Ausarbeitung Prüfung Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie (Universität Wien)

Prüfung 20.01.2004

Ausgearbeitet von Murmel (Murmel.vienna@gmx.at)

Beispiel 1: Kombinatorik

Eine Gruppe aus 10 Personen wählt ein Komitee mit 5 Stimmen. Wieviele Möglichkeiten gibt es?
Es gibt eine Wiederholung (jedes Mitglied kann auch mehrere Stimmen haben) daher gilt für die Anzahl der Möglichkeiten A:

$$A = \binom{n+k-1}{k} = \binom{14}{5} = 2002$$

Beispiel 2: Münze

Man wirft 20mal eine faire Münze
a) Wahrscheinlichkeit zwischen 9 und 11mal Kopf zu erhalten?
Diese Wahrscheinlichkeit ist die Summe aus den Wahrscheinlichkeiten, genau 9, 10 oder 11mal Kopf zu erhalten.

$$P(9\text{mal Kopf}) = \binom{20}{9} * \left(\frac{1}{2}\right)^{20} = 0{,}16$$

$$P(10\text{mal Kopf}) = \binom{20}{10} * \left(\frac{1}{2}\right)^{20} = 0{,}17$$

$$P(11\text{mal Kopf}) = \binom{20}{11} * \left(\frac{1}{2}\right)^{20} = 0{,}16$$

Daher gilt: $P(\text{zwischen 9 und 11mal Kopf}) = \left[\binom{20}{9} + \binom{20}{10} + \binom{20}{11}\right] * \left(\frac{1}{2}\right)^{20} = 0{,}497$

b) Wahrscheinlichkeit öfter Kopf als Adler zu erhalten?
Das bedeutet: mindestens 11mal Kopf. Aus denselben Formeln wie in A für 0 bis 9 ergibt sich:
P(öfter Kopf als Adler)

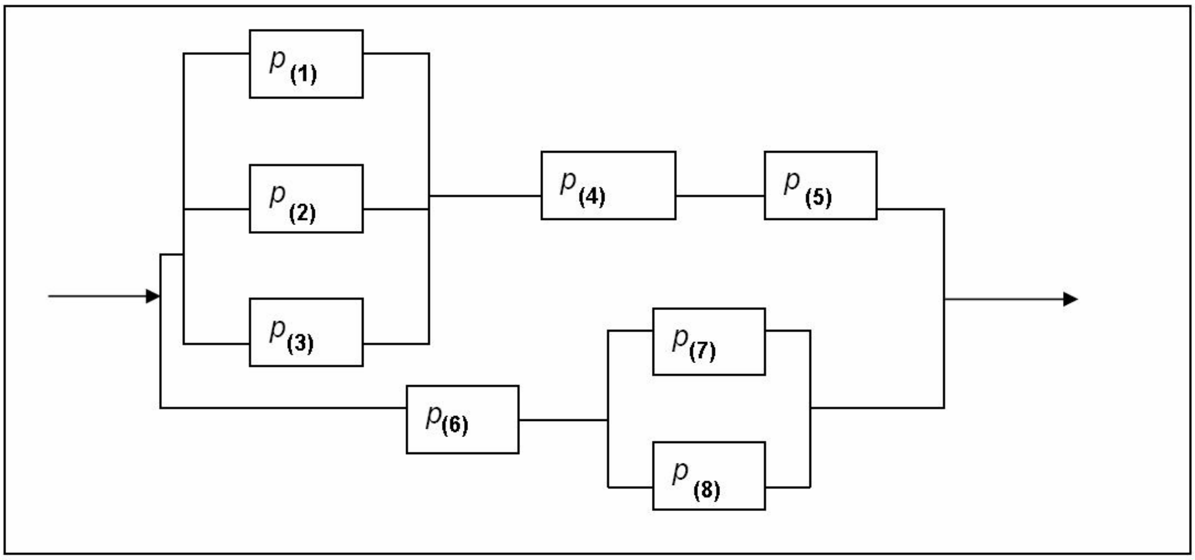
$$= \left[\binom{20}{11} + \binom{20}{12} + \binom{20}{13} + \binom{20}{14} + \binom{20}{15} + \binom{20}{16} + \binom{20}{17} + \binom{20}{18} + \binom{20}{19} + \binom{20}{20}\right] * \left(\frac{1}{2}\right)^{20} = 0{,}62$$

