

$\langle G, * \rangle$  Potenzen von  $a$ ,  $a \in G$

$$a^1 = a$$

$$a^{n+1} = a^n * a$$

Monoid, Gruppe: Einselement  $e$ :  $a^0 = e$

$G \dots$  Gruppe:  $a \in G \Rightarrow \exists a^{-1}$

$$\exists (a^n)^{-1} = a^{-n}$$

Rechenregeln:  $a^{n+m} = a^n * a^m$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$G \dots$  abelsche Gruppe:  $\langle G, + \rangle$

$$a + b$$

Potenzen:

$$a, a+a, a+a+a, \dots$$

$$2 \cdot a$$

$$3 \cdot a$$

$$n \cdot a$$

$G \dots$  Gruppe;  $a \in G$

$$a^n = e; n \text{ minimal } (n > 0)$$

$\Rightarrow n$  heißt Ordnung von  $a$  in  $G$

$$n = O_G(a)$$

Satz: Wenn  $\langle G, * \rangle$  Gruppe,  $O_G(a) = n \Rightarrow a^{n+1} = a^{-1}$

$G$  ist endlich  $\Rightarrow O_G(a)$  endlich f.  $a \in G$

Beweis:

$$a^n = e, a^{n-1} * a = a * a^{n-1} = e$$

$$a^0, a^1, a^2, a^3, \dots \quad \exists m, n \in \mathbb{N} : 0 < n < m$$

$$a^n = a^m \quad | \cdot a^{-n}$$

$$e = a^{m-n} \quad ; \quad m-n > 0$$

$$\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}\}$$

$$\bar{0} = \{\dots, -2m, -m, 0, m, 2m, \dots\} \subseteq \mathbb{Z}$$

$$\bar{1} = \{\dots, -2m+1, -m+1, 1, m+1, 2m+1, \dots\} \subseteq \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\} \quad \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$$

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Def.  $\langle R, +, \cdot \rangle$ ;  $\langle R, + \rangle$  abel'sche Gruppe  
 $\langle R, \cdot \rangle$  Halbgruppe  
 Distributivgesetze gelten: } RING

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

$\langle R, \cdot \rangle$  kommutative Halbgruppe  $\Rightarrow$   
 kommutativer Ring

Ring mit Einheitsselement

$\langle R, \cdot \rangle$  ist Monoid

Bsp.:  $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\} \quad \bar{3} \cdot \bar{x} = \{\bar{0}, \bar{3}\}$

$$a \cdot \bar{0} = a \cdot (\bar{0} + \bar{0}) = a \cdot \bar{0} + a \cdot \bar{0} \quad | + (-a \cdot \bar{0})$$

$$0 = -a \cdot \bar{0} = (-a) \cdot \bar{0}$$

Def.:  $\langle R, +, \cdot \rangle$ ;  $a \neq 0$  heißt Nullteiler, wenn  
 $\exists b \neq 0$ , sodass  $a \cdot b = 0$  oder  $b \cdot a = 0$

Def.: Ein \*Ring ohne Nullteiler heißt  
 Integritätsbereich

\* kommutativer

• mit Nullteiler

$\mathbb{Z}_m$ ;  $m$  ist eine Primzahl

$$\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m; \bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{0}$$

$$a \cdot b = x \cdot m$$

$$\Rightarrow a \cdot b \neq 0$$

~~am~~  $m$  ist keine Primzahl

$$a \cdot b = m; \bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{m} = \bar{0}$$

$\Rightarrow$  kein Integritätsbereich

$a, b \in R$ ;  $R \dots$  Integritätsbereich

$$a \cdot b = 0$$

$\Rightarrow$

$$a = 0 \text{ oder } b = 0$$

$$\nexists a^{-1}$$

$\Rightarrow$

$$a \cdot b = a \cdot c$$

$$a \cdot b - a \cdot c = 0 \quad | a \neq 0$$

$$a \cdot (b - c) = 0 \Rightarrow b - c = 0 \Rightarrow b = c$$

Def.:  $\langle K, +, \cdot \rangle$  Körper, wenn  $\langle K, + \rangle$  abel'sche Gruppe und  $\langle K \setminus \{0\}, \cdot \rangle$  auch

abel'sche Gruppe ist

Bsp.:

$$\langle \mathbb{Q}, +, \cdot \rangle; \langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle; \langle \mathbb{Z}_2, +, \cdot \rangle$$

