Mathematik für Informatiker — Übungsbeispiele

Lineare Algebra

Die *charakteristische Funktion* $\chi_A(x)$ einer Menge A ist definiert durch

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

A heißt *Teilmenge* von B, symb. $A \subseteq B$, wenn $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$ für alle x gilt.

Zwei Mengen A und B heißen *gleich*, symb. $A = B$, wenn $\chi_A(x) = \chi_B(x)$ gilt.

Die Mengenoperationen *Durchschnitt*, *Vereinigung*, *Differenz* und *symmetrische Differenz* können dann auf folgende Weise mit Hilfe der charakteristischen Funktionen definiert werden:

$$\chi_{A\cap B}(x) = \min(\chi_A(x), \chi_B(x)), \qquad \chi_{A\setminus B}(x) = \chi_A(x) - \chi_{A\cap B}(x),$$
$$\chi_{A\cup B}(x) = \max(\chi_A(x), \chi_B(x)), \qquad \chi_{A\triangle B}(x) = (\chi_A(x) + \chi_B(x)) \bmod 2.$$

1–9) Entscheiden Sie, ob die folgenden Beziehungen richtig sind, indem Sie sie entweder mit Hilfe der entsprechenden charakteristischen Funktionen beweisen oder ein konkretes Gegenbeispiel angeben:

1) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ **2)** $A \cup (A \cap B) = A$

3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ **4)** $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$

5) $M \setminus (A \cap B) = (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$ **6)** $M \setminus (A \triangle B) = (M \setminus A) \triangle (M \setminus B)$

7) $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

8) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$ **9)** $A \triangle (B \cap C) = (A \triangle B) \cap (A \triangle C)$

10) Sei M eine nichtleere endliche Menge. Zeigen Sie, daß M gleich viele Teilmengen mit gerader Elementanzahl wie solche mit ungerader Elementanzahl besitzt, indem Sie ein Verfahren angeben, das aus den Teilmengen der einen Art umkehrbar eindeutig die der anderen Art erzeugt.

11) Es sei A eine Menge mit n Elementen und $\mathfrak{P}(A)$ die Menge aller Teilmengen der Menge A. Zeigen Sie, daß $\mathfrak{P}(A)$ 2^n Elemente besitzt.

12) Man beweise, daß die folgenden drei Aussagen äquivalent sind. (D. h., gilt eine der drei Aussagen, dann gelten alle drei.)

$$\text{(i) } A \subseteq B, \qquad \text{(ii) } A \cup B = B, \qquad \text{(iii) } A \cap B = A.$$

13–16) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Identitäten für Mengen:

13) $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (A \cap B)$.

14) $(A \times B) \cup (B \times A) = (A \cup B) \times (A \cup B)$.

15) $(A \times B) \cup (A \times C) = A \times (B \cup C)$.

16) $(A \times B) \cap (A \times C) = A \times (B \cap C)$.

17) Die Relation R sei für $m, n \in \{2,3,4,5,7,8,11,13\}$ definiert durch $mRn \Leftrightarrow m + n$ ungerade oder $m = n$. Stellen Sie R im cartesischen Koordinatensystem dar.

18) Untersuchen Sie, ob die Relation aus Aufgabe 17) eine Äquivalenzrelation ist.

19) Wie 18), jedoch für die Relation $mRn \Leftrightarrow \mathrm{ggT}(m,n) = 1$, $m, n \in \{1,2,3,\ldots\}$, wobei $\mathrm{ggT}(m,n)$ den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen m und n bezeichnet.

20) Die Relation R sei für $m, n \in \{2,3,4,5,7,8,11,13\}$ definiert durch $mRn \Leftrightarrow m + n$ gerade. Stellen Sie R im cartesischen Koordinatensystem dar.

21) Untersuchen Sie, ob die Relation aus Aufgabe 20) eine Äquivalenzrelation ist.

22) Wie 21), jedoch für die Relation $mRn \Leftrightarrow \mathrm{ggT}(m,n) = 2$, $m, n \in \{2,4,6,\ldots\}$, wobei $\mathrm{ggT}(m,n)$ den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen m und n bezeichnet.

23) Untersuchen Sie, ob die Relation $ARB \Leftrightarrow A \subseteq B$ auf der Potenzmenge einer Menge M eine Halbordnung bildet.

24) Untersuchen Sie, ob die Relation $ARB \Leftrightarrow A \triangle B = \emptyset$ ($\triangle$ die symmetrische Differenz) auf der Potenzmenge einer Menge M eine Äquivalenzrelation bildet.