c) Wahrscheinlichkeit mindestens doppelt so oft Kopf wie Adler zu erhalten?
Das bedeutet: mindestens 14mal Kopf. Das ergibt:
P(mindestens doppelt so oft K)

$$= \left[\binom{20}{14} + \binom{20}{15} + \binom{20}{16} + \binom{20}{17} + \binom{20}{18} + \binom{20}{19} + \binom{20}{20}\right] * \left(\frac{1}{2}\right)^{20} = 0{,}26$$

Beispiel 3: Netzwerk

Gegeben ist unten skizziertes Netzwerk (Anm.: p ist überall gleich, Zahlen dienen dem besseren Verständnis, an welchen Schaltungen wir gerade rechnen)



a) Berechnung der Zuverlässigkeit, zunächst allgemein mit Ausfallwahrscheinlichkeit p, dann mit p = 0,2

Es geht hier darum, mittels geeigneter Formeln jeweils so lange jeweils zwei hintereinander/parallel geschaltete Komponenten zusammenzufassen, bis nur noch eine einzige übrig bleibt.

Wir verwenden dazu die folgenden Formeln (mit z = neue Gesamtzuverlässigkeit, z1 = Zuverlässigkeit der ersten Komponente, z2 = Zuverlässigkeit der zweiten Komponente):

Für eine Serienschaltung: $z = z1 * z2$

Für eine Parallelschaltung: $z = 1- (1 - z1) * (1 - z2)$

Wir wissen, dass $z = 1-p$

Daraus ergibt sich:

z1 o z2: $1- (1 - z1) * (1 - z2) = 1-(1-(1-p))(1-(1-p)) = 1-(p*p) = 1 - p^2$

[z1 o z2] o z3: $1- (1 - [z1 \text{ o } z2]) * (1 - z3) = 1- (1 - (1-p^2)) * (1 - (1-p)) = 1-(p^2*p) = 1 - p^3$

z4 o z5: $z4 * z5 = (1-p)*(1-p) = (1-p)^2 = 1 - 2p + p^2$

[z1 o z2 o z3] o [z4 o z5]: [z1 o z2 o z3] * [z4 o z5]

$= (1 - p^3) * (1 - 2p + p^2) = 1 - 2p +p^2 - p^3 + 2p^4 - p^5$

z7 o z8: $1- (1 - z7) * (1 - z8) = 1- (1 - (1-p)) * (1 - (1-p)) = 1- (p * p) = 1 - p^2$

z6 o [z7 o z8]: $z6 * [z7 \text{ o } z8] = (1-p) * (1-p^2) = 1 - p - p^2 + p^3$

[z1 o z2 o z3 o z4 o z5] o [z6 o z7 o z8]:
1- (1 - [z1 o z2 o z3 o z4 o z5]) * (1 - [z6 o z7 o z8])
$= 1- (1 – (1 – 2p + p^2 - p^3 + 2p^4 – p^5)) * (1 – (1 - p - p^2 + p^3))$
$= 1- (2p - p^2 + p^3 - 2p^4 + p^5) * (p + p^2 - p^3)$
$= 1 - 2p^2 + p^3 - p^4 + 2p^5 - p^6 - 2p^3 + p^4 - p^5 + 2p^6 – p^7 + 2p^4 – p^5 + p^6 - 2p^7 + p^8$
$= 1 - 2p^2 - p^3 + 2p^4 + 2p^6 - 3p^7 + p^8$

