Ausarbeitung Prüfung Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie (Universität Wien)

Prüfung 28.01.2005

Ausgearbeitet von Murmel (Murmel.vienna@gmx.at)

Beispiel 1: Theorie

Was ist der Unterschied zwischen Mittelwert und Median?
Welche Minimumseigenschaften haben Mittelwert und Median?
Erklären Sie in Worten und an einem Beispiel den Begriff Summenhäufigkeitsfunktion.
Was ist die Beziehung zwischen Mittelwert, Median und Summenhäufigkeitsfunktion?
(Quellen: http://www.uni-duisburg.de/FS/Fak2/Kuwi/docs/qdalh.doc
http://www.vwl.uni-essen.de/dt/stat/dokumente/buch/buch04.pdf)

Arithmetisches Mittel (s. auch S. 8 Kapitel „deskriptive Statistik")

Das arithmetische Mittel $\overline{x}$ ist der am meisten verwendete Lageparameter. Er ist gewöhnlich gemeint, wenn im allgemeinen Sprachgebrauch von Mittelwert oder Durchschnitt die Rede ist. Das arithmetische Mittel sollte nur für mindestens metrisch skalierte Merkmale berechnet werden.

1) Geht man von den Merkmalswerten einer Urliste aus, so ist das arithmetische Mittel als

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$ definiert.

2) Geht man von einer Häufigkeitstabelle aus, so ergibt sich für das arithmetische Mittel

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_i * x_i \quad \text{oder} \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i * x_i \, .$$

Da die einzelnen Merkmalsausprägungen mit den absoluten bzw. relativen Häufigkeiten gewichtet oder gewogen werde, liegt hier ein **gewichtetes arithmetisches Mittel** vor.

Bei klassierten Häufigkeitsverteilungen repräsentiert die Klassenmitte die gesamte Klasse. Das arithmetische Mittel besitzt vier charakteristische Eigenschaften, auf die jetzt kurz eingegangen wird.

1) Die **Summe der Abweichungen** der Merkmalswerte vom arithmetischen Mittel ist stets **Null**, d.h. $\sum_{i=1}^{n} (a_i - \overline{x}) = 0$.

2) Werden die Merkmalswerte $a_1, a_2, ..., a_n$ einer **linearen Transformation** unterworfen (z.B. Umschreibung von einer Temperaturskala in eine andere), unterliegt auch das arithmetische Mittel dieser Transformation. Es gilt: das transformierte arithmetische Mittel ist gleich dem arithmetischen Mittel der transformierten Merkmalswerte.

3) Die **Summe der quadratischen Abweichungen** von einer beliebigen Zahl *c*, d.h. der Ausdruck $\sum_{i=1}^{n} (a_i - c)^2$, wird minimal für das arithmetische Mittel. Diese Eigenschaft heißt **Minimumeigenschaft** des arithmetischen Mittels.
4) Das arithmetische Mittel ist **empfindlich gegenüber Ausreißern**, d.h. extreme Merkmalswerte können die Aussagekraft des arithmetischen Mittels erheblich einschränken. (z.B. verdienen in einer Gruppe von 10 Leuten je neun 20.000 Euro pro Jahr und eine Person 200.000 pro Jahr. Das arithmetische Mittel wäre 38.000 Euro ist aber zur Charakterisierung des durchschnittlichen Jahreseinkommens dieser Gruppe wenig geeignet.)

<u>Median (s. auch S. 9 Kapitel „deskriptive Statistik")</u>

Die Berechnung des **Medians** $\bar{x}_z$, der auch als Zentralwert bezeichnet wird, setzt ein mindestens ordinalskaliertes Merkmal voraus.

Sind $a_1, a_2, ..., a_n$ die **aufsteigend geordneten** Merkmalswerte einer **Urliste**, so ist der Median folgendermaßen definiert:

$$\bar{x}_z = \begin{cases} \bar{x}_z = a_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} & \text{falls n ungerade} \\ \bar{x}_z = \dfrac{a_{\left(\frac{n}{2}\right)} + a_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}}{2} & \text{falls n gerade} \end{cases}$$

Der Median besitzt zwei charakteristische Eigenschaften, auf die nachfolgend kurz eingegangen wird.

1) **Höchstens die Hälfte** der statistischen Einheiten hat **echt kleinere** und **höchstens die Hälfte** der statistischen Einheiten hat **echt größere** Merkmalswerte als der Median. (Das bedeutet, dass der Median genau in der Mitte der Zahlen liegt und die eine Hälfte darunter und die andere Hälfte darüber.)
2) Der Median ist **unempfindlich gegenüber Ausreißern**, d.h. extreme Merkmalswerte haben keinen wesentlichen Einfluß auf den Median.

