

lineare Abbildung: $A: K^n \rightarrow K^p$
 A bezogen auf die kanonische Basen in
 diesen VR

$$A(v) = y \quad A \cdot v = y$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pn}x_n = y_p \end{cases} \quad \text{Rechte Seite des Gleichungssystems}$$

Bei gegebenen y_1, \dots, y_p und gesuchten x_1, \dots, x_n
 (Unbekannte) ein Gleichungssystem (lineares
 Gleichungssystem)

1. n Unbekannte x_1, \dots, x_n
 p Gleichungen

Koeffizienten $a_{11} \dots a_{pn}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

Systemmatrix

Rechte Seite 0:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$U \cdot x = r$$

\Rightarrow homogenes lineares Gleichungssystem

$y \neq 0$: inhomogenes lineares Gleichungssystem

$$U \cdot x = r$$

Gesamtheit der Lösungen: Kern A

Gauß'sches Eliminationsverfahren

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

$$U \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} & b_p \end{array} \right)$$

$(U ; b)$ erweiterte Systemmatrix

Benötige Operationen mit dem Gleichungssystem, so dass das „neue“ Gleichungssystem dieselben Lösungen hat wie das ursprüngliche.

(Lösungäquivalente Gleichungssysteme)

- Op. 1: Vertauschen von Gleichungen,
d. h. Vertauschen von Zeilen (von zwei Zeilen)
der erweiterten Systemmatrix.
- Op. 2: Vertauschen von (zwei) Spalten der Systemmatrix.
(Achtung: Vorneben, dass die Reihenfolge der
Unbekannten x_1, \dots, x_n geändert ist.)
- Op. 3: a) eine Gleichung (eine Zeile der erweiterten
Systemmatrix) mit einem Skalar $\lambda \in K$,
 $\lambda \neq 0$ multiplizieren.

b) Eine Zeile zu einer anderen Zeile addieren

$$\begin{aligned} z_1, z_2 &\rightarrow z_1, z'_2 = z_1 + z_2 \rightarrow z_1, z'_2 - z_1 = z_2 \\ &\rightarrow -z_1, z'_2 \\ &\rightarrow z_1, z'_2 + (-z_1) = z_2 \end{aligned}$$

a, b, \rightarrow Op. 3: Ein Vielfaches einer Zeile zu
einer anderen Zeile addieren (oder subtrahieren)

Triviales Gleichungssystem: $A = 0$

$$A(x) = 0 \cdot x = 0 \quad \text{Nullabbildung}$$

Fall 1: $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix} = 0$

d. h. mindestens ein $b_i \neq 0$

\Rightarrow Gleichungssystem nicht lösbar

Lösungsmenge: $L = \emptyset$

Fall 2: $b = 0$ (homogenes Gleichungssystem)

\Rightarrow Lösungsmenge: $L = K^n$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q_n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q_n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq_n} & b_p \end{array} \right)$$

Fall 1, $a_{11} \neq 0$ später

Fall 2, $a_{11} = 0$

Suche in 1. Spalte, ob $a_{i1} \neq 0$

Fall 2a, es existiert ein $a_{i1} \neq 0$

Op. 1: \leftrightarrow Vertauschen der Zeilen 1 und i

Fall 2b, es existiert kein $a_{i1} \neq 0$

Suche in 1. Zeile, ob $a_{1j} \neq 0$

Fall 2b α : es existiert ein $a_{1j} \neq 0$

Op. 2: Vertauschen der Spalten 1 und j

Fall 2b β : es existiert kein $a_{1j} \neq 0$

1. Gleichung: $0x_1 + \dots + 0x_{q_n} = b_1$

Fall 2b β i: $b_1 \neq 0 \Rightarrow L = \emptyset$

Fall 2b β ii: $b_1 = 0$ 1. Gleichung streichen
 \Rightarrow nun mehr $p-1$ Gleichungen
 irgendwann: in erster Zeile ein Element

$$a'_{1j} \neq 0$$

also Fall 2b α \rightarrow Fall 1

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} & b_p \end{array} \right)$$

Fall 1, $a_{11} \neq 0$

Op. 3: 2. Zeile $a_{21} \rightarrow a'_{21} = 0$

$$z'_2 = z_2 - \lambda \cdot z_1$$

$$a'_{21} = a_{21} - \lambda a_{11} = 0 \quad ; \quad a_{11} \neq 0$$

$$\lambda = a_{21} \cdot a_{11}^{-1} = a_{11}^{-1} \cdot a_{21}$$

$$= \frac{a_{21}}{a_{11}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{p2} & \dots & a'_{pn} & b'_p \end{array} \right)$$

$$a'_{2j} = a_{2j} - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot a_{1j} \quad 1 \leq j \leq n$$

$$a'_{22} = 0 \quad (\text{Fall 2})$$

sonst Fall 1

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & \dots & a''_{3n} & b''_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a'_{p3} & \dots & a'_{pn} & b'_p \end{array} \right)$$

$$c_{11} \quad c_{12} \quad \dots \quad c_{1s} \quad \dots \quad c_{1qn}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1s} & \dots & c_{1qn} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2s} & \dots & c_{2qn} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{ss} & \dots & c_{sqn} & d_s \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & d_{s+1} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & d_p \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} c_{11} \neq 0 \\ c_{22} \neq 0 \\ \vdots \\ c_{ss} \neq 0 \end{array}$$

Ist $s < p$ und d_{s+1}, \dots, d_p nicht alle gleich 0,
 ist das Gleichungssystem nicht lösbar:
 $L = \emptyset$

Ist $s = p$ oder $s < p$ und $d_{s+1} = d_{s+2} = \dots = d_p = 0$,
 dann ist das Gleichungssystem lösbar.

