Biometrie-Aufgabe bei Prof. Hasibeder SS05
Ausgearbeitet von Murmel (Murmel.vienna@gmx.at)
Die Fehlerfreiheit dieser Lösungen kann nicht garantiert werden!

$$e_x = \frac{1}{2} + \frac{1}{l_x} \sum_{y=x+1}^{\omega} l_y$$

Aufgabe 6 (18.3.2005)
Leiten Sie die Formel für ex (die Lebenserwartung eines x-jährigen) her.

Wie e0 auch ist ex als Erwartungswert die Summe des Produkts der erreichbaren Alter mit der Wahrscheinlichkeit, in diesem Jahr zu sterben (also der Anzahl der im spezifischen Jahr [von x bis Omega] Sterbenden durch die im Jahr x Geborenen) + ½ (weil man nicht wissen kann ob die Person am Anfang oder am Ende des entsprechenden Jahres stirbt und so einfach den Mittelwert nimmt).

Hier zieht man allerdings nochmals x ab, denn das Alter x wurde bereits erreicht (wir wollen die Anzahl Jahre, die die Person noch zu leben hat, nicht das wahrscheinliche Alter, das sie erreicht). Aus diesen Überlegungen ergibt sich:

$$e_x = x * \frac{d_x}{l_x} + (x+1) * \frac{d_{x+1}}{l_x} + (x+2) * \frac{d_{x+2}}{l_x} + ... + \omega * \frac{d_\omega}{l_x} + \frac{1}{2} - x = \frac{1}{l_x} \sum_{y=x}^{\omega} \left(y * d_y \right) + \frac{1}{2} - x$$

Laut Definition ist $d_x = l_x - l_{x+1}$ und daher gilt:

$$e_x = \frac{1}{l_x} \sum_{y=x}^{\omega} \left(y * (l_y - l_{y+1}) \right) + \frac{1}{2} - x = \frac{1}{l_x} * \left[x * (l_x - l_{x+1}) + (x+1) * (l_{x+1} - l_{x+2}) + ... + \omega * (l_\omega - l_{\omega+1}) \right] + \frac{1}{2} - x$$

Wir wissen, dass $l_{\omega+1} = 0$ (denn laut Definition ist ω das maximal erreichbare Alter [ca. 120 Jahre], die Anzahl der Personen, welche das Alter ω+1 erreichen, ist daher gleich 0). Dies eingesetzt und die Gleichung ausmultipliziert ergibt:

$$e_x = \frac{1}{l_x} * \left[x * l_x - x * l_{x+1} + x * l_{x+1} - x * l_{x+2} + l_{x+1} - l_{x+2} + ... + \omega * l_{\omega-1} - \omega * l_{\omega-1} - \omega * l_\omega + l_\omega + \omega * l_\omega \right] + \frac{1}{2} - x$$

Wie man sieht, heben sich hier viele Terme auf, sodass nach dem Wegstreichen nur folgendes übrig bleibt:

$$e_x = \frac{1}{l_x} * \left[x * l_x + l_{x+1} + ... + l_\omega \right] + \frac{1}{2} - x = x + \frac{1}{l_x} \left[l_{x+1} + ... + l_\omega \right] + \frac{1}{2} - x = \frac{1}{l_x} \sum_{y=x+1}^{\omega} l_y + \frac{1}{2}$$

Das entspricht der gesuchten Formel.