Satz:

$\langle H, +, \cdot \rangle$  endlicher Integritätsbereich

$\Rightarrow H$  ist ein Körper

Bew.:

$$a \neq 0 \Rightarrow \exists 0 < n < m; a^n = a^m$$

$$a^m - a^n = 0 \Rightarrow \underbrace{a^n}_{\neq 0} (a^{m-n} - 1) = 0$$

$$\underbrace{a \cdot a^{n-1}}_{\neq 0} = 0$$

gibt es nicht!

$$+0 = 0 \Rightarrow a^{m-n} = 1$$

$$a^{m-n-1} = a^{-1}$$

Endliche Körper:  $|K| = p^n$ ;  $p \dots$  Primzahl  
 Galoisfeld  $GF(p^n)$

## Unterstrukturen

$$\langle G, * \rangle; H \subseteq G$$

Gruppe

$H$  ist Untergruppe, wenn  $\langle H, * \rangle$  Gruppe

Satz:  $\langle G, * \rangle$  Gruppe;  $H \subseteq G$ ;  $H \neq \emptyset$

$\Rightarrow H$  ist Untergruppe  $\Leftrightarrow \forall a, b \in H$  gilt

$$\Leftrightarrow \forall a, b \in H: a^{-1} \in H; a * b \in H$$

Beweis:  $\Rightarrow$  ist trivial

$$\Leftarrow: a \in H \Rightarrow a * a^{-1} = e \in H \quad (G3 \checkmark)$$

$$e, a \in H \Rightarrow e * a^{-1} \in H \quad (G2 \checkmark)$$

$$G1: a, b \in H \Rightarrow a, b^{-1} \in H$$

$$a * (b^{-1})^{-1} \in H \Rightarrow a * b \in H \quad (G1 \checkmark)$$

Satz:  $G$ : endliche Gruppe;  $H \subseteq G$ ;  $H \neq \emptyset$

$\Rightarrow H$  ist Untergruppe  $\Leftrightarrow a, b \in H \Rightarrow a * b \in H$

Beweis:  $a \in H; a, a^2, \dots, a^{n-1}, a^n = e$

$$e \in H \quad (G3)$$

$$G1 \checkmark$$

$$G2 \checkmark$$

$$a^{n-1} = a^{-1} \in H \quad (\text{inverses El.}) \quad G4 \checkmark$$

$\langle R, +, \cdot \rangle$  Ring, wenn  $\langle R, + \rangle$  abelsche Gruppe,  $\langle R, \cdot \rangle$  Halbgruppe und die Distributivgesetze gelten.

Satz:  $R$  Ring;  $U \subseteq R$  Unterring, wenn

$$a, b \in U \Rightarrow a-b \in U$$

$$a \cdot b \in U$$

$\langle K, +, \cdot \rangle$  Körper; Ring mit  $\langle K, + \rangle$  abelsche Gruppe

ODER:  $\langle K, + \rangle$  abelsche Gruppe

$\langle K, \cdot \rangle$  abelsche Gruppe

Distributivgesetze

Bsp.: Ring:  $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ ;  $\langle \mathbb{Z}_m, +, \cdot \rangle$

Körper:  $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot \rangle$ ;  $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$

$\langle \mathbb{C}, +, \cdot \rangle$ ;  $\langle \mathbb{Z}_m, +, \cdot \rangle$  wenn  $m$  Primzahl

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$$

$$m \mid a \cdot b$$

$$m \mid a \wedge m \mid b \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{0} \wedge \bar{b} = \bar{0}$$

Satz:  $L \subseteq K$  Körper:  $a, b \in L \Rightarrow a-b \in L$ ;  
 $a, b \in L_0 \Rightarrow a \cdot b^{-1} \in L_0$   
 $\Rightarrow L$  ist Unterkörper (2.2)  $H \subseteq G$