\Rightarrow Zeilen ab $s+1$ uninteressant
 unterhalb der Diagonale nur 0
 in der Diagonale $c_{11}, c_{22}, \dots, c_{ss}$ alle $\neq 0$

Wir wissen: Wir benötigen eine Lösung des in-
homogenen Systems und eine Basis des
 Kern A , d.h. entsprechend viele l.u. Lösungen
 des homogenen Systems

$$c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \dots + c_{1q}y_q = d_1$$

Wobei y_1, y_2, \dots, y_q die x_1, x_2, \dots, x_n in einer eventuell neuen Reihenfolge sind (Folge von Q. 2)

$$c_{21}y_1 + \dots + c_{2s}y_s + \dots + c_{2q}y_q = d_2$$

$$c_{22}y_2 + \dots + c_{2s}y_s + c_{2s+1}y_{s+1} + \dots + c_{2q}y_q = d_2$$

$$\vdots$$

$$c_{ss}y_s + c_{ss+1}y_{s+1} + \dots + c_{sq}y_q = d_s$$

$$\underline{c_{ii} \neq 0}$$

$$y_s = f_s(y_{s+1}, \dots, y_q)$$

$$y_{s-1} = f_{s-1}(y_{s+1}, \dots, y_q)$$

$$\vdots$$

$$y_1 = f_1(y_{s+1}, \dots, y_q)$$

Bestimmung der einen Lösung des inhomogenen Systems (partikuläre Lösungen des inhomogenen Systems):

Wir wählen y_{s+1}, \dots, y_q speziell:

$$y_{s+1} = \dots = y_q = 0$$

$$y_s = \frac{d_s}{c_{ss}}$$

$$c_{s-1,s-1} = y_{s-1} c_{s-1,s-1} \cdot \frac{d_s}{c_{ss}} = c_{s-1}$$

$$y_{s-1} = \dots$$

$$y_p = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_s \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & n-n & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Kern A: Lösungen des homogenen Systems
(d. h. $RS=0$)

Spezielle Werte für $y_{s+1} + \dots + y_q$ wählen

→ Basis für Kern A

$$\begin{matrix} y_{s+1} \\ \vdots \\ y_q \end{matrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\dim(\text{Kern } A) = q - s$$

$$\dim U = q$$

$$\Rightarrow \dim A(U) = \text{Rg } A = \underline{s}$$

(Abbildungsgrad
der Matrix A)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 5 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 11 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & -2 & -1 & 11 \end{array} \right)$$

$$z_2 - 2 \cdot z_1; \quad z_3 - 4 \cdot z_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

$$z_3 - z_2$$

$$\boxed{\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -1 \end{array}}$$

partikuläre Lösung:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \quad (\text{inhomogenes System})$$

$$\begin{array}{cccc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \quad (\text{homogenes System})$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Prüfungen: 25.1. 16⁰⁰ Radliger HS

18.3. 8³⁰ 2S 3

6.5. 8³⁰ 2S 3

17.6. 8³⁰ 2S 3

Anmeldung ab 10.1. in den Übungen (für 25.1.)

lineare Gleichungssysteme

$$Ax = b$$

$$A = (a_{ij})$$

$$p \times q$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

Gauß'sches Eliminationsverfahren:

$$L_y = I$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} c_{11} & \dots & c_{1s} & c_{1,s+1} & \dots & c_{1q} \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & c_{ss} & c_{s,s+1} & \dots & c_{sq} \\ & & 0 & & & c_{pq} \end{array} \right) \left| \begin{array}{c} d_1 \\ \vdots \\ d_s \\ d_{s+1} \\ \vdots \\ d_p \end{array} \right.$$

$c_{11}, \dots, c_{ss} \neq 0$
 $d_{s+1}, \dots, d_p \neq 0$
 $\Rightarrow L = p$

$$d_{s+1} = \dots = d_p = 0$$

Lösungen des inhomogenen Systems: $y_{s+1} = \dots = y_p = 0$
(partikuläre Lösung)

Kern A Lösungen des homogenen Systems

$$\begin{array}{cccc} y_{s+1} & & \dots & y_p \\ 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}$$

$$\dim \text{Kern A} = \underline{q - s}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_{1,s+1}^* & \dots & c_{1,q}^* \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & c_{s-1,s+1}^* & \dots & c_{s-1,q}^* \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & c_{s,s+1}^* & \dots & c_{s,q}^* \\ & & & & 0 & \vdots & & \vdots \\ & & & & 0 & \vdots & & \vdots \end{array} \right) \begin{array}{l} d_1^* \\ \vdots \\ d_{s-1}^* \\ d_s^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \begin{array}{l} s-1 \\ \\ 0 \end{array}$$