25) Untersuchen Sie, ob die Relation $ARB \Leftrightarrow A \triangle B = A$ ($\triangle$ die symmetrische Differenz) auf der Potenzmenge einer Menge M eine Äquivalenzrelation bildet.

26) Sei $f : A \to B$. Man zeige, daß durch $x \equiv y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ eine Äquivalenzrelation $\equiv$ auf der Menge A definiert wird.

27) Seien R_1 und R_2 Halbordnungen auf der Menge M. Man beweise, daß dann auch ihr Durchschnitt $R = R_1 \cap R_2$ Halbordnung auf M ist.

28) Seien R_1 und R_2 Äquivalenzrelationen auf der Menge M. Man beweise, daß dann auch ihr Durchschnitt $R = R_1 \cap R_2$ Äquivalenzrelation auf M ist.

29–31) Welche der Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie, Identität und Transitivität haben folgende Relationen R auf $\mathbb{Z}$:

29) $mRn \Leftrightarrow m^2 = n^2$?

30) $mRn \Leftrightarrow m^4 = n^4$?

31) $mRn \Leftrightarrow m = n^2$?

32–42) Man beweise mittels vollständiger Induktion:

32)
$$\sum_{j=2}^{n} j(j-1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3} \qquad (n \geq 2)$$

33)
$$\sum_{j=1}^{n} j(j+1) = \frac{n}{6}(2n^2 + 6n + 4) \qquad (n \geq 1)$$

34) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{n+1} \qquad (n \geq 1)$

35) $\displaystyle\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j(j-1)} = \frac{n-1}{n} \qquad (n \geq 2)$

36) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} j2^j = 2^{n+1}(n-1) + 2 \qquad (n \geq 0)$

37) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j3^{j-1} = \frac{3^n(2n-1)+1}{4} \qquad (n \geq 1)$

38)

$$\sum_{k=1}^{n} k5^k = \frac{5}{16}(n5^{n+1} - (n+1)5^n + 1) \quad (n \geq 1)$$

39)

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{l}{3^l} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

40) Ist $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

41) Ist $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ und $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$L_n = \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

42) Ist $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$.

43–46) Man untersuche mittels vollständiger Induktion, für welche $n \geq 0$ die angegebene Ungleichung gilt:

43) $9n^3 - 3 \leq 8^n$

44) $4n^2 \leq 2^n$

45) $3n + 2^n \leq 3^n$

46) $(n+1)3^n \leq 4^n$

47) Man zeige für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n \sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)\sum_{j=1}^{k} b_j$.

48) Wo steckt der Fehler im „Beweis" der folgenden Behauptung:
Ist in einer Gruppe von Mädchen eines blond, so sind alle blond.
Beweis: a) $n = 1$: Hier stimmt die Behauptung trivialerweise.
b) Die Behauptung gelte für Gruppen der Größe n.
Nun sei von $n+1$ Mädchen eines blond. Betrachte man dieses Mädchen zusammen mit $n-1$ weiteren. Dann sind nach Induktionsannahme diese $n-1$ Mädchen auch blond. Folglich ist in der Gruppe dieser $n-1$ Mädchen zusammen mit dem noch nicht betrachteten Mädchen wieder wenigstens eines blond, woraus folgt, daß auch dieses letzte Mädchen blond sein muß.

49) Wo steckt der Fehler im „Beweis" der folgenden Behauptung:
Je zwei natürliche Zahlen a, b sind gleich groß.
Beweis: Vollständige Induktion nach dem $\max\{a, b\}$.
a) $\max\{a, b\} = 0$: Hier gilt $a = b = 0$.
b) Die Behauptung gelte für $\max\{a, b\} = n$.
Sei nun $\max\{a, b\} = n + 1$. Dann ist $\max\{a-1, b-1\} = n$, und es folgt aus der Induktionsvoraussetzung b), daß $a - 1 = b - 1$ ist, womit aber auch $a = b$ gilt.

50–60) Untersuchen Sie, ob die Menge M mit der Operation $\circ$ ein Gruppoid, eine Halbgruppe, ein Monoid bzw. eine Gruppe ist:

50) $M = \{0, 1, 2\}$, $m \circ n = \min(m + n, 2)$

51) $M = \{0, 1, 2, 3\}$, $m \circ n = \min(mn, 3)$

52) $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $m \circ n = mn$

53) $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$, $z_1 \circ z_2 = \frac{z_1 z_2}{2}$

54) $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $z_1 \circ z_2 = z_1 z_2$

55) $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$, $z_1 \circ z_2 = z_1 z_2$

56) $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2 \text{ oder } |z| = \frac{1}{2}\}$, $z_1 \circ z_2 = z_1 z_2$

57) $M = \mathfrak{P}(A)$, d. h. die Potenzmenge der Menge A, $B \circ C = B \cup C$.

