$ und $\lim b_n = b$. Man zeige, daß die Folge $\langle c_n \rangle_{n\in\mathbb{N}} = \langle a_n + 2b_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ auch konvergiert mit $\lim c_n = c = a + 2b$, indem man zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ angebe.

249) Seien $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ und $\langle b_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $\lim a_n = a$ und $\lim b_n = b$. Man zeige, daß die Folge $\langle c_n \rangle_{n\in\mathbb{N}} = \langle 3a_n - b_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ auch konvergiert mit $\lim c_n = c = 3a - b$, indem man zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ angebe.

250–252) Man untersuche die Folge a_n (mit Hilfe vollständiger Induktion) auf Monotonie und Beschränktheit und bestimme gegebenenfalls mit Hilfe der bekannten Rechenregeln für Grenzwerte den Grenzwert $\lim a_n$.

250) $a_0 = 3$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n - 1}$ für alle $n \ge 0$.

251) $a_0 = 4$, $a_{n+1} = \sqrt{6a_n - 9}$ für alle $n \ge 0$.

252) $a_0 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$ für alle $n \ge 0$.

253–268) Man untersuche die Folge $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

253) $a_n = \dfrac{2n^3 + 2n - 3}{4n^3 + n^2 + 5}$ **254)** $a_n = \dfrac{4n^2 + 5n - 3}{2n^3 + 3n^2 - n + 7}$

255) $a_n = \dfrac{3n^2 - 5n + 7}{3n^3 - 5n + 7}$ **256)** $a_n = \dfrac{2n^3 - 5n^2 + 7}{2n^3 - 5n + 7}$

257) $a_n = \dfrac{2n^2 - 5n^{\frac{9}{4}} + 7}{7n^3 + 2n^{-\frac{3}{2}} + 1}$ **258)** $a_n = \dfrac{3n^2 - 4n^{\frac{11}{3}} + n^{-1}}{2n^4 + 2n^{-\frac{3}{2}} + 1}$

259) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ **260)** $a_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$

261) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ **262)** $a_n = \dfrac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{\sqrt[3]{\frac{1}{n}}}$

263) $a_n = \dfrac{\frac{\sin n}{(n-2)^2} + \frac{n^2+2}{n^2-n}}{\frac{3n^2+2}{n^2+n}}$ **264)** $a_n = \dfrac{\frac{n^2-4}{4n^2-7n} - \frac{\cos n}{2n-5}}{\frac{3n^2+2}{(n-3)^2}}$

265) $a_n = n\,q^n \quad (-1 < q < 0)$ **266)** $a_n = \dfrac{q^n}{n} \quad (q > 1)$

267) $a_n = \sqrt[n^2]{n^5 + 1}$ **268)** $a_n = \sqrt[n^2]{n^3 + n^2}$

(Hinweis zu Bsp. 267) und Bsp. 268): Man verwende den als bekannt vorausgesetzten Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.)

269–272) Man untersuche die Folge $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert, indem man zwei geeignete Folgen $\langle b_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$, $\langle c_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n \le a_n \le c_n$ finde.

269)

$$a_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n}$$

270)

$$a_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2}$$

271)

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

272)

$$a_n = \frac{n^2+1}{n^3+1} + \frac{n^2+2}{n^3+2} + \cdots + \frac{n^2+n}{n^3+n}$$

273) Zeigen Sie: Sind $a_1, \ldots, a_m \ge 0$ fest gewählte reelle Zahlen und ist $\langle b_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ durch $b_n = \sqrt[n]{a_1^n + \cdots + a_m^n}$ definiert, so gilt $\lim b_n = \max\{a_1, \ldots, a_m\}$.

274) Sei die Folge $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv gegeben durch $a_0 = 0$ und

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n(n+1)} \quad (n \ge 1).$$

Man zeige (mit Hilfe vollständiger Induktion)

$$a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

und bestimme den Grenzwert.

