TU Wien, SS 2002

Übungsaufgaben zur Mathematik 1 für InformatikerInnen
Blatt 7

31. (a) Gegeben sind die Permutationen $\pi = (134562)$, $\rho = (1346)$ und $\sigma = (126)(35)$ der S_6. Man berechne $\pi\rho^{-1}\sigma^2$ und $\pi\rho\sigma^{-2}$.

    (b) Man schreibe die folgenden Permutationen in Zyklendarstellung bzw. als Produkt von Transpositionen, und gebe deren Vorzeichen an:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 9 & 4 & 2 & 5 & 8 & 1 & 10 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

32. Man zeige: Eine nichtleere Teilmenge U einer endlichen Gruppe G ist genau dann Untergruppe von G, wenn

$$a,b \in U \Rightarrow ab \in U$$

für alle $a,b \in G$ gilt.

33. Sei G die Menge der Permutationen {(1), (13), (24), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1234), (1432)}. Man veranschauliche G, indem man die Permutationen auf die vier Eckpunkte eines Quadrates wirken lasse und als geometrische Operationen interpretiere. Man zeige mit Hilfe dieser Interpretation, dass G eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_4 ist (Symmetriegruppe des Quadrates), und bestimme alle Untergruppen.

34. In der Symmetriegruppe des Quadrates aus Aufgabe 33 bestimme man die Rechts- bzw. Linksnebenklassenzerlegung nach einer (a) von einer Drehung, (b) von einer Spiegelung erzeugten Untergruppe.

35. Man zeige, dass für eine beliebige Menge M die Algebra $\langle P(M), \Delta, \cap \rangle$ ein kommutativer Ring mit Einselement ist. Für welche M ist dieser Ring sogar ein Körper?