Biometrie-Aufgabe bei Prof. Hasibeder SS05
Ausgearbeitet von Murmel (Murmel.vienna@gmx.at)
Die Fehlerfreiheit dieser Lösungen kann nicht garantiert werden!

$$P(|X-\mu|>k\sigma)\leq\frac{1}{k^2}\forall k$$

Aufgabe 5 (18.3.2005)
Beantworten Sie mithilfe der tschebyscheffschen Ungleichung: Wie oft muss man mit einem (idealen) Würfel würfeln, damit die relative Häufigkeit der „6" mit mindestens 95%iger Wahrscheinlichkeit um weniger als 0,01 von 1/6 abweicht? (0,16 < 1/6 < 0,18)

Es handelt sich in diesem Fall um eine Binomialverteilung mit den Parametern p = $\frac{1}{6}$ und n (gesucht), also B(n, $\frac{1}{6}$).

In der Binomialverteilung arbeiten wir mit absoluter Häufigkeit, deshalb wird bei den Berechnungen die Häufigkeit nochmals durch die Anzahl dividiert um relative Häufigkeiten wie in der Angabe zu erhalten. Es gilt:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} EX_i = \frac{n\cdot p}{n} = p = \frac{1}{6}$$

Für die Varianz gilt (mit Absolutbeträgen):

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = n\cdot p\cdot(1-p) = n\cdot p\cdot(1-p) = n\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5n}{36}$$

Und daher für die Standardabweichung (wieder in relativer Häufigkeit):

$$\sigma = \frac{\sqrt{Var(X)}}{n} = \frac{\sqrt{\frac{5n}{36}}}{n} = \frac{\sqrt{5}}{6\sqrt{n}}$$

Die tschebyscheffsche Ungleichung lässt sich über die Gegenwahrscheinlichkeit umformen, um besser unserer Problemstellung zu entsprechen:

$$P(|X-\mu|>k\sigma)\leq\frac{1}{k^2}\forall k \quad\Leftrightarrow\quad P(|X-\mu|\leq k\sigma)\geq 1-\frac{1}{k^2}\forall k$$

Setzt man die Werte hier ein, so erhält man:

$$P\left(\left|X-\frac{1}{6}\right|\leq k\frac{\sqrt{5}}{6\sqrt{n}}\right)\geq 1-\frac{1}{k^2}\forall k$$

Laut Angabe wollen wir:

$$1-\frac{1}{k^2}=0{,}95 \quad\Leftrightarrow\quad 0{,}05=\frac{1}{k^2} \quad\Leftrightarrow\quad k^2=\frac{1}{0{,}05} \quad\Leftrightarrow\quad k=\pm\sqrt{\frac{1}{0{,}05}}=\pm\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

(positiv weil |X-μ| positiv, daher muss k auch positiv sein)
Außerdem gilt:

$$k\frac{\sqrt{5}}{6\sqrt{n}}=0{,}01 \quad\Leftrightarrow\quad 2\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{6\sqrt{n}}=0{,}01 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{5}{3\sqrt{n}}=0{,}01 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{n}=\frac{5}{3\cdot 0{,}01} \quad\Leftrightarrow\quad n=\left(\frac{5}{3\cdot 0{,}01}\right)^2$$

Das ergibt n= 27777,8. Man muss also mindestens 27778mal würfeln, damit dies der Fall ist.