275) Sei die Folge $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv gegeben durch $a_0 = 0$ und

$$a_{n+1} = a_n + \frac{n}{(n+1)!} \quad (n \geq 0).$$

Man zeige (mit Hilfe vollständiger Induktion)

$$a_n = 1 - \frac{1}{n!}$$

und bestimme den Grenzwert.

276–277) Man bestimme alle Häufungspunkte, sowie $\overline{\lim}\, a_n$ und $\underline{\lim}\, a_n$ der Folge a_n:

276)

$$a_n = (-1)^n n^{\left((-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}+1\right)} + \cos\frac{n\pi}{2}$$

277)

$$a_n = \frac{n^2 \cos\frac{n\pi}{2} + 1}{n+1} + \sin\frac{(2n+1)\pi}{2}$$

278–279) Man zeige, daß die Folge a_n uneigentlich konvergiert, indem man zu jedem $A > 0$ ein $N(A)$ angebe, sodaß für $n > N(A)$ immer $a_n > A$ gilt.

278)

$$a_n = \frac{n^3+1}{n-1}$$

279)

$$a_n = \frac{2n^4+n}{n^3+n}$$

280) Man gebe zwei reelle Nullfolgen $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$, $\langle b_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ an, die

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim \frac{a_n}{b_n^2} = +\infty$$

erfüllen.

281) Man gebe zwei reelle Folgen $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$, $\langle b_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim a_n = \lim b_n = +\infty$ an, die

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim \frac{a_n^2}{b_n} = +\infty$$

erfüllen.

282–287) Man bestimme die Partialsummenfolge und ermittle dann gegebenenfalls den Grenzwert der Reihe. (Hinweis: Man stelle die Summanden als Differenz passender Ausdrücke dar.)

282) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+2)}$ **283)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

284) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ **285)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)!}$

286) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$ **287)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+5}{(n+2)(n+3)}$

288–295) Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

288) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{3n^2+1}{5n^3-2}$ **289)** $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n-2}{2n^3+5n-3}$

290) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n+2}{6^n}$ **291)** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n}$

Hinweis: Man benütze die aus der Bernoullischen Ungleichung folgende Ungleichung $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$.

292) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2n^2+1}{n^4+2}$ **293)** $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n+3}{7n^2-2n+1}$

294) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{3^n}$ **295)** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^{n-1}}{n!}$

296–297) Man berechne unter Benützung der komplexen Zahlen und der Moivreschen Formel $(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$ den Grenzwert der Reihe:

296) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{2^n}$ **297)** $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{2^n}$

298–301) Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

298) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+2}}$ **299)** $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}+5n}$

300) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+2}}$ **301)** $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+3)^{4/3}}$

302) Sei $a_n \geq 0$ und die Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$ konvergent. Man zeige, daß dann auch die Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n^2$ konvergiert.

303) Gilt Bsp. 302) auch ohne die Voraussetzung $a_n \geq 0$? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

304) Sei $a_n \geq 0$ und die Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$ konvergent. Man zeige, daß dann auch die Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n^3$ konvergiert.

305) Gilt Bsp. 304) auch ohne die Voraussetzung $a_n \geq 0$? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

306) Es sei $\lim a_n = a$. Man bestimme den Grenzwert der Reihe $\sum_{n\geq 0}(a_{n+1} - a_n)$.

307) Es sei $\lim a_n = a$. Man bestimme den Grenzwert der Reihe $\sum_{n\geq 0}(a_{n+2} - a_n)$.

308) Es sei $\lim a_n = 0$. Man bestimme den Grenzwert der Reihe $\sum_{n\geq 0}(-1)^n(a_{n+1} + a_n)$.

309–312) Man zeige, daß die folgende Funktionenreihen im jeweils angegebenen Bereich konvergieren:

309) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n, \quad |x| < 1$ **310)** $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} x^n, \quad |x| < \frac{1}{4}$

311) $\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}$

312) $\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C}$

313–316) Man untersuche, für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgende Funktionenreihe konvergiert:

313) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}(x-1)^n$

314) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$

315) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}(x+1)^n$

316) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+\sqrt[3]{x^2})^n}$

317) Man bestimme die Grenzfunktion der Funktionenreihe aus Bsp. 314).