$y_1, \dots, y_{s-1}, -1, 0, \dots, 0$
 $y_1, \dots, y_s, 0, -1, 0, \dots, 0$
 \vdots
 $(y_1^*, \dots, y_s^*, 0, \dots, 0)$
 partikuläre Lösung

Basis des Lösungsraums
des homogenen Systems

\Rightarrow Erweitertes Gauß'sches Eliminationsverfahren

$$\dim(\text{Kern } A) = q - r$$

$$\dim U = q \quad (U = K^q)$$

$$\Rightarrow \text{Rang } A = r$$

$$\text{Rang } A = \dim A(U)$$

α : Abbildungsmatrix zu A :

Spaltenvektoren: Bilder der Basisvektoren w_1, \dots, w_q

$$A(U) = \langle \underbrace{A(w_1), \dots, A(w_q)} \rangle$$

max. Teilmenge (bez. \subseteq) l.u. Vektoren: Basis

Definition: auch bezüglich der Anzahl

\Rightarrow grösste Anzahl l.u. Spaltenvektoren von α :
Spaltenrang von α

Bem.: Spaltenrang von $\alpha = \dim \langle \dots \rangle = \dim A(U) = \text{Abb.-Rg } \alpha$

Definition: Die Maximalanzahl l.u. Zeilenvektoren von α heisst Zeilenrang von α .

Satz: Zeilenrang von α ($=s$) = Abb.-Rang α =
= Spaltenrang von α

$$A: U \rightarrow V$$

$$K^q \rightarrow K^p$$

lineare Abbildung
(endlich-dimensional)

$$\underline{A: \text{injektiv}} \Leftrightarrow \dim(\text{Kern } A) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Rang } A = \dim U$$

$$\Leftrightarrow s = q$$

$$\underline{A: \text{surjektiv}}$$

$$\Leftrightarrow A(U) = V$$

$$\Leftrightarrow \dim A(U) = \dim V \text{ (endlich)}$$

$$\Leftrightarrow s = p$$

$$A: \text{bijektiv} \iff \left. \begin{array}{l} s = q \\ s = p \end{array} \right\} \Rightarrow p = q = s$$

U muss quadratisch sein

Denn existiert auch eine Umkehrabbildung A^{-1} :

$$A^{-1} \circ A = \text{id}_U$$

$$A \circ A^{-1} = \text{id}_V$$

$$A: K^n \rightarrow K^n$$

$$U: A(v) = U \cdot v \quad \text{bezügl. d. kanonischen Basis}$$

$$A^{-1}:$$

$$X: A^{-1}(y) = X \cdot y$$

Spaltenvektoren von X : Bilder der Basisvektoren v_1, \dots, v_n unter der Abbildung $Xy = A^{-1}(y) =$

= Urbilder von v_1, \dots, v_n unter der Abbildung A

Berechenbarkeit mittels Gauß'schen Eliminationsverf.:

$$X \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

= Matrix der Abbildung $A^{-1} \circ A = \text{id}$

$$\text{id}(v_j) = v_j$$

I : multiplikatives Einheitselement im Ring L_n der quadratischen Matrizen.

Definition: In einem Ring mit Einselement

heißt jedes Element a , für das ein multiplikativ inverses Element a^{-1} existiert ($a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$) Einheit von R

$\langle R, +, \cdot \rangle$ Ring mit Einselement

$$E(R) = \{a \mid a: \text{Einheit von } R\}$$

$$\langle E(R), \cdot \rangle \text{ Gruppe}$$

$$(a^{-1})^{-1} = a$$

$$(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$$

inverses Element ist eindeutig

$$\begin{aligned} (ab)(b^{-1} \cdot a^{-1}) &= ((ab)b^{-1})a^{-1} = a(bb^{-1})a^{-1} = \\ &= aea^{-1} = aa^{-1} = e \end{aligned}$$

Gauß'sches Eliminationsverfahren (G.E.V.)

$$A \cdot x = b$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} & b_p \end{array} \right)$$

$$L_y = I$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} c_{11} & \dots & & d_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & c_{ss} & d_s \\ \hline & & 0 & d_{s+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ & & & d_p \end{array} \right)$$

erweitertes Gauß'sches Eliminationsverfahren:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \dots & 0 & c_{1,s+1}^* & \dots & c_{1n}^* & d_1^* \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & c_{s,s+1}^* & \dots & c_{sn}^* & d_s^* \\ \hline & & 0 & & & 0 & \vdots \\ & & & & & 0 & \vdots \end{array} \right) \quad \left. \begin{array}{c} \vdots \\ 0 \end{array} \right\} \text{muss nicht} \\ \text{lösen}$$

Erweiterung auf mehrere rechte Seiten:

k rechte Seiten:

$$b_1, b_2, \dots, b_k$$

für alle gemeinsamen Transformationen durchführen:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

für jede einzelne rechte Seite (für jedes b_i)
eine partikuläre Lösung des inhomogenen
Systems bestimmen.

für alle gemeinsam gilt die allgemeine
Lösung des homogenen Systems (Kern der Abb.)