58) $M = \mathfrak{P}(A)$, d. h. die Potenzmenge der Menge A, $B \circ C = B \cap C$.

59) $M = \mathfrak{P}(A)$, d. h. die Potenzmenge der Menge A, $B \circ C = B \triangle C$ (die symmetrische Differenz).

60) $M = \mathfrak{P}(A)$, d. h. die Potenzmenge der Menge A, $B \circ C = B \setminus C$ (die Mengendifferenz).

61–68) Untersuchen Sie, ob die folgenden Strukturen Halbringe, Ringe bzw. Körper sind:

61) $M = \{0, 1\}$ mit der Addition modulo 2 und dem Produkt $a \cdot b = 0$ für alle $a, b \in M$.

62) $M = \{0, 1, 2\}$ mit der Addition modulo 3 und dem Produkt $a \cdot b = 1$ für alle $a, b \in M$.

63) $M = \mathbb{Q}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ mit der Addition und Multiplikation aus $\mathbb{R}$.

64) Wie 63), jedoch $M = \mathbb{Q}[\sqrt{4}]$.

65) Wie 63), jedoch $M = \mathbb{Q}[\sqrt{7}]$.

66) Wie 63), jedoch $M = \mathbb{Q}[\sqrt{9}]$.

67) $M = \{0, 1, 2\}$ mit der Addition modulo 3 und der Multiplikation modulo 4.

68) $M = \{0, 1\}$ mit der Addition $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 1$, und der Multiplikation modulo 2.

69–74) Lösen Sie die folgenden Kongruenzen (d. h. Gleichungen in Restklassen) bzw. beweisen Sie die Unlösbarkeit:

69) a) $8x \equiv 4 \pmod{16}$, b) $8x \equiv 4 \pmod{15}$.

70) a) $6x \equiv 3 \pmod{9}$, b) $6x \equiv 4 \pmod{9}$.

71) a) $3x \equiv 9 \pmod{11}$, b) $3x \equiv 9 \pmod{12}$.

72) a) $x^2 \equiv 1 \pmod{3}$, b) $x^2 \equiv 1 \pmod{5}$.

73) a) $x^2 \equiv 2 \pmod{5}$, b) $x^2 \equiv 2 \pmod{7}$.

74) a) $x^2 - 3x + 2 \equiv 0 \pmod{5}$, b) $x^2 - 3x + 2 \equiv 0 \pmod{6}$.

75) Von der Menge $K \subseteq \mathbb{C}$ sei bekannt: i) $\mathbb{R} \subseteq K$, ii) $1 + 3i \in K$ und iii) $\langle K, +, \cdot \rangle$ ist ein Körper (mit der Addition bzw. Multiplikation aus $\mathbb{C}$). Zeigen Sie, daß $K = \mathbb{C}$ sein muß.

76) Von der Menge $K \subseteq \mathbb{C}$ sei bekannt: i) $\mathbb{R} \subseteq K$, ii) $1 - i \in K$ und iii) $\langle K, +, \cdot \rangle$ ist ein Körper (mit der Addition bzw. Multiplikation aus $\mathbb{C}$). Zeigen Sie, daß $K = \mathbb{C}$ sein muß.

77) Gibt es eine Menge K mit $\mathbb{R} \subsetneq K \subsetneq \mathbb{C}$, die mit der üblichen Addition bzw. Multiplikation einen Körper bildet? (Begründung!)

78) Bestimmen Sie alle Untergruppen der Gruppe der von 0 verschiedenen Restklassen modulo 5 mit der Multiplikation.

79) Bestimmen Sie alle Untergruppen der Gruppe der Restklassen modulo 4 mit der Addition.

80) Sei $\langle R, +, \cdot \rangle$ ein Ring mit Einselement und $E(R)$ die Menge derjenigen Elemente in R, die bezüglich der Multiplikation ein inverses Element besitzen. Zeigen Sie, daß $E(R)$ mit der Multiplikation eine Gruppe bildet (die *Einheitengruppe* von R).

81) Bestimmen Sie die Einheitengruppe (vgl. 80) des Restklassenringes $\mathbb{Z}_9$.

82) Man bestimme $E(\mathbb{Z}_6)$ und $E(\mathbb{Z}_3)$ und überprüfe, ob diese beiden Gruppen isomorph sind.