Setzt man p=0,2 ein, ergibt dies
$z(gesamt) = 1 - 2p^2 - p^3 + 2p^4 + 2p^6 - 3p^7 + p^8 = 0,915$

b) Berechnung der Gesamtlebensdauer, wenn jede Komponente eine Lebensdauer von G(x) besitzt

Dieser Teil löst sich analog zur Zuverlässigkeit, jedoch mit anderen Formeln.
Es geht hier darum, mittels geeigneter Formeln jeweils so lange jeweils zwei hintereinander/parallel geschaltete Komponenten zusammenzufassen, bis nur noch eine einzige übrig bleibt.
Wir verwenden dazu die folgenden Formeln (mit G(X) = neue Gesamtlebensdauer, G1(X) = Zuverlässigkeit der ersten Komponente, G2(X) = Zuverlässigkeit der zweiten Komponente):
Für eine Serienschaltung: G(X) = 1- (1 - G1(X)) * (1 - G2(X))
Für eine Parallelschaltung: G(X) = G1(X) * G2(X)

Daraus ergibt sich nach denselben Überlegungen wie a):

G1 o G2: G(X)^2

[G1 o G2] o G3: G(X)^3

G4 o G5: 2G(X) – G(X)^2

[G1 o G2 o G3] o [G4 o G5]: 2G(X) – G(X)^2 + G(X)^3 – 2G(X)^4 + G(X)^5

G7 o G8: G(X)^2

G6 o [G7 o G8]: G(X) + G(X)^2 - G(X)^3

[G1 o G2 o G3 o G4 o G5] o [G6 o G7 o G8]:
2G(X)^2 + G(X)^3 – 2G(X)^4 – 2G(X)^6 + 3G(X)^7 – G(X)^8

Beispiel 4: Untersuchung

Sie wollen eine Untersuchung über das Wundermittel BONOCULARIN durchführen, das laut Auskunft einiger ÄrztInnen das Sehvermögen von PatientInnen innerhalb eines Tages verbessert und Brillen bzw. Kontaktlinsen in gewissen Bereichen unnötig macht. Die Sehschärfe wird von OptikerInnen gemessen (Werte zwischen 0 und 100%, wobei eine höhere Prozentzahl eine höhere Sehschärfe bedeutet).
Wie legen Sie diese Untersuchung an?
Was müssen Sie beachten?
Insbesondere, wie viele PatientInnen müssen Sie mindestens testen?

Weil es einen Placebo-Effekt geben könnte, teilt man die Testpersonen in zwei Gruppen ein, von denen eine das Wundermittel und eine den Placebo erhält. Daraus ergibt sich folgende Vierfeldertafel, die Grundlage der Analyse wird:

	Verbesserung	! Verbesserung	
Bonocularin	a	b	a+b
Placebo	c	d	c+d
	a+c	b+d	a+b+c+d

Allgemein ist bei derartigen Studien auf folgendes zu achten:

Strukturgleichheit:
Die Gruppen müssen bezüglich aller wesentlichen Merkmale (mit Ausnahme des zu untersuchenden Einflussfaktors) identisch sein.
Dies kann am ehesten erreicht werden indem die Teilnehmer einer Studie aufgrund eines Zufallsverfahrens (Randomisierung) auf die Gruppen verteilt werden.
Da die Randomisierung auch nicht Strukturgleichheit garantiert, ist es gut zusätzlich vor der Randomisierung Schichten (oder Strata) zu bilden, welche aus Beobachtungseinheiten bestehen, die sich bezüglicher wichtiger Merkmale gleichen oder zumindest ähneln.(z.B. nach Altersgruppe und Geschlecht)

Beobachtungsgleichheit:
Die Gruppen müssen in derselben Weise untersucht bzw. beobachtet werden, d.h. die Beobachtungseinheiten in beiden Gruppen müssen von denselben Personen, ungefähr im selben Zeitraum und mit denselben Methoden beobachtet werden.
Dadurch soll verhindert werden, dass der Arzt oder die Patienten (bewusst oder unbewusst) die Therapieformen unterschiedlich beurteilen. Um dies zu optimieren, kann Blindung eingesetzt werden. In einer doppelblinden Studie sind weder die Ärzte noch die Patienten über die Studie informiert. Bei einer einfachblinden Studie weiß nur der Arzt Bescheid.
Wissen alle über die Therapieform Bescheid, so nennt man dies eine offene Studie.