$\langle G_1, *_1 \rangle, \langle G_2, *_2 \rangle$  Gruppen

$$G_1 \times G_2 = \{ \langle a, b \rangle \mid a \in G_1, b \in G_2 \}$$

$$\langle a, b \rangle * \langle c, d \rangle = \langle a *_1 c, b *_2 d \rangle$$

$\Rightarrow \langle G_1 \times G_2, * \rangle$  Gruppe

$$e = \langle e_1, e_2 \rangle$$

$$\langle a, b \rangle^{-1} = \langle a^{-1}, b^{-1} \rangle$$

$K_1, K_2$  Körper

$$\langle a, 0 \rangle \cdot \langle 0, b \rangle = \langle 0, 0 \rangle \quad \text{Nullvektor!}$$

$$(m+n) \cdot a = m \cdot a + n \cdot a \quad n, m \in \mathbb{Z}; a \in G$$

$$m \cdot (n \cdot a) = (m \cdot n) \cdot a \quad m \cdot a = a + a + a + \dots + a$$

$$0 \cdot a = 0 \quad -m \cdot a = -(m \cdot a)$$

$\uparrow$   
 $\in \mathbb{N}$  Nullelement in  $G$

abel'sche Gruppe  $\langle G, + \rangle$ :  $p, q \in \mathbb{Z}; a, b \in G$   
 $\Rightarrow p \cdot a \in G$

$$\mathbb{Z} \times G \rightarrow G$$

$$1, p \cdot (a+b) = p \cdot a + p \cdot b$$

$$2, (p+q) \cdot a = p \cdot a + q \cdot a$$

$$3, p \cdot (q \cdot a) = (p \cdot q) \cdot a$$

4,  $1 \cdot a = a$

$[1, 0] = 1$

Def.:  $\langle G, + \rangle$  abelsche Gruppe;  $\langle R, +, \cdot \rangle$  kommutativer Ring mit Einselement

1, - 4, gelten f.  $p, q \in R, a, b \in G$   
 $\Rightarrow$  MODUL über dem Ring  $R$

Spezialfall:  $K$  ist Körper  $\rightarrow$  Vektorraum  
 Modul über  $K$

$\langle V, + \rangle$  abelsche Gruppe  
 $V \dots$  Menge der Vektoren  
 $K \dots$  Menge der Skalare

Bsp.:  $R^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in R \right\}$   
 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$   
 $\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix}$

2,  $K$  Körper

$K^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in K \right\}$

3,  $K$  Körper;  $M$  Menge

$A = K^M = \{ f: M \rightarrow K \}$ .  $h = f + g$

$h(m) = f(m) + g(m)$ ;  $\lambda \in K \Rightarrow \lambda \cdot f$

$(\lambda \cdot f)(m) = \lambda \cdot f(m)$

$\langle A, +, \cdot \rangle$  Vektorraum



Beweis:  $\Rightarrow: a, b \in U \Rightarrow \lambda \cdot a, \lambda \cdot b \in U$

$\lambda \cdot a + \lambda \cdot b \in U$ , da  $\langle U, + \rangle$  Untergruppe

$\Leftarrow: \lambda = 1; \mu = -1$

$\lambda; \mu = 0$

Vektorraum:  $\langle V, +, \cdot \rangle$

$\langle V, + \rangle$  abelsche Gruppe

$\lambda \in K; a \in V; \lambda \cdot a \in V$

$U \neq \emptyset; U \subseteq V$

$\langle U, +, \cdot \rangle \subseteq \langle V, +, \cdot \rangle$

Teilraum!

$U \subseteq V$  [TR]

$\langle V, +, \cdot \rangle$  Vektorraum

$\langle U, +, \cdot \rangle$

TR

$U_1 \subseteq V; U_2 \subseteq V$  Teilmengen

$U_1 \neq \emptyset; U_2 \neq \emptyset$

$\langle \langle U, + \rangle$  Untergruppe von  $\langle V, + \rangle$

$a \in U, \lambda \in K \Rightarrow \lambda \cdot a \in U$

$a, b \in U; \lambda, \mu \in K \Rightarrow \lambda a + \mu b \in U$

Bei Gruppen, Halbgruppen, ...:

$G_1 \cap G_2$  wieder eine Gruppe

Satz: Ist:  $\langle V, +, \cdot \rangle$  ein Vektorraum; sind

$\langle U_1, +, \cdot \rangle, \langle U_2, +, \cdot \rangle$  Teilräume von  $V$ ,

so gilt: wenn  $U = U_1 \cap U_2 \Rightarrow \langle U, +, \cdot \rangle$

Teilraum von  $V$

Beweis: 1,  $U_1 \neq \emptyset; U_2 \neq \emptyset$

$\langle U_1, + \rangle$  Untergruppe von  $\langle V, + \rangle$

Einheitselement von  $\langle V, + \rangle$  ist

Einheitselement von  $\langle U, + \rangle$



$$0 \in V \Rightarrow 0 \in U_1 \quad (\text{Nullvektor})$$

$$\text{analog: } 0 \in U_2$$

$$\Rightarrow 0 \in U_1 \cap U_2$$

$$\Rightarrow U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$$

$$2, \quad a, b \in U = U_1 \cap U_2$$

$$\lambda, \mu \in K$$

$$a, b \in U_1; \mu, \lambda \in K$$

$$\Rightarrow \lambda a + \mu b \in U_1 \quad (U_1 \text{ ist Teilraum})$$

$$\text{analog: } a, b \in U_2; \mu, \lambda \in K$$

$$\Rightarrow \lambda a + \mu b \in U_2 \quad (U_2 \text{ ist Teilraum})$$

$$\Rightarrow \lambda a + \mu b \in U$$

DAHER:

$$\langle U, +, K \rangle \text{ Teilraum von } \langle V, +, K \rangle$$

$$\text{Mengen } M: \quad A, B \subseteq M$$

$$\Rightarrow A \cap B = \emptyset \quad A, B: \text{disjunkt}$$

$$\text{Vektorräume } V: \quad U_1, U_2 \subseteq V \quad (\text{TR})$$

$$U_1 \cap U_2 = \{0\}$$

disjunkt bis auf 0

Frage:  $U_1, U_2$  Teilmengen von  $V$  (Skalarkörper  $K$ )

Ist  $U_1 \cup U_2$  Teilraum von  $V$ ?

ja, wenn  $U_1 = U_2$   
ja, wenn  $U_1 \subseteq U_2$  } da  $U_1 \cup U_2 = U_2$

Was bei  $U_1 \not\subseteq U_2, U_2 \not\subseteq U_1$ ?

$$x_1 \in U_1; \quad x_1 \notin U_2$$

$$x_2 \notin U_1; \quad x_2 \in U_2$$

$$z = x_1 + x_2$$

Behauptung:  $z \notin U_1$

Beweis (indirekt): Annahme  $z \in U_1$

$$\Rightarrow x_1 \in U_1$$

$$z - x_1 = x_1 + x_2 - x_1 = x_2 \in U_1 \Rightarrow \text{Widerspruch}$$

analog:  $z \notin U_2$

$$\Rightarrow z \notin U_1 \cup U_2$$

aber  $x_1, x_2 \in U_1 \cup U_2$

für Teilraum:  $x_1 + x_2 \in U_1 \cup U_2$

$\Rightarrow$  kein Teilraum

Definition: Operation  $+$   $\langle V, + \rangle$

erweitern auf  $\mathcal{P}(V)$

$S, T \subseteq V$  Teilmengen

$$S, T \neq \emptyset$$

$$S + T = \{a + b \mid a \in S, b \in T\}$$

$$\text{auch: } \lambda \cdot S = \{\lambda \cdot a \mid a \in S\}$$

noch allgemeiner:  $S, T$ : Multimengen

Vielfachheiten der Elemente

$$\text{z.B. } S = \{a, a, b\}$$

$$T = \{b, b, c\}$$

$$S+T = \{a+b, a+b, a+c, a+b+a+b, a+c,$$

Multimenge

$$b+b, b+b, b+c\}$$

Systeme von Vektoren = Multimengen

Satz:

$$\langle U_1, +, \cdot \rangle, \langle U_2, +, \cdot \rangle \text{ Teilräume } \langle V, +, \cdot \rangle$$

Dann ist  $\langle \underbrace{U_1 + U_2}_{\text{Menge}}, +, \cdot \rangle$  Teilraum von  $\langle V, +, \cdot \rangle$