83–85) Beweisen Sie, daß die angegebene Identität in einem Ring R für alle $a, b \in R$ gilt ($-c$ bezeichnet das additive Inverse zu c):

83) $(-a)b = -(ab)$ **84)** $a(-b) = -(ab)$

85) $(-a)(-b) = ab$

86) Sei M das direkte Produkt der Gruppen $\mathbb{Z}_2$ und $\mathbb{Z}_4$, jeweils mit der Restklassenaddition. Lösen Sie in M die Gleichung $\langle 1,1\rangle + 2x = \langle 1,3\rangle$.

87) Bestimmen Sie alle Untergruppen der Gruppe M aus 86).

88) Sei M das direkte Produkt der Gruppen $\mathbb{Z}_3$ und $\mathbb{Z}_2$, jeweils mit der Restklassenaddition. Lösen Sie in M die Gleichung $\langle 1,1\rangle + 2x = \langle 2,1\rangle$.

89–94) Bildet $\mathbb{R}^2$ mit den angegebenen Operationen einen Vektorraum über $\mathbb{R}$?

89) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0)$, $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, 0)$.

90) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (0, x_2 + y_2)$, $\lambda(x_1, x_2) = (0, \lambda x_2)$.

91) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_2 + y_1, x_1 + y_2)$, $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$.

92) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_2, x_2 + y_1)$, $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$.

93) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0)$, $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, x_2)$.

94) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (0, x_2 + y_2)$, $\lambda(x_1, x_2) = (x_1, \lambda x_2)$.

95–100) Untersuchen Sie, ob W Teilraum des Vektorraums V über K ist:

95) $V = \mathbb{R}^3$, $K = \mathbb{R}$, $W = \{(x, y, z) \in V \mid x = 2y\}$.

96) $V = \mathbb{R}^3$, $K = \mathbb{R}$, $W = \{(x, y, z) \in V \mid y = -z\}$.

97) $V = \mathbb{R}^3$, $K = \mathbb{R}$, $W = \{(x, y, z) \in V \mid x + y + z = 0\}$.

98) $V = \mathbb{R}^3$, $K = \mathbb{R}$, $W = \{(x, y, z) \in V \mid xy = 0\}$.

99) V = Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ über $K = \mathbb{R}$, W die Menge aller *ungeraden* Funktionen in V, d. h. aller Funktionen f, für die gilt $f(x) = -f(-x)$.

100) V = Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ über $K = \mathbb{R}$, W die Menge aller *geraden* Funktionen in V, d. h. aller Funktionen f, für die gilt $f(x) = f(-x)$.

101) Zeigen Sie: $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ (vgl. Aufgabe 63)) bildet mit den in $\mathbb{R}$ ausgeführten Operationen Addition und Produkt mit einem Skalar einen Vektorraum über $\mathbb{Q}$.

102) Zeigen Sie: $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$ (vgl. Aufgabe 63)) bildet mit den in $\mathbb{R}$ ausgeführten Operationen Addition und Produkt mit einem Skalar einen Vektorraum über $\mathbb{Q}$.

103) Zeigen Sie: In jedem Vektorraum V über dem Körper K gilt $\lambda \cdot \mathfrak{o} = \mathfrak{o}$ für alle $\lambda \in K$.

104) Zeigen Sie: In jedem Vektorraum V gilt $0 \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ für alle $\mathfrak{a} \in V$.

105–107) Zeigen Sie, daß in jedem Vektorraum V über dem Körper K für alle $\mathfrak{a} \in V$, $\lambda \in K$ gilt:

105) $(-\lambda)\mathfrak{a} = -(\lambda\mathfrak{a})$ **106)** $\lambda(-\mathfrak{a}) = -(\lambda\mathfrak{a})$

107) $(-\lambda)(-\mathfrak{a}) = \lambda\mathfrak{a}$

108) Zeigen Sie: Die Menge aller Polynome $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ vom Grad kleiner gleich 4 mit Koeffizienten a_i aus $\mathbb{Q}$ bildet mit der üblichen Addition und dem üblichen Produkt mit einem Skalar einen Vektorraum über $\mathbb{Q}$.

109) Bestimmen Sie den kleinsten Teilraum des Vektorraumes aus 108) der die Polynome x und x^3 enthält.

110) Bestimmen Sie den kleinsten Teilraum des Vektorraumes aus 108) der die Polynome $x - x^2$ und $x + x^3$ enthält.