Spezialfall: Kern $A = \{0\}$

dann ist die partikuläre Lösung des
inhomogenen Systems die einzige Lösung

$$\text{Kern } A = \{0\} \Leftrightarrow r = \text{Rg } A = n$$

Spezialfall: A ist $n \times n$ -quadratische Matrix

$$\text{Rg } A = n$$

Spaltenvektoren l. u.

$$\text{Kern } A = \{0\}$$

erweitertes G.E.V.: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & d_1^* \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & d_n^* \end{array} \right)$

Multipl von $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} d_1^* \\ \vdots \\ d_n^* \end{pmatrix}$

A ist eine Bijektion: $K^n \rightarrow K^n$

Isomorphismus / Automorphismus

Umkehrabbildung A^{-1}

Matrix α^{-1}

$$A \circ A^{-1} = A^{-1} \circ A = \text{id}$$

$$\alpha^{-1} \cdot \alpha = \alpha \cdot \alpha^{-1} = \mathbb{I}$$

wie üblich Matrix α auf kanonische Basis
bezogen:

w_1, \dots, w_n (geordnete Basis)

Spaltenvektoren von α^{-1}

Urbilder der Vektoren w_1, \dots, w_n

$(\alpha | \mathbb{I})$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right)$$

Transformation zu:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 & d_{11}^* & \dots & d_{1n}^* \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & d_{n1}^* & \dots & d_{nn}^* \end{array} \right)$$

$(\mathbb{I} | \alpha^{-1})$

$$\begin{array}{ccc}
 c_{11} & \dots & c_{1,k} \\
 0 & c_{kk} & c_{k,k+1} \\
 \hline
 & 0 & 0 \\
 & & \vdots \\
 & & 0
 \end{array}$$

$k+1$ -Spalten

$$\xrightarrow{1..1} \begin{pmatrix} c_{1,1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} c_{1,k+1} \\ \vdots \\ c_{k,k+1} \end{pmatrix}$$

$k+1$ Vektoren in k^k

daher l. q.

$$\Rightarrow \operatorname{Rg} a < n$$

$$\Rightarrow a^{-1} \text{ existiert nicht }$$

$$! \begin{pmatrix} 2004 & 2005 & | & 1 & 0 \\ 2006 & 1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definition: a quadratische Matrix $(n \times n)$ ($a \in L_n(k)$)
 heißt regulär, wenn die Matrix a^{-1} existiert,
 ansonsten singulär.

$$E(L_n(k)) = \{ \text{reguläre Matrizen} \}$$

Einheitsgruppe des (nicht kommutativen) Ringes
 $\langle L_n(k), +, \cdot \rangle$

$$(a \cdot x)^{-1} = x^{-1} \cdot a^{-1}$$

$$(a_1 a_2 \dots a_k)^{-1} = a_k^{-1} \dots a_1^{-1}$$

$$\mathcal{L}^{-1} = \mathcal{L}$$

$n=3$: kanonische Basis: v_1, v_2, v_3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für Matrix geordnete Basis
notwendig

\mathcal{L}

(regulär)

als Basis: ungeordnete Menge l.u. Vektoren
→ andere Reihenfolge; ändert an l.u. nichts

z.B.: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ reguläre Matrix

Matrix A entspricht eine Abbildung
 $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$v_1 \leftrightarrow v_3$$

$$A(v_1) = v_2 \quad A(v_2) = v_1 \quad A(v_3) = v_3$$

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \updownarrow \\ \updownarrow \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + x_3 \cdot v_3$$

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= x_1 \cdot A(v_1) + x_2 \cdot A(v_2) + x_3 \cdot A(v_3) = \\ &= x_1 \cdot v_2 + x_2 \cdot v_1 + x_3 \cdot v_3 \end{aligned}$$

Matrix A , die einer Änderung der
Reihenfolge der Basisvektoren v_1, \dots, v_n ent-
spricht (Vertauschung der Reihenfolge der
Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$).

$$w_1, \dots, w_n$$

Bilder: $A(w_i) = w_j$

Umkehrabb. \Leftrightarrow Bilder l.u.

$$\Leftrightarrow i \neq i' \quad A(w_i) \neq A(w_{i'})$$

$\langle w_1, \dots, w_n \rangle$ geordnete kanonische Basis

$A: \langle w_{i_1}, w_{i_2}, \dots, w_{i_n} \rangle \quad i_j \neq i_k \text{ für } j \neq k$

„um“ andere Anordnung der Basis

z.B.: $n=3 \quad \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$

$$\langle w_2, w_3, w_1 \rangle$$

A : lineare Abb. von $K^3 \rightarrow K^3$ eindeutig definiert

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$Ax = A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

A eine „solche Matrix“:

In jeder Spalte w_j : genau ein „1“, sonst „0“
auch in jeder Zeile tritt genau ein „1“ auf,
sonst „0“

Definition 1: Eine Anordnung der Elemente w_1, \dots, w_n einer n -elementigen Menge heißt eine Permutation der Elemente (dieser Menge) (speziell in der Kombinatorik)

Definition 2: Eine Umordnung der Elemente einer geordneten n -elementigen Menge heißt Permutation der Elemente (dieser Menge)
(speziell in der Algebra)

$\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ Standardreihenfolge
Ausgangsreihenfolge