<u>Minimumeigenschaften (s. auch S. 9 Kapitel „deskriptive Statistik")</u>

Während das arithmetische Mittel die Summe der quadrierten Abweichungen $\Sigma(x_v - M)^2$ minimiert, besitzt der Median diese Eigenschaft hinsichtlich der Summe der absoluten Abweichungen, d.h. $\Sigma|x_v - x_{\sim 0,5}|$ ist minimal. Beide Eigenschaften haben auch bei der Konstruktion von Streuungsmaßen eine Bedeutung.

<u>Summenhäufigkeiten (s. auch S. 4 Kapitel „deskriptive Statistik")</u>

Bei der Analyse statistischer Daten wird man sich in vielen Fällen nicht mit der Häufigkeitsverteilung begnügen. Bei Merkmalen, deren Ausprägungen sich ordnen lassen, wird man oft auch fragen, wie viele Beobachtungswerte insgesamt unterhalb und/oder oberhalb einer bestimmten Merkmalsausprägung liegen.
Um schnell zu einer Antwort zu gelangen, bestimmt man die kumulierten absoluten und relativen Häufigkeiten. Man bestimmt dazu für jede Merkmalsausprägung die Summe aller Häufigkeiten dieser und aller kleineren Ausprägungen. Bei klassierten Merkmalen addiert man die Häufigkeiten der Klassen.

Für die absoluten Häufigkeiten gilt: $H(x_j) = \sum_{k \leq j} h(x_k)$

Für die relativen Häufigkeiten gilt: $F(x_j) = \sum_{k \leq j} f(x_k)$

Die tabellarische oder grafische Darstellung der geordneten Merkmalsausprägungen bzw. Merkmalsklassen (obere Klassengrenzen) und der zugehörigen Summenhäufigkeiten heißt **Verteilungsfunktion** (**Summenhäufigkeitsverteilung**).

Beispiel:

Häufigkeitsverteilung

Körpergröße in cm	**$h(x_j)$**	**$f(x_j)$ (in %)**
140 bis unter 160	30	15
160 bis unter 170	80	40
170 bis unter 175	50	25
175 bis unter 180	20	10
180 bis unter 200	20	10

Summenhäufigkeitsverteilung

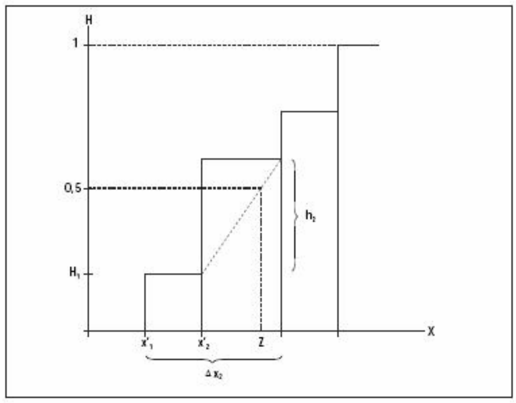
Körpergröße in cm	**$H(x_j)$**	**$F(x_j)$ (in %)**
unter 160	30	15
unter 170	110	55
unter 175	160	80
unter 180	180	90
unter 200	200	100

<u>Beziehung zwischen Mittelwert, Median und Summenhäufigkeitsfunktion (s. auch S. 9 Kapitel „deskriptive Statistik“)</u>

<u>arithmetisches Mittel und Summenhäufigkeitsfunktion:</u>

Es ist leicht zu sehen, dass bei einem nichtnegativen Merkmal X das arithmetische Mittel die Fläche zwischen der Ordinate (Häufigkeitsachse) und der Summenhäufigkeitskurve H(x) ist, bzw. die Fläche unterhalb der Resthäufigkeitskurve H-(x).

Abb. 4.9: Bestimmung des Medians mit Interpolation aus der Summenhäufigkeitskurve



<u>Median und Summenhäufigkeitsfunktion:</u>

Bei klassierten Daten wird der Median aus der Summenhäufigkeitskurve bestimmt (zur Interpolation s. Mittelwert)

Beispiel 2: Würfel

Man wirft 3mal eine unfairen (p(1)=0,1; p(2)=0,1) Würfel
a) Wahrscheinlichkeit 3mal 5 oder 3mal 6 zu würfeln?