111) Zeigen Sie: Die Menge aller Polynome $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ vom Grad kleiner gleich 3 mit Koeffizienten a_i aus $\mathbb{R}$ bildet mit der üblichen Addition und dem üblichen Produkt mit einem Skalar einen Vektorraum über $\mathbb{R}$.

112) Bestimmen Sie den kleinsten Teilraum des Vektorraumes aus 111) der die Polynome x und x^2 enthält.

113) Bestimmen Sie den kleinsten Teilraum des Vektorraumes aus 111) der die Polynome $2x^2 - x^3$ und $x^2 + 3x^3$ enthält.

114–120) Beschreiben Sie die angegebene Punktmenge W des $\mathbb{R}^3$ geometrisch, und untersuchen Sie, ob W ein Teilraum des $\mathbb{R}^3$ ist.

114) $W = \{(x, y, z) \mid x + y + z \leq 0\}$ **115)** $W = \{(x, y, z) \mid x + y + z \geq 0\}$

116) $W = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$ **117)** $W = \{(x, y, z) \mid x = 2z\}$

118) $W = \{(x, y, z) \mid x = -z\}$ **119)** $W = \{(x, y, z) \mid xy = 0\}$

120) $W = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\}$

121) Zeigen Sie, daß $B = \{(1,2,4), (2,4,1), (4,2,1)\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

122) Tauschen Sie mit Hilfe des Austauschsatzes von Steinitz zwei der Vektoren der Basis B aus 121) gegen die Vektoren $(-1,0,1), (3,2,1)$ aus, sodaß wieder eine Basis entsteht.

123) Zeigen Sie, daß $B = \{(1,1,0), (2,3,3), (3,3,2)\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

124) Tauschen Sie mit Hilfe des Austauschsatzes von Steinitz zwei der Vektoren der Basis B aus 123) gegen die Vektoren $(-1,0,1), (1,2,1)$ aus, sodaß wieder eine Basis entsteht.

125) Zeigen Sie, daß $B = \{(1,2,3), (2,3,1), (3,2,1)\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

126) Tauschen Sie mit Hilfe des Austauschsatzes von Steinitz zwei der Vektoren der Basis B aus 125) gegen die Vektoren $(-1,0,1), (4,2,1)$ aus, sodaß wieder eine Basis entsteht.

127) Zeigen Sie, daß die Vektoren $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ eines Vektorraumes genau dann linear unabhängig sind, wenn $\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_3$ linear unabhängig sind.

128) Zeigen Sie, daß die Vektoren $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ eines Vektorraumes genau dann linear unabhängig sind, wenn $\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_3$ linear unabhängig sind.

129) Zeigen Sie, daß die Vektoren $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ eines Vektorraumes genau dann linear unabhängig sind, wenn $\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_3$ linear unabhängig sind.

130–132) Untersuchen Sie, ob die angegebene Abbildung A von $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung ist.

130) $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x_1 + 5x_2 \\ x_1 - 2x_3 \end{pmatrix}$ **131)** $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 5x_2 \\ x_1 - 3x_3 \end{pmatrix}$

132) $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 5x_2 - x_3 \\ -3x_2 \end{pmatrix}$

133) Sei $V = \mathbb{C}^3$, $U = \{(z_1, z_2, z_3) \in V \mid z_1 + z_2 = z_3\}$, $W = \{(z_1, z_2, z_3) \in V \mid z_2 = -z_1\}$. Zeigen Sie, daß U und W Teilräume von V sind und bestimmen Sie deren Dimension.

134) Bestimmen Sie für U und W aus Aufgabe 133) $\dim(U + W)$ sowie $\dim(U \cap W)$ und verifizieren Sie die Beziehung $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.

135) Sei $V = \mathbb{C}^3$, $U = \{(z_1, z_2, z_3) \in V \mid z_1 - z_2 = z_3\}$, $W = \{(z_1, z_2, z_3) \in V \mid z_2 = z_1\}$. Zeigen Sie, daß U und W Teilräume von V sind und bestimmen Sie deren Dimension.

136) Bestimmen Sie für U und W aus Aufgabe 135) $\dim(U + W)$ sowie $\dim(U \cap W)$ und verifizieren Sie die Beziehung $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.

137) Sei $V = \mathbb{C}^3$, $U = \{(z_1, z_2, z_3) \in V \mid z_1 = 2z_2 = 3z_3\}$, $W = \{(z_1, z_2, z_3) \in V \mid z_2 = 0\}$. Zeigen Sie, daß U und W Teilräume von V sind und bestimmen Sie deren Dimension.