$\langle b_1, \dots, b_n \rangle$ andere Umordnung

$a_1 \rightarrow b_1$
 \vdots

Umordnung der Elemente

$a_n \rightarrow b_n$

Anzahl der Permutationen einer n -elementigen Menge

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

1. Platz 2. Platz 3. Platz ... letzter Platz

$n!$ n -Fakultät

n -Faktorielle

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}$$

$$e = 2,718281828459045 \dots$$

Permutation als Umordnungen
 n -elementige Menge

Musterbeispiel: $\{1, 2, \dots, n\}$

beliebig: $\{a_1, \dots, a_n\}$

$\langle 1, 2, \dots, n \rangle$ natürliche Anordnung

1 2 ... n

$i_1 \ i_2 \ \dots \ i_n$

Anordnung der
natürlichen Zahlen
 $1, \dots, n$

Umordnung

Abb. π :

$$\{1, \dots, n\} \xrightarrow{1 \mapsto i} \{1, \dots, n\}$$

Bijektion!

$$i_1 = \pi(1); \ i_2 = \pi(2); \ \dots; \ i_n = \pi(n)$$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & n-1 & \dots & 2 & 1 \\ \pi(n) & \pi(n-1) & \dots & \pi(2) & \pi(1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_{\pi(1)} & a_{\pi(2)} & \dots & a_{\pi(n)} \end{pmatrix}$$

S_n = Menge der $n!$ Permutationen der Menge
 $\{1, \dots, n\}$ als Umordnungen

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \pi(1) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix} \quad \alpha = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \alpha(1) & \dots & \alpha(n) \end{pmatrix}$$

$\pi \cdot \alpha$

Achtung: von links nach rechts zu lesen!

$\begin{pmatrix} \text{von oben} \\ \text{nach unten} \end{pmatrix}$

Bsp.: $n=3$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

insgesamt: $\sigma \cdot \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

als Abbildungen: $1 \rightarrow \sigma(1) \rightarrow \alpha(\sigma(1))$

$\langle S_n, \cdot \rangle$ G1: abgeschlossen ✓

G2: Assoziativität ✓

G3: Einheits-element: identische Abb.: ✓

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

G4: inverses Element: $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} :$

inverses Element
inverse Permutation $\begin{pmatrix} \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix}$ ✓

$\langle S_n, \cdot \rangle = \mathcal{P}_n$ Gruppe

Analog: $A = \{a_1, \dots, a_n\}$

$$\mathcal{P}_n(A) = \langle S_n(A), \cdot \rangle \cong \mathcal{P}_n \quad (\text{isomorph})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \text{monoton}$$

Inversion

Permutationen einer Menge

$$A = \{a_1, \dots, a_n\}$$

speziell: $\{1, \dots, n\}$

Bijektionen $\tilde{w}: A \xrightarrow{1-1} A$

Zweiseitige Darstellung $(\begin{smallmatrix} \dots & a_j & \dots \\ \dots & \tilde{w}(a_j) & \dots \end{smallmatrix})$

andere Darstellungen:

graphische Darstellung:



gerichtete Kante $\langle a_j, \tilde{w}(a_j) \rangle$

Knoten: a_1, \dots, a_n

GRAPH

Graph einer Permutation entspricht:

Von jedem Knoten geht genau eine Kante weg



In jedem Knoten geht genau eine Kante ein



unmöglich!



ZYKLUS

(a, b, c, \dots, j)

eventuell mehrere Zyklen; paarweise elementfremd
jedes a_k (Knoten) ^{taucht} in genau einem Zyklus auf

Zerlegung der Permutation in mehreren Zyklen:

$(\dots)(\dots)(\dots) \dots$

Länge eines Zyklus = Anzahl der Elemente
in diesem Zyklus

Länge 1 (a)

 Schlinge

$$\tilde{\pi}(a) = a$$

Fixpunkt der Permutation

Länge 2 (a, b)



Paar antegeordnet
gerichtet gerichteter
Kanten

$$\tilde{\pi}(a) = b; \tilde{\pi}(b) = a$$

Elemente a und b vertauscht
TRANSPOSITION

$\tilde{\pi}$ hat genau einen Zyklus

$\Rightarrow \tilde{\pi}$ ist eine zyklische Permutation

Bsp.: $n=3$ $A = \{1, 2, 3\}$

identische Abbildung: $(1)(2)(3)$

Transposition: $(1\ 2)(3)$
 $(1\ 3)(2)$

$$(2\ 3)(1) = (1)(2\ 3) = (1)(3\ 2)$$

Zyklische Permutation: $(1\ 2\ 3)$
 $(1\ 3\ 2)$

$$A = \{1, \dots, 8\}$$

$$\tilde{\pi} = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 8\ 6)[(7)]$$

$$\tilde{\pi}_1 = (1\ 2\ 3\ 4) \quad \tilde{\pi}_2 = (5\ 8\ 6)$$

$\Rightarrow \tilde{\pi}$ ist Produkt von Zyklen (paarweise elementfremd)

$$\tilde{\pi} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 6 & 8 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\pi} = (1\ 3)(2\ 5\ 6\ 8\ 7)(4)$$

$$\pi^2 = \pi \cdot \pi =$$

$$= (1 \ 3)(2 \ 5 \ 6 \ 8 \ 7)(4)(1 \ 3)(2 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8)(4) =$$

von links nach rechts:

$$= (1)(2 \ 6 \ 7 \ 5 \ 8)(3)(4) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 6 & 3 & 4 & 8 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$(1 \ 3)(2 \ 5 \ 6 \ 8 \ 7)(4) =$$

$$= (1 \ 3)(2 \ 5)(2 \ 6)(2 \ 8)(2 \ 7)(1 \ 4)(1 \ 4)$$

Produkt von Transpositionen

nicht notwendigerweise paarweise elementfremd

Für jede Permutation gilt:

Ist π das Produkt von einer ungeraden Anzahl von Transpositionen, so ist das immer so!