Es ist sogar der "kleinste" Teilraum von  $V$ ,  
der  $U_1$  und  $U_2$  enthält

Beweis: Skizze

$$x_1 \in U_1$$

$$0 \in U_2$$

$$x_1 + 0 = x_1 \in U_1 + U_2$$

$$\Rightarrow U_1 \subseteq U_1 + U_2$$

$$\text{analog: } U_2 \subseteq U_1 + U_2$$

$$\Rightarrow U_1 \cup U_2 \subseteq U_1 + U_2$$

$$U_1 + U_2 \neq \emptyset$$

$$a, b \in U_1 + U_2$$

$$\lambda, \mu \in K$$

$$a = x_1 + x_2$$

$$b = y_1 + y_2$$

$$\lambda a + \mu b = \lambda(x_1 + x_2) + \mu(y_1 + y_2) =$$

$$= \lambda \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2 + \mu \cdot y_1 + \mu \cdot y_2 =$$

$$= \underbrace{(\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot y_1)}_{\in U_1} + \underbrace{(\lambda \cdot x_2 + \mu \cdot y_2)}_{\in U_2} \in U_1 + U_2$$

Frage: Unter welchen Bedingungen für  $U, W$   
gibt es  $a, a' \in U, a \neq a'; b, b' \in W;$   
 $b \neq b'$ , so dass  $a+b = a'+b'$ ?

Wann existiert ein Vektor aus  $U+W$  mit  
zwei wesentlich verschiedenen Darstellungen  
als  $a+b; a \in U, b \in W$

Behauptung: Existiert ein Vektor  $z \in U+W$  mit  
(mindestens) 2 Darstellungen

$$z = a+b = a'+b' \quad \text{mit} \quad \underbrace{a \neq a'}_{\in U}; \quad \underbrace{b \neq b'}_{\in W}$$

Dann gilt auch für den Nullvektor  $0$ ,  
dass er mindestens zwei Darstellungen hat

$$0 = x+y = x'+y'$$

$$\underbrace{x \neq x'}_{\in U} \quad \underbrace{y \neq y'}_{\in W}$$

Beweis: 1,  $0 = 0+0$   

$$\quad \quad \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\quad \quad \quad \in U \quad \in W$$

$$c = a+b$$

$$c = a'+b'$$

$$0 = c - c = \underbrace{(a-a')}_{x \neq 0} + \underbrace{(b-b')}_{y \neq 0}$$

$$\Rightarrow 0 = x+y; \quad 0 = a+a'$$

$\Rightarrow$  zwei verschiedene Darstellungen!

Beh. Hat der Nullvektor in  $U+W$  mindestens  
zwei Darstellungen ( $0 = 0+0; 0 = x+y;$   
 $x \neq 0; y \neq 0; x \in U; y \in W$ ), dann hat  
jeder Vektor  $c \in U+W$  mindestens zwei  
Darstellungen.

Beweis:

$$0 = x + y$$

$$c = a + b$$

$$c = 0 + c = \underbrace{(a+x)}_{\in U} + \underbrace{(b+y)}_{\in W}$$

$$a' = a + x + a,$$

$$\text{da } x \neq 0$$

Genügt Untersuchung des Nullvektors auf mehrere

Darstellungen: 1,  $0 = 0 + 0$

$$2, 0 = x + y$$

$$x \neq 0, x \in U$$

$$\Rightarrow y = -x$$

$$y \neq 0, y \in W$$

$$x \in U$$

$\langle U, + \rangle$  Untergruppe von  $\langle V, + \rangle$

$$\Rightarrow -x \in U$$

$$\Rightarrow y \in U$$

aber auch  $y \in W$

$$y (\neq 0) \in U \cap W$$

umgekehrt: existiert

$$y \in U \cap W$$

$$y \neq 0$$

$$\Rightarrow x = -y \in U \cap W$$

$$0 = x + y$$

2. Darstellung

Satz: Die Darstellung jedes Vektors  $c \in U+W$  in der Form  $a+b$ ;  $a \in U, b \in W$  ist genau dann eindeutig, wenn  $\underline{U \cap W = \{0\}}$