138) Bestimmen Sie für U und W aus Aufgabe 137) $\dim(U + W)$ sowie $\dim(U \cap W)$ und verifizieren Sie die Beziehung $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.

139) Sei $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie Kern A und dim(Kern A).

140) Bestimmen Sie zu Beispiel 139) $A(\mathbb{R}^2)$ sowie Rang A und verifizieren Sie die Beziehung $\dim(\operatorname{Kern} A) + \operatorname{Rang} A = \dim \mathbb{R}^2$.

141) Bestimmen Sie für die lineare Abbildung A aus 139) und 140) die Matrix bezüglich der kanonischen Basis.

142) Sei $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie Kern A und dim(Kern A).

143) Bestimmen Sie zu Beispiel 142) $A(\mathbb{R}^2)$ sowie Rang A und verifizieren Sie die Beziehung $\dim(\operatorname{Kern} A) + \operatorname{Rang} A = \dim \mathbb{R}^2$.

144) Bestimmen Sie für die lineare Abbildung A aus 142) und 143) die Matrix bezüglich der kanonischen Basis.

145) Sei $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie Kern A und dim(Kern A).

146) Bestimmen Sie zu Beispiel 145) $A(\mathbb{R}^2)$ sowie Rang A und verifizieren Sie die Beziehung $\dim(\operatorname{Kern} A) + \operatorname{Rang} A = \dim \mathbb{R}^2$.

147) Bestimmen Sie für die lineare Abbildung A aus 145) und 146) die Matrix bezüglich der kanonischen Basis.

148) Sei $V = \mathbb{R}_n[x]$ der Vektorraum der Polynome in x vom Grad $\leq n$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$. Sei weiters eine Abbildung D definiert durch

$$D\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}.$$

Untersuchen Sie, ob D eine lineare Abbildung, ein Monomorphismus bzw. ein Epimorphismus von V in V ist.

149) Wie 148) für die Abbildung $E(p(x)) = p(x + 1)$.

150) Bestimmen Sie die Matrix der linearen Abbildung D aus Aufgabe 148) bezüglich der Basis $B = \{x^0, x^1, \ldots, x^n\}$ von V.

151) Sei $V = \mathbb{R}[x]$ der Vektorraum der Polynome in x mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$. Sei weiters eine Abbildung I definiert durch

$$I\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Untersuchen Sie, ob I eine lineare Abbildung, ein Monomorphismus bzw. ein Epimorphismus von V in V ist.

152) Wie 151) für die Abbildung $S(p(x)) = p(x - 1)$.

153) Sei $V = \mathbb{R}_n[x]$ der Vektorraum der Polynome in x vom Grad $\leq n$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$. Sei weiters eine Abbildung A definiert durch

$$A\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k x^{k-2}.$$

Zeigen sie, daß A linear ist und bestimmen Sie die Matrix von A bezüglich der Basis $B = \{x^0, x^1, \ldots, x^n\}$ von V.

154–163) Bestimmen Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren die Lösung des Gleichungssystems über dem Körper K:

154) $K = \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 &= 1 \end{aligned}$$

155) Wie 154), jedoch $K = \mathbb{Z}_2$.

156) $K = \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} -3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ -5x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 1 \end{aligned}$$

157) Wie 156), jedoch $K = \mathbb{Z}_2$.

158) $K = \mathbb{Q}$,

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 &= 1 \\ 7x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 &= 7 \end{aligned}$$

159) Wie 158), jedoch $K = \mathbb{Z}_3$.

160) $K = \mathbb{Q}$,

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 1 \\ 4x_1 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

161) Wie 160), jedoch $K = \mathbb{Z}_3$.

162) $K = \mathbb{Q}$,

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 5 \\ 3x_1 + x_3 &= 4 \\ - x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

163) Wie 162), jedoch $K = \mathbb{Z}_{11}$.

164) Sei $n \geq 1$. Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix über $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & \dots & 3n-1 \\ 5 & 8 & 11 & \dots & 3n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 3n-1 & 3n+2 & 3n+5 & \dots & 6n-4 \end{pmatrix}.$$

165) Sei $n \geq 1$. Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix über $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 & \dots & 4n-2 \\ 6 & 10 & 14 & \dots & 4n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 4n-2 & 4n+2 & 4n+6 & \dots & 8n-6 \end{pmatrix}.$$

166) Berechnen Sie die Matrix $\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\mathfrak{A}$ für

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

167) Bestimmen Sie die inverse Matrix $\mathfrak{A}^{-1}$ zur Matrix $\mathfrak{A}$ aus 166).