Analog: gerade Anzahl

M1VO am Do, 16.12.2004 findet in HS 11
(Hauptgebäude) statt.

Permutationen: Bijektionen $A \rightarrow A$
 $S(A)$ o. B. d. A. $A = \{1, \dots, n\}$

Zweizeilige Darstellung

Graphische Darstellung

Darstellung als Produkt

Darstellung als Produkt paarweise elementfremder Zyklen

(außer $n=1$: id (1))

$$(ab)(ab) = (a)(b)$$

eindeutig bestimmt, ob die Anzahl der Transpositionen gerade oder ungerade ist.

σ heißt gerade, wenn die Anzahl der Transpositionen gerade ist, ungerade, wenn sie ungerade ist.

Produkt

	gerade	ungerade
gerade	gerade	ungerade
ungerade	ungerade	gerade

\cdot	+1	-1
+1	+1	-1
-1	-1	+1

Gruppenhomomorphismus

$$\mathcal{S}_n = \langle S_n, \cdot \rangle$$

$$\text{auf } \langle \{+1, -1\}, \cdot \rangle$$

$$\sigma \mapsto (-1)^{I(\sigma)}$$

$I(\sigma)$: Anzahl der Inversionen von σ
 $i < j \quad \sigma(i) > \sigma(j)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I(\sigma) = 3$$

3 Inversionen

$$(1 \ 3)(2) = \underbrace{(1 \ 3)(2 \ 1)(1 \ 2)}$$

ungerade Anzahl von Transpositionen

$(-1)^{j(\tau)}$ heißt Signum von τ (Vorzeichen)

$$\text{sign } \tau; \text{ sign } \tau$$

$$\text{sign } \tau \cdot \text{sign } \rho = \text{sign } (\tau \cdot \rho) = \text{sign } (\rho \cdot \tau)$$

$$\text{obwohl } \tau \cdot \rho \neq \rho \cdot \tau$$

$$\text{sign } \tau = \text{sign } \tau^{-1}$$

$$\text{sign id} = +1$$

$$j(\text{id}) = 0$$

\mathcal{P}_n Symmetrische Gruppe der Permutationen von n Elementen $(1, \dots, n)$

$\langle \text{gerade Permutationen}, \cdot \rangle$

Untergruppe von $\mathcal{P}_n = \langle \mathcal{P}_n, \cdot \rangle$

$$(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) = f(x_1, x_2, x_3)$$

gerade Permutation: ändert den Wert von f nicht

ungerade Permutation: ändert den Wert (Vorzeichen)

$\langle \text{gerade Permutationen}, \cdot \rangle$:

Untergruppe $\langle A_n, \cdot \rangle = A_n$

determinierende Gruppe der Permutation von n Elementen

$$|A_n| = \frac{1}{2} \cdot |\mathcal{P}_n|$$

lineare VR: $\langle V, +, \cdot \rangle$

endliche Dimension (n)

b_1, \dots, b_n

sind sie l.u. oder l.a.?

$L(b_1, \dots, b_n) = V$ oder nicht?

$V = K^n$ Methode: Matrix $Z = (b_1, \dots, b_n)$

Spaltenvektoren

$\text{Rg } Z = n \Rightarrow b_1, \dots, b_n$ l.u.

$\text{Rg } Z < n \Rightarrow b_1, \dots, b_n$ l.a.

Gesucht: Funktion von (b_1, \dots, b_n)

$D(b_1, \dots, b_n)$

bestimmt, ob b_1, \dots, b_n l.u. oder l.a. sind

$D(b_1, \dots, b_n) = 0 \Leftrightarrow b_1, \dots, b_n$ l.a.

$D(b_1, \dots, b_n) \neq 0 \Leftrightarrow b_1, \dots, b_n$ l.u.

\Rightarrow l.a./l.u. determiniert

Definition: Sei $\langle V, +, \cdot \rangle$ VR über K ; dim $V = n$

Eine Funktion $D(b_1, \dots, b_n)$ mit Werten in K
(d.h. Abbildung von V^n in K) heißt
Determinantenfunktion, wenn sie folgende
Eigenschaften hat:

1, D ist in jedem Argument linear (multilinear);

d.h. $D(\dots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{j. Stelle}}}{\lambda a + \mu b}, \dots) = \lambda \cdot D(\dots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{j. Stelle}}}{a}, \dots) + \mu \cdot D(\dots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{j. Stelle}}}{b}, \dots)$

2, Wenn zwei Argumente gleich sind, so sei
 $D(\dots) = 0$

$$D(\dots, \underset{i}{a}, \dots, \underset{j}{a}, \dots) = 0$$

3, Es existiert (mindestens) ein linear unabhängiger
 n -Tupel (b_1, \dots, b_n) (ist Basis), sodass

$$D(b_1, \dots, b_n) \neq 0$$

b_1, \dots, b_n : geordnete Basis

Behauptung: Sind a_1, \dots, a_n l. a.