Unsere Studie wäre daher möglichst doppelblind durchzuführen.
Will man innerhalb jeder Klasse Prozentanteile angeben, so sollte jede Klasse, um eine Aussagekraft zu besitzen, mindestens 50 Testpersonen beinhalten. Da es zwei Klassen gibt, braucht man insgesamt mindestens 100 Patienten.

Beispiel 5: ANOVA

a) Man bestimme die Quadratsumme innerhalb der Gruppen.

SSE

SSE = $\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(n_i - 1)\cdot(y_{ij} - y_{i.})^2$ = 20*1,47² + 20*1,87² + 20*2,23² = 212,614

b) Man bestimme die Quadratsumme zwischen den Gruppen

$\bar{y}_{..} = \frac{1}{r}\cdot\sum_{i=1}^{r} y_i$ = 1/3 * (4,17+6,5+5,83) = 5,5

SSM

SSM = $\sum_{i=1}^{r} n_i \cdot(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2$ = 21*(4,17-5,5)² + 21*(6,50-5,5)² + 21*(5,83-5,5)² = 60,4338

c) Man bestimme die totale Quadratsumme und erstelle eine Varianzanalysetabelle (Quadratsummenzerlegung, Mittlere Quadratsumme, F-Statistik)

SST = SSE + SSM = 212,614 + 60,4338 = 273,048

	Quadratsummen	Freiheitsgrade	Mittlere Quadratsummen	F
Model	60,4338	2	30,2169	8,527255966
Fehler	212,614	60	3,543566667	
Total	273,0478	62		

Beispiel 6: Chi² Test

In einer Untersuchung über Effektivität von drei Produktionsverfahren werden je 100 Einheiten nach jeder Methode produziert und die Ergebnisse mit den Qualitätsstufen sehr gut, durchschnittlich und schlecht bewertet. Die Ergebnisse sind in einer Tabelle dargestellt.

Ein Statistikprogramm hat für diese Tabelle den χ^2−Wert χ^2= 21,503 errechnet.
a) Wie viele Freiheitsgrade hat die Tabelle? (Begründung)
Die Freiheitsgrade errechnen sich nach Skriptum (Analyse von Häufigkeitsdaten S. 12) als $(r-1)(s-1) = (3-1)(3-1) = 4$

b) Welche Hypothesen würden Sie bei diesen Daten formulieren?
H_0: Alle Methoden sind gleichwertig.
$p_{ij} = p_{1.} * p_{.j}$ für alle Paare i,j

H_1: Mindestens eine Methode liefert ein besseres Ergebnis.
$p_{ij} \neq p_{1.} * p_{.j}$ für mindestens ein Paar i,j

c) Welchen Schluss ziehen sie, wenn sie wissen, dass der p-Wert kleiner als 0,001 ist?

Alpha	Signifikanz
0,100	schwachsignifikant
0,050	signifikant
0,010	hochsignifikant
0,001	höchstsignifikant

$p = 0,001 \leq \alpha = 0,001$ daher ist das Ergebnis höchstsignifikant.
Es wird also die Alternativhypothese angenommen.
Mindestens eine Methode ist daher besser als die anderen.

d) Auf welchem Vergleichsprinzip beruht der Test und wie berechnen sich die Vergleichswerte?
Der Test basiert auf dem Chi² Vergleichsprinzip, d.h. man berechnet die Verteilung der Summe der Quadrate von k unabhängigen standardisierten normal verteilten zufälligen Größen.

e) Welche grafischen Darstellungen empfehlen sie um das Ergebnis zu veranschaulichen?
Geeignet wären Mosaic-Plots oder Säulendiagramme.