168) Berechnen Sie die Matrix $\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\mathfrak{A}$ für

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

169) Bestimmen Sie die inverse Matrix $\mathfrak{A}^{-1}$ zur Matrix $\mathfrak{A}$ aus 168).

170) Berechnen Sie zur folgenden Matrix $\mathfrak{A}$ mit Eintragungen aus $\mathbb{R}$ die Matrix $\mathfrak{A}^3$:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{pmatrix}.$$

171) Berechnen Sie zur folgenden Matrix $\mathfrak{A}$ mit Eintragungen aus $\mathbb{R}$ die Matrix $\mathfrak{A}^3$:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

172) Bestimmen Sie zur folgenden Permutation π die Zyklendarstellung, das Vorzeichen, sowie die inverse Permutation π^{-1}:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ 8\,9\,1\,7\,2\,5\,4\,3\,6 \end{pmatrix}.$$

173) Sei eine Permutation π von $\{1, 2, \dots, n\}$ in zweizeiliger Darstellung gegeben. Unter der Inversionstafel von π versteht man die Folge $(b_1, \dots, b_n)$, wobei $b_k \geq 0$ angibt, wieviele größere Zahlen in der zweiten Zeile links vom Element k stehen. Bestimmen Sie für die Permutation π aus Aufgabe 172) die Inversionstafel und geben Sie an, wie man aus derselben die Permutation rekonstruieren kann.

174) Bestimmen Sie zur folgenden Permutation π die Zyklendarstellung, das Vorzeichen, sowie die inverse Permutation π^{-1}:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ 3\,5\,8\,7\,6\,9\,4\,1\,2 \end{pmatrix}.$$

175) Schreiben Sie die Zyklendarstellung der Permutation π aus Aufgabe 174) so an, daß in jedem Zyklus das kleinste Element an erster Stelle steht, wir nennen es den Zyklenführer, und die Zyklen untereinander nach absteigender Größe ihrer Zyklenführer angeordnet sind. Zeigen Sie, daß man nun die Klammern in der Zyklendarstellung weglassen kann und die Permutation π dennoch rekonstruierbar bleibt (klammernlose Zyklendarstellung).

176) Für die Matrizen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ aus 166 bestimme man $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und verifiziere den Determinantensatz $\det \mathfrak{C} = \det \mathfrak{A} \cdot \det \mathfrak{B}$.

177) Für die Matrizen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ aus 168 bestimme man $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und verifiziere den Determinantensatz $\det \mathfrak{C} = \det \mathfrak{A} \cdot \det \mathfrak{B}$.

178) Man berechne $\det \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 6 \end{pmatrix}$.

179) Man berechne $\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

180–181) Für welche $x \in \mathbb{Q}$ ist die Matrix $\mathfrak{A}$ singulär?

180) $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} x & 2 & 2 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & x & -1 \end{pmatrix}$ **181)** $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 3 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \\ x & -1 & 0 \end{pmatrix}$

182–183) Über welchem Körper $\mathbb{Z}_p$ (p Primzahl) ist die Matrix $\mathfrak{A}$ singulär?

182) $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 9 \\ 9 & 3 & 10 \end{pmatrix}$ **183)** $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

184–187) Man bestimme die Eigenwerte der Matrix $\mathfrak{A}$:

184) $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ **185)** $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

186) $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ **187)** $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 10 \\ -8 & 11 & 2 \\ 10 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

188) Bestimmen Sie einen Wert $a \in \mathbb{Z}$, sodaß die quadratische Form $3x^2 + axy + 2xz + 2y^2 + 2yz + 2z^2$ positiv definit ist.

189) Wie 188 für $x^2 + axy + 3xz + y^2 - 2yz + 4z^2$.

190) Aus der Basis $B = \{(2,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$ des $\mathbb{R}^3$ soll mittels Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt eine Orthonormalbasis gebildet werden (wobei das gewöhnliche innere Produkt zugrunde zu legen ist).

191) Wie 190 für $B = \{(1,2,3),(0,1,0),(1,2,2)\}$.

Analysis

201) Man bestimme rechnerisch (ohne Taschenrechner) und graphisch Summe und Produkt der komplexen Zahlen $z_1 = 3 - 4i$ und $z_2 = [2, \frac{\pi}{2}]$.

202) Wie bei 201) für $z_1 = 4 + 5i$ und $z_2 = [2, -\frac{\pi}{4}]$.

203) Wie bei 201) für $z_1 = 5 + 2i$ und $z_2 = [3, \frac{\pi}{2}]$.