Da die anderen Zahlen gleichwahrscheinlich und 0,8/4 = 0,2, gilt:
P = $0{,}2^3 + 0{,}2^3 = 0{,}016$

b) Wahrscheinlichkeit einer Augensumme von mindestens 16?

Das bedeutet entweder 6+6+6 6+6+5 6+6+4 oder 6+5+5
Also

$$P = 0{,}2^3 + \binom{3}{1} * 0{,}2^3 + \binom{3}{1} * 0{,}2^3 + \binom{3}{1} * 0{,}2^3 = 10 * 0{,}2^3 = 0{,}08$$

b) Wie oft muss man würfeln, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine 6 zu würfeln, mindestens 0,95 beträgt?

Das Gegenteilige Ereignis ist: KEINE 6 würfeln. Man will also, dass DIESES Ereignis höchstens 0,05 beträgt. Die Wahrscheinlichkeit, keine 6 zu würfeln, ist $0{,}8^n$ wobei n die Anzahl Würfelversuche ist. Wir wollen also:

$$0{,}8^n \leq 0{,}05$$

Durch Ausprobieren (an der TU würde man vermutlich über den Logarithmus den genauen Wert berechnen, aber das lassen wir lieber, wir haben uns ja in dieser Prüfung für die UniVie entschieden) erhält man:
$0{,}8^{14} = 0{,}044$ und $0{,}8^{13} = 0{,}055$
n=13 ergibt also noch einen zu hohen Wert, n=14 aber schon einen passenden. Man muss also mindestens 14mal würfeln.

Beispiel 3: Hazardwerttabelle

Vervollständigen Sie die Tabelle.

Wir rechnen mit den folgenden Formeln:

Hazard-Werte:

$$h_i = \frac{p_i}{1 - \sum_{k=1}^{i-1} p_k}$$

Aktueller Bestand:

$$b_i = b_{i-1} - b_{i-1} h_i$$

Monat	P(Verkauf)	Hazard	Bestand
Jänner	0,1	0,1	810
Februar	0,5	5/9	360
März	0,1	0,25	270
April	0,1	1/3	180
Mai	0,1	0,5	90
Juni	0,1	1	0

a) Wie viele Accesspoints kaufte der Händler ein?

Aus denselben Formeln ergibt sich: Anfang Jänner kaufte der Händler 900 Stück.

b) Wann kann er erwarten, dass ein beliebiger Accesspoint verkauft wird?

$$E(X) = \sum_{i=1}^{N} p \cdot Monat$$

Wir rechnen unter Annahme, dass eine Harddisk genau in der Mitte des Monats verkauft wird, da wir es nicht genauer wissen, mit den Monatswerten + 0,5

E(X) = 0.1*0.5 + 0.5*1.5 + 0.1*2.5 + 0.1*3.5 + 0.1*4.5 + 0.1*5.5 = 2,4

Somit kann er im Monat 2 (Da wir 0 für Jänner genommen haben, wäre das also März), genauer am 12.März (0,4*30), einen Verkauf erwarten.

c) Angenommen ein Accesspoint ist zu Anfang Mai noch vorhanden.
Wann kann erwartet werden, dass dieser verkauft wird?

(4 steht hier für Monat Mai, 5 für Juni)

$p(4) = p(5) = 0.1$

$p(4)+p(5) = 0.2$

$P(X=4|X \geq 4) = 0.1/0.2 = 0.5$

$P(X=5|X \geq 4) = 0.1/0.2 = 0.5$

$E(X|X \geq 4) = 4.5*0.5 + 5.5*0.5 = 5$

Anfang Juni kann der Verkauf erwartet werden.

d) Der Händler bestellt Accesspoints nach, sobald sein Bestand auf die Hälfte gesunken ist. In welchem Monat muss er nachbestellen?

Anfang Februar: 10 % verkauft

Ende Februar: 60 % verkauft -> nach 4/5 des Monats 50 %

30*4/5 = 24. Er muss also am 24.Februar nachbestellen.

e) Der Händler rechnet für die Nachbestellung eine Lieferzeit von 14 Tagen ein.
In welchem Monat muss er dann nachbestellen, wenn ein Monat 30 Tage hat?

24. Februar – 14 Tage = 10. Februar. Er muss Anfang Februar nachbestellen.

Beispiel 4: T-Test

a) Welche Annahmen wurden gemacht? Worauf muss geachtet werden?
Als Generalvoraussetzung muss angenommen werden, dass es sich um eine Zufallsstichprobe handelt. Es muss auf Beobachtungsgleichheit und Strukturgleichheit geachtet werden. Dies ergibt sich daraus, dass es sehr wichtig ist, dass die Zufallsvariablen als normalverteilt angenommen werden.