Dann gilt $D(a_1, \dots, a_n) = 0$

Beweis: a_1, \dots, a_n l. a. \Rightarrow es existiert $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$,
sodass $\sum \lambda_i a_i = 0$

$$\text{Sei } \lambda_j \neq 0; a_j = \frac{1}{\lambda_j} \left(-\sum_{i \neq j} \lambda_i a_i \right)$$

$$a_j = \sum_{i \neq j} \mu_i a_i$$

$$D(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \dots, a_n) =$$

$$= D(a_1, \dots, a_{j-1}, \sum_{i \neq j} \mu_i a_i, a_{j+1}, \dots, a_n) =$$

$$= \sum_{i \neq j} \mu_i \cdot D(a_1, \dots, a_{j-1}, \underset{i}{a_i}, a_{j+1}, \dots, a_n) = 0$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{=0}$$

Voraussetz. für 2. Teil (l.u.):

2. Eigenschaft: $D(\dots, a, \dots, a, \dots) = 0$

Vektoren a, b :

$$D(\dots, a+b, \dots, a+b, \dots) = 0 =$$

$$= D(\dots, a, \dots, a+b, \dots) + D(\dots, b, \dots, a+b, \dots) =$$

$$= D(\dots, a, \dots, a, \dots) + D(\dots, a, \dots, b, \dots) + \\ + D(\dots, b, \dots, a, \dots) + D(\dots, b, \dots, b, \dots)$$

$$D(\dots, b, \dots, a, \dots) = -D(\dots, a, \dots, b, \dots)$$

Satz: Ist D eine Determinantenfunktion, so bedeutet Vertauschen von zwei Argumenten (Umwenden einer Transposition) eine Multiplikation mit -1 .

Folgerung: $D(a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)}, \dots, a_{\pi(n)}) =$

$$= \operatorname{sgn} \pi \cdot D(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

D.h. die Determinantenfunktion ist eine alternierende Funktion.

Behauptung: Ist a_1, \dots, a_n l.u., so gilt

$$D(a_1, \dots, a_n) \neq 0$$

Beweis: $\underbrace{a_1, \dots, a_n}_{\text{Basis}} \text{ l.u.} \quad b_1, \dots, b_n \text{ (beliebig)}$

$$b_i = \sum_{j=1}^n d_{ij} \cdot a_j \quad 1 \leq i \leq n$$

$$D(b_1, \dots, b_i, \dots, b_n) = D\left(\sum_{j=1}^n d_{1j} a_j, \dots, \sum_{j=1}^n d_{ij} a_j, \dots, \sum_{j=1}^n d_{nj} a_j\right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j_1=1}^n d_{1j_1} \cdot D(a_{j_1}, \dots, \sum_{j_i=1}^n d_{ij_i} a_{j_i}, \dots, \sum_{j_n=1}^n d_{nj_n} a_{j_n}) = \\
 &= \sum_{j_1=1}^n d_{1j_1} \cdot \left(\sum_{j_2=1}^n d_{2j_2} \cdot \left(\dots \left(\sum_{j_i=1}^n d_{ij_i} \cdot \left(\dots \left(\sum_{j_n=1}^n d_{nj_n} \cdot (D(a_{j_1}, \dots, a_{j_n}) \dots \right) \right) \right) \right) \right) = \\
 &= \sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_i=1}^n \dots \sum_{j_n=1}^n d_{1j_1} d_{2j_2} d_{3j_3} \dots d_{nj_n} \cdot D(a_{j_1}, \dots, a_{j_n}) =
 \end{aligned}$$

Anzahl der Summanden: n^n

$$= \sum_{(j_1, \dots, j_n)} d_{1j_1} \cdot d_{2j_2} \cdot \dots \cdot d_{nj_n} \cdot D(a_{j_1}, \dots, a_{j_n}) =$$

paarweise
verschieden

Permutation von $(1, \dots, n)$

Anzahl der Summanden: $n!$

$$\pi(i) = j_i$$

$$= \sum_{\pi \in S_n} d_{1\pi(1)} d_{2\pi(2)} \dots d_{n\pi(n)} \cdot D(a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)}, \dots, a_{\pi(n)}) =$$

$$= \left(\sum_{\pi \in S_n} \alpha_{\pi} \cdot d_{1\pi(1)} d_{2\pi(2)} \dots d_{n\pi(n)} \right) \cdot D(a_1, \dots, a_n)$$

Sei nun $\langle b_1, \dots, b_n \rangle$ geordnete Basis (Eigenschaft 3)
mit $D(b_1, \dots, b_n) \neq 0$

$$\Rightarrow D(a_1, \dots, a_n) \neq 0$$

Spezialfall: spezielle Basis a_1, \dots, a_n auswählen und $D(a_1, \dots, a_n) = 1$ vorgeben.