204) Man berechne ohne Taschenrechner alle Werte von $\sqrt[4]{1+i}$ in der Form $[r, \varphi]$.

205) Wie bei 204) für $\sqrt[5]{18 - 6\sqrt{3}i}$.

206) Wie bei 204) für $\sqrt[3]{-i}$.

207) Wie bei 204) für $\sqrt[5]{\sqrt{2} - \sqrt{6}i}$.

208) Man beweise $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ und $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$.

209) Man beweise $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

210) Man beweise $N\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{N(z_1)}{N(z_2)}$.

211) Man beweise $N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2)$.

212) Für welche komplexe Zahlen gilt $\overline{z} = \frac{1}{z}$?

213) Man zeige $\left|\frac{z_1 + z_2}{2}\right|^2 + \left|\frac{z_1 - z_2}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.

214) Man beschreibe die Menge jener komplexen Zahlen z, die $\mathfrak{Re}\left(\frac{z-a}{b}\right) > 0$ erfüllen ($a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$).

215) Man beschreibe die Menge jener komplexen Zahlen z, die $\mathfrak{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right) > 0$ erfüllen ($a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$).

216–217) Welche Teilmenge der komplexen Zahlenebene beschreibt die angegebene Ungleichung?

216) $\left|\frac{z+4}{z-4}\right| < 3$ **217)** $\left|\frac{z+5}{z}\right| < 4$

218) Man berechne alle Werte von $\sqrt{7 + 24i} = a + ib$ ohne Benützung der trigonometrischen Darstellung. (Hinweis: Man quadriere die zu lösende Gleichung und vergleiche Real- und Imaginärteile.)

219) Wie Bsp. 218) für $\sqrt{8 - 6i} = a + ib$.

220) Man zeige: $(\mathbb{C}, \preceq)$ ist Halbordnung mit $z = a + ib \preceq w = c + id$, falls $a < c$ oder ($a = c$ und $b \leq d$). Weiters gebe man drei verschiedene komplexe Zahlen $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ an, für die $z_1 \preceq z_2$ und $z_3 \succeq 0$, aber $z_3 z_1 \succeq z_3 z_2$ gelten.

221) Man zeige: $(\mathbb{C}, \preceq)$ ist Halbordnung mit $z = a + ib \succeq w = c + id$, falls $a > c$ oder ($a = c$ und $b \geq d$). Weiters gebe man drei verschiedene komplexe Zahlen $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ an, für die $z_1 \succeq z_2$ und $z_3 \preceq 0$, aber $z_3 z_1 \succeq z_3 z_2$ gelten.

222) Seien (X_i, d_i), $i = 1, \ldots, n$, metrische Räume. Man zeige, daß dann auf $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ durch $d((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \max_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i)$ ebenfalls eine Metrik definiert wird.

223) Man wähle in Bsp. 222) $n = 2$, $X_1 = \mathbb{R}$, $X_2 = \mathbb{R}^2$ mit der jeweiligen Euklidischen Metrik und beschreibe die Kugelumgebungen in $X_1 \times X_2$.

224) Seien (X_i, d_i), $i = 1, \ldots, n$, metrische Räume. Man zeige, daß dann auf $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ durch $d((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)$ ebenfalls eine Metrik definiert wird.

225) Man wähle in Bsp. 224) $n = 2$, $X_1 = \mathbb{R}^2$, $X_2 = \mathbb{R}$ mit der jeweiligen Euklidischen Metrik und beschreibe die Kugelumgebungen in $X_1 \times X_2$.

226) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Man zeige, daß dann auch

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

Metrik auf X ist.

227) Man bestimme bezüglich d' aus Bsp. 226) alle beschränkten Mengen.

228) Man zeige: Ist d eine Metrik auf X, so ist auch durch $d'(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$ eine Metrik auf X festgelegt. Man bestimme weiters für d' die Mengen $K(x_0, 2)$, $x_0 \in X$.

229) Man bestimme bezüglich d' aus Bsp. 228) alle beschränkten Mengen.

230) Sei $f : Y \to X$ injektiv und (X, d) metrischer Raum. Man zeige, daß durch $d''(y_1, y_2) = d(f(y_1), f(y_2))$ eine Metrik auf Y definiert wird.

231) Sei (X, d) metrischer Raum und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend (d. h. $f(a) < f(b)$ für $a < b$) mit $f(0) = 0$ und $f(a + b) \leq f(a) + f(b)$. Man zeige, daß dann auch $d''(x, y) = f(d(x, y))$ eine Metrik auf X ist.