Strukturgleichheit:
Die Gruppen müssen bezüglich aller wesentlichen Merkmale (mit Ausnahme des zu untersuchenden Einflussfaktors) identisch sein.
Dies kann am ehesten erreicht werden indem die Teilnehmer einer Studie auf Grund eines Zufallsverfahrens (Randomisierung) auf die Gruppen verteilt werden.
Da die Randomisierung auch nicht Strukturgleichheit garantiert, ist es gut zusätzlich vor der Randomisierung Schichten (oder Strata) zu bilden, welche aus Beobachtungseinheiten bestehen, die sich bezüglicher wichtiger Merkmale gleichen oder zumindest ähneln.(z.B. nach Altersgruppe und Geschlecht)

Beobachtungsgleichheit:
Die Gruppen müssen in derselben Weise untersucht bzw. beobachtet werden, d.h. die Beobachtungseinheiten in beiden Gruppen müssen von denselben Personen, ungefähr im selben Zeitraum und mit denselben Methoden beobachtet werden.
Dadurch soll verhindert werden, dass der Beobachter oder die Teilnehmer (bewusst / unbewusst) die Therapieformen unterschiedlich beurteilen. Um dies zu optimieren, kann Blindung eingesetzt werden. In einer doppelblinden Studie sind weder die Beobachter noch die Teilnehmer über die Studie informiert. Bei einer einfachblinden Studie weiß nur der Beobachter Bescheid.
Wissen alle über die Therapieform Bescheid, so nennt man dies eine offene Studie.

b) Wie lauten sinnvolle Nullhypothesen bzw. Alternativen, wenn Sie die unten angeführte statistische Auswertung verwenden wollen?
Als sinnvolle Nullhypothese wäre anzunehmen, dass die Schlankheitskur keinen Unterschied macht.
Eine sinnvolle Alternativhypothese wäre, dass eine Schlankheitskur besser ist als die andere.

(Hypothesen für den zweiseitigen Test)
H_0: $\mu_A = \mu_B$
H_A: $\mu_A \neq \mu_B$

c) Was ergibt sich als Aussage dieser statistischen Auswertung? Warum?
H_0 ist abzulehnen, falls $|T| > T_{n+m-2;1-\frac{\alpha}{2}}$

$T = 2{,}55$
$T_{198;0{,}975} = 1{,}97$
Da der T-Wert kleiner als der kritische t-Wert ist, wird die Alternativhypothese angenommen. Eine Schlankheitskur ist also besser als die andere.

d) Gibt es Unterschiede in den Ergebnissen der beiden Kuren, wenn die Aussage mit 99prozentiger Sicherheit stimmen soll?

H_0 ist abzulehnen, falls $|T| > T_{n+m-2;1-\frac{\alpha}{2}}$

T = 2,55

Da wir einen zweiseitigen Test durchführen gilt:

$T_{198;0,995} = 2,6006$

Da der T-Wert größer als der kritische t-Wert ist, wird die Nullhypothese beibehalten. Die Schlankheitskuren sind gleichgut.

(Anmerkung: Würde man einen einseitigen Test durchführen, würde gelten:

$T_{198;0,99} = 2,3451$

Da der T-Wert kleiner als der kritische t-Wert ist, wird beim einseitigen Test die Alternativhypothese angenommen. Eine Schlankheitskur ist also besser als die andere.)

Beispiel 5: Chi² Test

Zwei Gruppen, die aus jeweils 50 Personen bestehen leiden an einer Krankheit. Die Gruppe A wird mit einem neuen Mittel behandelt, die Gruppe B mit dem herkömmlichen Mittel. In Gruppe A werden dabei 40 Personen gesund, in Gruppe B werden 30 Personen gesund.

a) Man teste mittels des χ^2-Test die Hypothese, dass zwischen der Wirkung der Medikamente ein Unterschied besteht. (Vergleichswert $\chi^2_{1;\,0.95} = 3,84$)

allemeines Schema:

n11	n12	n1.
n21	n22	n2.
n.1	n.2	n..

