

# Mathematik 1 für Informatiker

Baron

25. Jänner 2005

## 1 Praktischer Teil

1. Man untersuche, für welche reellen Zahlen  $\lambda$  die Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  linear abhängig sind.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} \lambda^2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. (a) Sei  $f : Z \rightarrow R$  eine injektive Abbildung. Welche Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie, Identität, Transitivität hat die folgende Relation auf  $Z$ ?

$$mRn \Leftrightarrow f(m) = f(n)$$

- (b) Untersuchen Sie, ob die folgende Struktur ein Ring bzw. Körper ist:  $M = \{a, b\}$  mit der Addition:

$$a + a = b, a + b = b + a = a, b + b = a$$

und der Multiplikation:

$$a.a = a, a.b = b.a = b.b = b$$

3. Man bestimme mit dem Gauss'schen Eliminationsverfahren alle Lösungen des Systems:

$$\begin{aligned} x + 3y + 2z - 2u &= 2 \\ 5x + 7y - 2z - 6u &= -6 \\ x + y - z - u &= -2 \end{aligned}$$

4. Man stelle alle Werte von

$$\frac{\sqrt{5 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 5i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}}{(i - 3)^2}$$

in der Form  $a + ib$  dar.

## 2 Theoretischer Teil

1. (4P) Gegeben eine  $(m \times n)$ -Matrix  $\mathbf{A}$  und eine  $(p \times q)$ -Matrix  $\mathbf{B}$  mit den Elementen  $a_{ij}$  und  $b_{ij}$ . Unter welchen Bedingungen ist das Matrizenprodukt  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  definiert?  
Wie berechnet man die Elemente  $c_{kl}$  von  $\mathbf{C}$ ?  
Geben Sie ein Kriterium für die Invertierbarkeit einer Matrix an!
2. (4P) Wann heißt eine Abbildung  $d : X \times X \rightarrow R$  Metrik auf der Menge  $X$ ?  
Was versteht man unter einer offenen Kugelumgebung?  
Was versteht man unter einer offenen Menge?  
Nennen Sie ein von der euklidischen Metrik verschiedenes Beispiel für eine Metrik auf  $R^2$ !
3. (4P) Wie ist die charakteristische Funktion  $\chi_A(x)$  einer Menge  $A \subseteq M$  definiert?  
Wie kann die charakteristische Funktion von  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \Delta B$  aus denjenigen der einzelnen Mengen berechnet werden?  
Wie ist  $\bigcap_{i \in I} A_i$  ( $i \in I$ ) definiert?
4. (4P) Wie lautet der Austauschsatz von Steinitz?
5. (1P) Was versteht man unter einem Monoid?
6. (1P) Seien  $V$  und  $W$  zwei Vektorräume und  $A : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Wie ist der Kern von  $A$  definiert?