318) Man bestimme die Grenzfunktion der Funktionenreihe aus Bsp. 316).

319) Man zeige durch Reihenvergleich die gleichmäßige Konvergenz von

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n\sqrt{1+2nx}}$$

im Intervall $[0,\infty)$.

320) Man zeige durch Reihenvergleich die gleichmäßige Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\,\sqrt[n]{1+x^2}}$$

für $x \in \mathbb{R}$.

321) Man zeige:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!}, \qquad a,b \in \mathbb{R}.$$

322) Man zeige:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n b^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-b)^n}{n!}, \qquad a,b \in \mathbb{R}.$$

323–326) Die Abbildungen $\sinh, \cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind definiert durch: $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

323) Man bestimme die Potenzreihenentwicklung von $\cosh(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$.

324) Man bestimme die Potenzreihenentwicklung von $\sinh(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$.

325) Man beweise die Formel $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$.

326) Man beweise die Formel $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$.

327) Man bestimme die Potenzreihenentwicklung von $f(x) = (x^2+1)\sin x$ an der Stelle $x_0 = 0$ durch Produktbildung zweier Potenzreihen.

328) Man bestimme die Potenzreihenentwicklung von $f(x) = (1-x^2)\cos x$ an der Stelle $x_0 = 0$ durch Produktbildung zweier Potenzreihen.

329) Man beweise die Formel

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}.$$

(Hinweis: Man betrachte die Koeffizienten von $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$.)

330) Man beweise die Formel

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{l=0}^{k} \binom{n}{l}\binom{m}{k-l}.$$

(Hinweis: Man vergleiche die Koeffizienten von $(1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{n+m}$.)

331–334) Man zeichne den Graphen der Funktion $f(x)$ und bestimme alle Stellen, an denen $f(x)$ stetig ist. ($\mathrm{sgn}(x) = 1$ für $x > 0$, $\mathrm{sgn}(x) = -1$ für $x < 0$ und $\mathrm{sgn}(0) = 0$.)

331) $f(x) = (x - \pi/2)\,\mathrm{sgn}(\cos x)$

332) $f(x) = (x^2 - 1)\,\mathrm{sgn}(\sin(\pi x))$

333) $f(x) = x\,\mathrm{sgn}(\sin x)$

334) $f(x) = x \sin\left(\frac{\pi}{3}\mathrm{sgn}(x)\right)$

335–336) Man untersuche für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ den Grenzwert $\lim_{t\to 0} f(\alpha t, \beta t)$. Ist die Funktion $f(x,y)$ an $(0,0)$ stetig?

335)

$$f(x,y) = \frac{|y|}{|x|^3 + |y|} \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0) \text{ und } \quad f(0,0) = 1$$

336)

$$f(x,y) = \frac{2y^2}{|x| + y^2} \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0) \text{ und } \quad f(0,0) = 0$$

337) Sei

$$f(x,y) = \frac{x\cos\frac{1}{x} + y\sin y}{2x - y}$$

für $0 \neq x \neq 2y$. Man untersuche und vergleiche die iterierten Grenzwerte

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y).$$

Existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

338) Sei

$$f(x,y) = \frac{x + y\cos\frac{1}{y}}{x + y}$$

für $0 \neq y \neq -x$. Man untersuche und vergleiche die iterierten Grenzwerte

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y).$$

Existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

339–340) Man untersuche die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit (Hinweis: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ für $a, b \geq 0$.):

339)

$$f(x,y) = \frac{xy}{|x| + |y|} \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0) \text{ und } \quad f(0,0) = 0.$$

340)

$$f(x,y) = \frac{xy^2 + x^2y}{x^2 + y^2} \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0) \text{ und } \quad f(0,0) = 0.$$

341–344) Man zeige, daß die folgenden Funktionen stetige Umkehrfunktionen haben und bestimme diese:

341) $f(x) = \dfrac{1 - x^3}{x^3}, \quad D_f = (1, \infty)$

342) $g(x) = (1 + \sqrt{x})^7, \quad D_g = (0, \infty)$

343) $f(x) = \dfrac{1 - x^7}{x^7}, \quad D_f = (1, \infty)$

344) $g(x) = (1 + \sqrt{x})^5, \quad D_g = (0, \infty)$

345) Sei $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(0) = 0$, $f(a) > a$ und $f(x) \neq x$ für $0 < x < a$. Man zeige, daß dann auch $f(x) > x$ für $0 < x < a$ gilt.

346) Man zeige, daß es zu jeder stetigen Funktion $f : [a, b] \to [a, b]$ wenigstens ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = x_0$ gibt.

347–349) Man bestimme mit Hilfe der Bisektion auf drei Dezimalstellen genau die positive Nullstelle der Funktion $f(x)$:

347) $f(x) = \sin x - \frac{x}{2}$

348) $f(x) = \cos x - x$

349) $f(x) = (\tan x)^2 - x$, $x < \frac{\pi}{4}$

350–355) Man untersuche, wo die Funktion $f(x)$ differenzierbar ist und bestimme dort $f'(x)$:

350) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{\sqrt{x^2 - 5x + 2}}$

351) $f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\sqrt[3]{x^2 - 2}\right)$

352) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{\sqrt{x^2 - 6x + 3}}$

353) $f(x) = \operatorname{Arccos}\left(\sqrt[4]{x^2 - 2}\right)$

354) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 4x + 3}}$

355) $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{x + 1}{x - 1}}\right)$

356–357) Man zeige mittels Differenzieren:

356)

$$\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} + \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}x = \frac{\pi}{4}, \qquad x \in (-1, 1)$$

357)

$$\operatorname{Arcsin}x = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right), \qquad x \in (-1, 1)$$

358–359) Man bestimme den Definitionsbereich der Vektorfuntion $\mathfrak{x}(t)$, sowie die Ableitung $\mathfrak{x}'(t)$, wo sie existiert:

358)

$$\mathfrak{x}(t) = \left(\left(\frac{2t}{\sqrt{1 - 3t^2}} \right)^{\frac{5}{4}}, \sin\left(\frac{1}{1 + t^2} \right) \right)$$

359)

$$\mathfrak{x}(t) = \left(\sin(1 + \cos(t)), \frac{t^{\frac{5}{4}}}{\sqrt{1 - t^2}} \right)$$

360–363) Man bestimme die partiellen Ableitungen:

360) $f(x,y) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{4x^2y^2}{1 + x + y}\right)$

361) $f(x,y,z) = \dfrac{y + \sqrt{xz}}{1 + \sin^2(xyz)}$

362) $f(x,y) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{2x^3y}{y - x^3}\right)$

363) $f(x,y,z) = \dfrac{\sqrt{x} + y^3z^2}{1 + \cos^2(1 + x)}$

364–367) Man bestimme die Funktionalmatrix zu $\mathfrak{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$:

364) $\mathfrak{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(x + y - z) \\ \cos\left(\frac{xy}{z}\right) \end{pmatrix}$

365) $\mathfrak{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{y^2z} \\ x^y z^2 \end{pmatrix}$

366) $\mathfrak{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{x-z}{y+1}} \\ z \cdot e^{-\frac{x}{y}} \end{pmatrix}$

367) $\mathfrak{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(\operatorname{Arctan}(x + y^2)) \\ x\cos(y^2 - \sqrt{x}) \cdot \tan(xyz) \end{pmatrix}$

368) Es sei $g_u(u,v) = \frac{\partial}{\partial u}g(u,v) = u^2 - v$ und $g_v(u,v) = \frac{\partial}{\partial v}g(u,v) = -u + v^3$. Man bestimme $h(t) = \frac{d}{dt}g(2t, t^2 + 1)$.