Speicherweise:

$a$  ist dann  $U$ -Komponente,

$b$  ist dann  $W$ -Komponente von  $c$

Definition: Gilt  $U \cap W = \{0\}$ , so heißt  $U+W$  die direkte Summe von  $U$  und  $W$ :  $U \oplus W$

$\langle V, + \rangle$  Vektorraum

$$\text{TR}(V) = \{U \mid U \text{ Teilraum von } V\}$$

$\langle \text{TR}(V), + \rangle$  abgeschlossen  $\rightarrow$  Gruppoïd

$$(U_1 + U_2) + U_3 = U_1 + (U_2 + U_3)$$

noch allgemeiner:

$S_1, S_2, S_3$  Teilmengen von  $V$

$S_1 + S_2$  Menge

$$(S_1 + S_2) + S_3 = \{a + b + c \mid a \in S_1, b \in S_2, c \in S_3\}$$

$$= S_1 + (S_2 + S_3)$$

$\Rightarrow$  HALBGRUPPE

$\{0\}$  ist Einheitsbelement

$$U + \{0\} = \{0\} + U = U$$

$\Rightarrow$  MONOID

Gruppe: nur für  $V = \{0\}$

ABELSCH (immer!)

$$U_1 + U_2 + U_3 = \{a_1 + a_2 + a_3 \mid a_i \in U_i\}$$

eindeutige Darstellbarkeit?

Notwendige Bedingung:  $U_1 \cap U_2 = \{0\}$

$$U_1 \cap U_3 = \{0\}$$

$$U_2 \cap U_3 = \{0\}$$

kurz: paarweise bis auf 0 disjunkt

$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$$

$$\sum_{j=1}^n U_j$$

$$S_1 + S_2$$

$$S_1 = \{a\}$$

$$S_1 + S_2 = \{a\} + S_2 = a + S_2 = S_2 + a$$

$$\lambda \cdot S = \{\lambda \cdot a \mid a \in S\}$$

$$L \subseteq K; S \subseteq V \Rightarrow L \cdot S = \{\lambda \cdot a \mid \lambda \in L; a \in S\}$$

$$L = K; S = \{a\} \Rightarrow K \cdot \{a\} = K \cdot a = \{\lambda \cdot a \mid \lambda \in K\}$$

$$\text{gilt auch: } L \cdot S = S \cdot L \quad ???$$

$$\text{gilt: } \lambda \cdot a = a \cdot \lambda \quad ???$$

gilt nicht, da  $a \cdot \lambda$  nicht definiert!

$\langle V, +, \cdot \rangle$  Vektorraum

$$a \in V$$

$$K \cdot a = \{\lambda a \mid \lambda \in K\}$$

Teilraum von  $V$

$$x, y \in K \cdot a \text{ gilt } \lambda x + \mu y \in K \cdot a$$

$$\lambda \cdot x + \mu \cdot y = \lambda \cdot (\xi a) + \mu \cdot (\eta a) \quad [\xi, \eta \in K]$$

$$(\lambda \cdot \xi) \cdot a + (\mu \cdot \eta) \cdot a = (\underbrace{\lambda \cdot \xi + \mu \cdot \eta}_{\in K}) \cdot a$$

$$\text{Spezialfall: } a = 0 \Rightarrow \lambda \cdot a = \lambda \cdot 0 = 0$$

$$K \cdot 0 = \{0\}$$

Bemerkung: 1,  $\lambda \cdot a = 0 \Leftrightarrow$  entweder:  $\lambda = 0$

$$\lambda \neq 0; a \neq 0 \Rightarrow \lambda \cdot a \neq 0 \quad (\text{oder } a = 0 \text{ oder beides})$$

2,  $a \neq 0$ , es gilt für jeden Vektor  $b \in K \cdot a$ , dass genau ein  $\mu \in K$  existiert mit  $b = \mu \cdot a$

Beweis: indirekt:  $b = \mu \cdot a = \mu' \cdot a$   $\mu \neq \mu'$

$$\rightarrow 0 = b - b = \mu a - \mu' a = (\mu - \mu') a$$

$$\Rightarrow \mu - \mu' = 0 \quad (a \neq 0)$$

$$\mu = \mu'$$

Widerspruch zu  $\mu \neq \mu'$

$$a, b \in V$$

$$K \cdot a, K \cdot b \text{ TR}$$

$$K \cdot a + K \cdot b = \{x \cdot a + \mu \cdot b \mid x, \mu \in K\}$$

$$\text{Achtung: } K a + K b \neq K(a + b) \quad \begin{matrix} !!! \\ o o o \end{matrix}$$

Definition: im allgemeinen

$x \cdot a + \mu \cdot b$  heißt Linearkombination von  $a$  und  $b$ .