Konkrete Vierfeldertafel:

	geheilt	!geheilt	Total
Gruppe A	40	10	50
Gruppe B	30	20	50
Total	70	30	100

$$T^2 = X^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}} = n_{..}\frac{(n_{11}n_{22}-n_{12}n_{21})^2}{n_{1.}n_{2.}n_{.1}n_{.2}} = 100*(40*20 - 10*30)^2/(50*50*70*30)$$

= 4,76

$|T^2| = 4,76 > 3,84$

Es wird daher H0 verworfen und H1 angenommen, das Medikament macht also einen Unterschied.

b) Bestimme die Odds-Ratio für die Wirkung der beiden Medikamente.

$$\Psi = \frac{n_{11}n_{22}}{n_{12}n_{21}} = (40*20)/(10*30) = 2,66$$

c) Bestimme ein 95% Konfidenzintervall für die Differenz der Anteile der durch die zwei Behandlungen genesenen Patienten. ($z_{0,975} = 1,96$)

Siehe Kapitel „Analyse von Häufigkeitsdaten“ - Seite 8

$$p_1 = n_{11} / n_{1.} = 40/50 = 0{,}8$$
$$p_2 = n_{21} / n_{2.} = 30/50 = 0{,}6$$
$$\Delta = p_1 - p_2 = 0{,}8 - 0{,}6 = 0{,}2$$
$$z_{1-\alpha/2} = 1{,}96$$

Konfidenzintervall I

$$[p_1 - z_{1-\alpha/2} \cdot s_\Delta ; p_1 + z_{1-\alpha/2} \cdot s_\Delta]$$
$$s_\Delta = \sqrt{\frac{p_1 \cdot (1-p_1)}{n_{1.}}}$$
$$s_\Delta = \sqrt{\frac{0.8 * 0{,}2}{50}} = \sqrt{0{,}0032} = 0{,}056$$

[0,8 - 1,96*0,056;0,8 + 1,96*0,056] = [0,69;0,91]

Konfidenzintervall II

$$[p_2 - z_{1-\alpha/2} \cdot s_\Delta ; p_2 + z_{1-\alpha/2} \cdot s_\Delta]$$
$$s_\Delta = \sqrt{\frac{p_2 \cdot (1-p_2)}{n_{1.}}}$$
$$s_\Delta = \sqrt{\frac{0{,}6 * 0{,}4}{50}} = \sqrt{0{,}0048} = 0{,}069$$

[0,6 - 1,96*0,069;0,6 + 1,96*0,069] = [0,464;0,736]

Konfidenzintervall für die Differenz der Anteile:

$$[\Delta - z_{1-\alpha/2} \cdot s_\Delta ; \Delta + z_{1-\alpha/2} \cdot s_\Delta]$$
$$s_\Delta = \sqrt{\frac{p_1 \cdot (1-p_1)}{n_{1.}} + \frac{p_2 \cdot (1-p_2)}{n_{2.}}}$$
$$s_\Delta = \sqrt{\frac{0.8 * 0{,}2}{50} + \frac{0{,}6 * 0{,}4}{50}} == \sqrt{0{,}008} = 0{,}0894$$

[0,2-1,96*0,0894 ; 0,2+1,96*0,0894] = [0,025 ; 0,38]

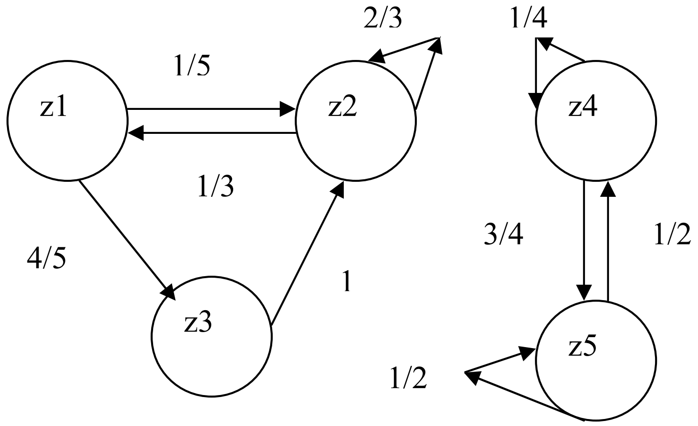
d) Welche Voraussetzungen müssen für die Berechnungen nach a) und c) gelten?
Die Ereignisse müssen voneinander unabhängig sein.

Beispiel 6: Markovkette

a) Man bestimme den Wert von * und zeichne den Graphen, der diese Markovkette repräsentiert.

Da die Zeilensumme immer 1 ergibt, gilt 1/5 + * = 1, daher * = 4/5

Benennt man die Zustände nach ihren Zeilen, ergibt sich folgender Graph:



b) Untersuchen Sie ob die Markovkette absorbierende Zustände enthält.