Spezialfall: $V = K^n$ kanonische Basis $\langle w_1, \dots, w_n \rangle$
normieren: $D(w_1, \dots, w_n) = 1$

t_1, \dots, t_n bezogen auf kanonische Basis w_1, \dots, w_n

\Rightarrow MATRIX: $(t_1 \ t_2 \ \dots \ t_n)$

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

$$t_i = \sum_{j=1}^n t_{ij} \cdot w_j$$

Bemerkung: $D(t_1, \dots, t_n) = \left(\sum_{\tilde{\sigma} \in S_n} \text{sgn } \tilde{\sigma} \cdot t_{1\tilde{\sigma}(1)} \cdot t_{2\tilde{\sigma}(2)} \cdot \dots \cdot t_{n\tilde{\sigma}(n)} \right) \cdot D(a_1, \dots, a_n)$

$$= \left(\sum_{\tilde{\sigma} \in S_n} \text{sgn } \tilde{\sigma} \cdot t_{1\tilde{\sigma}(1)} \cdot t_{2\tilde{\sigma}(2)} \cdot \dots \cdot t_{n\tilde{\sigma}(n)} \right) \cdot D(a_1, \dots, a_n)$$

Definition:

$$Z = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det Z = \sum_{\tilde{\sigma} \in S_n} \text{sgn } \tilde{\sigma} \cdot t_{1\tilde{\sigma}(1)} \cdot \dots \cdot t_{n\tilde{\sigma}(n)}$$

Determinante von Z

Determinante einer Matrix (a_{ij}) über K

$$A = (a_{ij})$$

$$\det A = \sum_{\tilde{\sigma} \in S_n} \operatorname{sgn} \tilde{\sigma} \cdot a_{1\tilde{\sigma}(1)} \cdots a_{n\tilde{\sigma}(n)} =$$

$$= \sum_{\tilde{\sigma} \in S_n} \operatorname{sgn} \tilde{\sigma} \cdot a_{\tilde{\sigma}(1)1} \cdots a_{\tilde{\sigma}(n)n}$$

$$A = (a_{ij}) \quad \begin{pmatrix} \nearrow \\ \searrow \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \nearrow \\ \searrow \end{pmatrix}$$

$$A = (a_{ij}) \quad A^T = (a_{ji}) = {}^t A = A^t$$

Transponierte von A

$$(A^T)^T = A$$

$$(A \cdot X)^T = X^T \cdot A^T$$

Satz: $\det(A) = \det(A^T)$

$n=1$:

$$(a_{11})$$

$$\tilde{\sigma} = \operatorname{id} = (1)$$

gerade; $\operatorname{sgn} \operatorname{id} = +1$

$$\det(a_{11}) = a_{11}$$

$n=2$:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\tilde{\sigma} = \operatorname{id} = (1)(2)$$

$$\operatorname{sgn} \tilde{\sigma} = +1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{sgn} \tilde{\sigma} = -1$$

$n=3$:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Regel von SARRUS

Operationen, die den Wert der Determinante nicht ändern oder kontrolliert ändern:

- 1) Übergang zur Transponierten ändert nicht
- 2) Vertauschung von zwei Spalten oder zwei Zeilen ändert das Vorzeichen (Multiplikation mit -1)
- 3) Multiplikation einer Spalte oder einer Zeile mit einem Skalar $\lambda \in K$ entspricht einer Multiplikation der Determinante mit λ .
- 4) Addition einer Zeile (respektive Spalte) zu einer anderen Zeile (respektive Spalte) ändert den Wert der Determinante nicht.
- d.h. 5. Die Addition (Subtraktion) eines Vielfachen einer Zeile (respektive Spalte)

Inversionen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \Delta = 0$$

$$+ a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

$$\text{sgn } \tilde{\alpha} = +1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \Delta = 1$$

$$- a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$$

$$\text{sgn } \tilde{\alpha} = -1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \Delta = 1$$

$$- a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

$$\text{sgn } \tilde{\alpha} = -1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \Delta = 2$$

$$+ a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

$$\text{sgn } \tilde{\alpha} = +1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Delta = 2$$

$$+ a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

$$\text{sgn } \tilde{\alpha} = +1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Delta = 3$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

$$\text{sgn } \tilde{\alpha} = -1$$

zu (von) einer anderen Zeile (respektive Spalte)
ändert den Wert der Determinante nicht.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = -(-1) \dots \det \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ c_{ss} & \dots & c_{sn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

kontrolliert

$S = n$:

$$\det \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} = c_{11} \cdot c_{22} \cdot \dots \cdot c_{nn}$$

$S < n \Rightarrow \det = 0$

$\text{Rg } A$ (Abbildungsrang, Spaltenrang,
Zeilenrang) $= n \Leftrightarrow \det A \neq 0$

Definition: Untermatrix einer Matrix A ist
eine Matrix, die aus A durch Streichen
von Zeilen und Spalten entsteht.

A quadratische Matrix

Zeilen: i_1, \dots, i_k
Spalten: j_1, \dots, j_k } streichen

$\rightarrow (n-k) \times (n-k)$ - Untermatrix (quadratisch)

Anzahl der Zeilen (respektive Spalten) der
Untermatrix mit $\det \neq 0$ heißt Deter-
minantenrang von A ($= \text{Rg } A$).