Biometrie-Aufgabe bei Prof. Hasibeder SS05
Ausgearbeitet von Murmel (Murmel.vienna@gmx.at)
Die Fehlerfreiheit dieser Lösungen kann nicht garantiert werden!

Aufgabe 12 (20.4.2005)

Geben Sie den Konfidenzintervall für σ² zum Niveau 1 - (α1+α2) an. Was beobachten Sie für die folgenden Spezialfälle?

a) α1 = 0
b) α2 = 0
c) α1 = α2 = α/2

(s. Punkt 8.3.4 Buch, „mathematische Herleitung“)

Bei einer normalverteilten Grundgesamtheit folgt die Zufallsvariable $\frac{(n-1)\cdot s^2}{\sigma^2}$ einer χ^2 Verteilung mit n-1 Freiheitsgraden. Es gilt daher:

$$P\left(\chi^2_{n-1;1-\alpha_2} \leq \frac{(n-1)\cdot s^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{n-1;\alpha_1}\right) = 1 - (\alpha1+\alpha2)$$

Daraus folgt, dass:

$$\chi^2_{n-1;\alpha_1} \leq \frac{(n-1)\cdot s^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{n-1;1-\alpha_2} \Leftrightarrow \frac{1}{\chi^2_{n-1;1-\alpha_2}} \leq \frac{\sigma^2}{(n-1)\cdot s^2} \leq \frac{1}{\chi^2_{n-1;\alpha_1}} \Leftrightarrow \frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{n-1;1-\alpha_2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{n-1;\alpha_1}}$$

d.h. $P\left(\sigma^2 \subset \left[\frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{n-1;1-\alpha_2}}; \frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{n-1;\alpha_1}}\right]\right) = 1-(\alpha_1+\alpha_2)$

Daher gilt für die Spezialfälle:

a) α1 = 0

$$\frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{n-1;1-\alpha_2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{n-1;0}} \Leftrightarrow 0 \leq \sigma^2 \leq +\infty$$

(weil $\chi^2_{n-1;0}$ gegen 0 geht)

b) α2 = 0

$$\frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{n-1;1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{n-1;\alpha_1}} \Leftrightarrow 0 \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{n-1;\alpha_1}}$$

(weil $\chi^2_{n-1;1}$ gegen $+\infty$ geht)

c) α1 = α2 = α/2

$$\frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}}}$$