Da die Diagonalwerte der Matrix alle ungleich 1 sind, gibt es keine absorbierenden Zustände.

c) Ist die Markovkette irreduzibel? (Begründen Sie die Antwort)

Nein, die Kette ist reduzibel, da der Graph sich in zwei Teilgraphen aufteilt. Man kann daher z.B. vom Knoten z1 nicht in einer endlichen Anzahl Schritte den Knoten z4 erreichen, was der Definition einer irreduziblen Markovkette widerspricht.

d) Welche Zustände sind transiente Zustände, welche sind rekurrent? (Begründung)

Transiente Zustände existieren in dieser Markovkette nicht, da jeder Zustand, der verlassen wird, auch wieder erreicht werden kann.

Alle Zustände des Graphen sind rekurrente Zustände, man kann jeden davon nach dem Verlassen auch wieder erreichen.

e) Zeigen Sie, dass die Anfangsverteilung π=(0;0;0;2/5;3/5) eine stabile Anfangsverteilung ist. Ist dies die einzige stabile Anfangsverteilung?

Nach der Definition einer stabilen Anfangsverteilung π von P muss für diese nach Punkt (iii) des Existenzsatzes gelten: π * P = π

Es handelt sich hierbei um die Multiplikation von Matrizen, wir multiplizieren also die Spaltenterme von π jeweils mit den Zeilentermen einer Spalte von P, addieren diese Terme und setzen sie mit dem jeweiligen Spaltenterm von π gleich. Schreiben wir π allgemein als π = (v,w,x,y,z) ergibt sich folgendes lösbares Gleichungssystem:

$$\begin{cases} 0*v+\frac{1}{3}*w+0*x+0*y+0*z=v \\ \frac{1}{5}*v+\frac{2}{3}*w+1*x+0*y+0*z=w \\ \frac{4}{5}*v+0*w+0*x+0*y+0*z=x \\ 0*v+0*w+0*x+\frac{1}{4}*y+\frac{1}{2}*z=y \\ 0*v+0*w+0*x+\frac{3}{4}*y+\frac{1}{2}*z=z \end{cases}$$

Ein weiteres wichtiges Detail ist, dass die Summe der Terme in π genau wie die Zeilensummen der Matrix selbstverständlich auch gleich 1 sein muss. Bezieht man dies ein und vereinfacht obige Gleichungen aus, erhält man:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}*w=v \\ \frac{1}{5}*v+x=\frac{1}{3}w \\ \frac{4}{5}*v=x \\ z=\frac{3}{2}y \\ z=\frac{3}{2}y \\ v+w+x+y+z=1 \end{cases}$$

Rechnet man dies aus, müssen für π = (v,w,x,y,z) also folgende Einschränkungen gelten, damit π eine stabile Anfangsverteilung von P ist:

1. w = 3v (folgt aus der ersten Gleichung)
2. x = $\frac{4}{5}$ v (folgt aus der dritten Gleichung)
3. z = $\frac{3}{2}y$ (folgt aus vierter und fünfter Gleichung)
4. v + w + x + y + z = 1 (folgt aus letzter Gleichung)

Anm.: Die Bedingung der zweiten Gleichung wurde der Übersicht halber nicht aufgeschrieben, da sie sich sowieso aus den Bedingungen 1. und 2. ergibt.
Damit hätten wir also eine allgemeine Formel. π = (0;0;0;2/5;3/5) erfüllt alle diese Kriterien (0 = 3*0; 0 = $\frac{4}{5}$ *0; $\frac{3}{5}=\frac{3}{2}*\frac{2}{5}$; $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}$ = 1) und ist damit eine stabile Anfangsverteilung. Wie man unschwer erkennen kann, sind diese Kriterien sehr allgemein gefasst, wir könnten jederzeit andere stabile Anfangsverteilungen generieren (wenn dies gefragt wäre). Daher ist π bestimmt nicht die einzige stabile Anfangsverteilung.

Für alle Skeptiker noch ein Beispiel: (5/48; 5/16; 1/12; 1/5; 3/10) wäre ebenfalls eine stabile Anfangsverteilung. Man kann so eine stabile Anfangsverteilung leicht finden, indem man die ersten 3 Bedingungen in die 4te einsetzt und dann für die übrig bleibenden 2 Parameter passende Werte einsetzt, sodass kein negativer Wert herauskommt.