369) Es sei $g_u(u,v) = \frac{\partial}{\partial u}g(u,v) = v\sin(uv)$ und $g_v(u,v) = \frac{\partial}{\partial v}g(u,v) = u\sin(uv)$. Man bestimme $h(t) = \frac{d}{dt}g(t^2 - 1, 3t)$.

370) Man berechne $\frac{d^n}{dx^n}[(3x + 1)\cos x]$ für $n \in \mathbb{N}$.

371) Man berechne $\frac{d^n}{dx^n}[(2x - 3)\sin x]$ für $n \in \mathbb{N}$.

372) Zeigen Sie: Sind $g_1(x), \ldots, g_m(x)$ differenzierbar und $g_j(x) \neq 0$ für alle j, so gilt

$$\frac{\left(\prod_{j=1}^m g_j(x)\right)'}{\prod_{j=1}^m g_j(x)} = \sum_{j=1}^m \frac{g_j'(x)}{g_j(x)}.$$

373) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton fallend und differenzierbar. Man zeige, daß dann $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

374) Folgt in Bsp. 373) aus der strengen Monotonie sogar $f'(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

375) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und differenzierbar. Man zeige, daß dann $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

376) Folgt in Bsp. 375) aus der strengen Monotonie sogar $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

377) Für die Funktion $f(t) = \begin{cases} -1 & (t \leq 1) \\ 1 & (t > 1) \end{cases}$ berechnen Sie $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Ist $F(x)$ stetig bzw. differenzierbar?

378) Wie 377) für $f(t) = \left\{ \begin{array}{rl} -2 & (t \leq 1) \\ 1 & (t > 1) \end{array} \right.$.

379) Berechnen Sie $\int_2^3 x^2\,dx$ mit Hilfe von Untersummen bei äquidistanter Teilung. (Hinweis: $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.)

380) Berechnen Sie $\int_1^2 x^3\,dx$ mit Hilfe von Untersummen bei äquidistanter Teilung. (Hinweis: $\sum_{k=1}^n k^3 = \binom{n+1}{2}$, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=1}^n k = \binom{n+1}{2}$.)

381) Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{k(n-k)}$$

durch Interpretation als Grenzwert einer Riemannschen Zwischensumme.

382–389) Man berechne:

382) $\int_1^2 (\sqrt[4]{x(\sqrt[3]{x\sqrt{x}})})^5\,dx$

383) $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} (\sin^2 x + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}})\,dx$

384) $\int x\mathrm{Arcsin}x\,dx$

385) $\int \frac{x^4+x^2-1}{(x-1)^2(x^2+2x+3)}\,dx$

386) $\int \frac{dx}{x^2+2x+9}$

387) $\int \frac{dx}{2\sin^2 x\cos^2 x}$

388) $\int \frac{e^x}{e^{2x}-e^x-6}\,dx$

389) $\int \mathfrak{ArSin}x\,dx$

390–396) Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung bzw. die Lösung der Anfangswertaufgabe:

390) $y' + \frac{1}{1-x}y = x^2$, $y(0) = 1$

391) $y' + \frac{1}{1+2x}y = 2x - 3$, $y(0) = 2$

392) $x^2y'' - 5xy' + 5y = 0$, wobei $y_1(x) = x^3$ bekannte Lösung ist.

393) $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$, wobei $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = x^2$ bekannte Lösungen sind.

394) $y'' - y = 4e^x$

395) $y'' + 7y' + 6y = \cosh(x)$

396) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$

Graphentheorie und Kombinatorik

401) (*Zur Wiederholung des Rechnens mit komplexen Zahlen.*)
Stellen Sie alle Lösungen der quadratischen Gleichung $z^2 + 2z + 4 = 0$ sowohl in der Form $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, als auch in Polarkoordinatenform $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, dar.

402) Wie Bsp. 401) für $z^2 + 4z + 8 = 0$.

403–415) Die folgenden Aufgaben sollen mit dem Inklusions-Exklusionsprinzip bearbeitet werden!

403) In einer Menge von n Personen können 10 Personen Deutsch, 7 Englisch, 5 Französisch, 6 Deutsch und Englisch, 4 Deutsch und Französisch, 3 Englisch und Französisch, 3 alle drei Sprachen und niemand keine der drei Sprachen. Wie groß ist n?

404) In einer Menge von n Personen können 13 Personen Deutsch, 8 Englisch, 7 Französisch, 5 Deutsch und Englisch, 6 Deutsch und Französisch, 3 Englisch und Französisch, 2 alle drei Sprachen und niemand keine der drei Sprachen. Wie groß ist n?

405) In einer Menge von n Personen können 10 Personen Deutsch, 9 Englisch, 9 Französisch, 5 Deutsch und Englisch, 7 Deutsch und Französisch, 4 Englisch und Französisch, 3 alle drei Sprachen und niemand keine der drei Sprachen. Wie groß ist n?

406) Wieviele natürliche Zahlen n mit $1 \leq n \leq 10^6$ gibt es, die weder Quadrat, noch dritte, vierte oder fünfte Potenz einer natürlichen Zahl sind?

407) Wieviele natürliche Zahlen n mit $1 \leq n \leq 10^8$ gibt es, die weder dritte, noch vierte, fünfte oder sechste Potenz einer natürlichen Zahl sind?

408) Wieviele natürliche Zahlen n mit $1 \leq n \leq 10^3$ gibt es, die durch 3 und 5, aber weder durch 9 noch durch 11 teilbar sind?

409) Wieviele natürliche Zahlen n mit $1 \leq n \leq 10^4$ gibt es, die durch 9 und 11, aber weder durch 5 noch durch 7 teilbar sind?

410) Wieviele natürliche Zahlen n mit $1 \leq n \leq 10^4$ gibt es, die durch 3, 5 und 7, aber weder durch 9 noch durch 11 teilbar sind?

411) Wieviele natürliche Zahlen n mit $1 \leq n \leq 10^6$ gibt es, die weder durch 2 teilbar, noch Quadratzahlen, noch dritte, noch 4. Potenzen natürlicher Zahlen sind?

412) Man bestimme die Anzahl aller Anordnungen (Permutationen) der Buchstaben `a`, `b`, `c`, `d`, `e`, `f`, `g`, in denen weder der Block „`abcd`“ noch der Block „`fa`“ vorkommt. (Hinweis: Die Anzahl der Permutationen einer n-elementigen Menge ist $n!$.)

413) Man bestimme die Anzahl aller Anordnungen (Permutationen) der Buchstaben `a`, `b`, `c`, `d`, `e`, `f`, in denen weder der Block „`bcf`“ noch der Block „`eb`“ vorkommt. (Hinweis: Die Anzahl der Permutationen einer n-elementigen Menge ist $n!$.)

414) Man bestimme die Anzahl aller Anordnungen (Permutationen) der Buchstaben `a`, `b`, `c`, `d`, `e`, `f`, `g`, `h`, in denen weder der Block „`acg`“ noch der Block „`cgbe`“ vorkommt. (Hinweis: Die Anzahl der Permutationen einer n-elementigen Menge ist $n!$.)

415) Auf wieviele Arten können 8 Türme auf ein Schachbrett gestellt werden, derart daß sie einander nicht schlagen und die weiße Diagonale freibleibt? (Ein Turm schlägt eine andere Figur, die horizontal oder vertikal auf gleicher Höhe steht, sofern keine andere Figur dazwischen steht.)

416–418) Die Eulersche φ-Funktion $\varphi(n)$ gibt die Anzahl der primen Restklassen modulo n an. $\varphi(n)$ ist also die Anzahl der Elemente der Menge $\{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leq m \leq n \text{ und } \mathrm{ggT}(m,n) = 1\}$.

416) Man bestimme $\varphi(16200) = \varphi(2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2)$.

417) Man bestimme $\varphi(3500) = \varphi(2^2 \cdot 5^3 \cdot 7)$.

418) Man bestimme $\varphi(17640) = \varphi(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2)$.