$K a + K b$  : Menge der Linearkombinationen von  $a$  und  $b$

$L(a, b)$  lineare Hülle von  $a$  und  $b$

nicht TR von  $V$

sogar der kleinste TR (bezüglich  $\subseteq$ ), der  $a$  und  $b$  enthält

$$\text{Wann gilt: } L(a, b) = K a \oplus K b$$

$$L(a) \oplus L(b) \quad ?$$

Genau dann, wenn  $0 = x + y$   $x \in K a, y \in K b$   
genau eine Darstellung hat

Wann ist die Darstellung jedes Vektors  $c \in L(a, b)$  als  $c = u + v$   $u \in K a, v \in K b$   
eindeutig?



1. Darstellung:  $0 = 0 \cdot a + 0 \cdot b$

Darstellung eindeutig, wenn aus

$$0 = \lambda \cdot a + \mu \cdot b \text{ folgt: } \lambda = 0 \text{ und } \mu = 0$$

(triviale Darstellung)

Darstellung nicht eindeutig, genau dann,

wenn es existiert  $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ ,

$$\text{so dass } \lambda \cdot a + \mu \cdot b = 0$$

(eine nicht-triviale Darstellung)

Definition:  $a, b$  heißen linear unabhängig (l.u.),  
wenn aus  $\lambda \cdot a + \mu \cdot b = 0$  folgt  $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ .

Definition:  $a, b$  heißen linear abhängig (l.a.),  
wenn ein Paar  $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$  existiert, sodass  
 $\lambda \cdot a + \mu \cdot b = 0$ .

Folgerung:  $a, b$  sind nicht linear unabhängig  
genau dann, wenn  $a, b$  linear abhängig sind  
 $a, b$  sind nicht l.a. genau dann, wenn  
 $a, b$  l.u. sind

$$a, b \text{ nicht l.u.} \Leftrightarrow a, b \text{ l.a.}$$

$$a, b \text{ nicht l.a.} \Leftrightarrow a, b \text{ l.u.}$$

Erweiterung:  $a$  heißt l.u., wenn aus  
 $\lambda \cdot a = 0$  folgt  $\lambda = 0$ .

$a$  heißt l.a., wenn ein  $\lambda \neq 0$  existiert,  
sodass  $\lambda \cdot a = 0$ .

Satz:  $a \text{ l. a} \Leftrightarrow a = 0$   
 $a \text{ l. u} \Leftrightarrow a \neq 0$

Bemerkung: lineare Unabhängigkeit und lineare Abhängigkeit sind mathematische Begriffe, nicht juristische Begriffe.

Satz:  $L(a, b) = L(a) \oplus L(b)$   
 genau dann, wenn  $a, b$  l. u.

Verallgemeinerung:  $a, b, c \quad L(a), L(b), L(c)$

$L(a, b, c) = L(a) + L(b) + L(c) \quad \text{TR}$

Darstellung eindeutig, d.h. direkte Summe  
 genau dann, wenn Darstellung des Nullvektors  
 eindeutig

d.h. genau dann, wenn

$(\lambda \cdot a + \mu \cdot b + \nu \cdot c = 0 \Rightarrow (\lambda, \mu, \nu) = (0, 0, 0)) \quad [N_3]$

Definition:  $a, b, c$  l. u, wenn aus  
 $\lambda \cdot a + \mu \cdot b + \nu \cdot c = 0$  folgt  $(\lambda, \mu, \nu) = (0, 0, 0)$   
 analog:  $a, b, c$  l. a.

Definition:  $a_1, a_2, \dots, a_n$  heißen l. u, wenn  
 aus  $\underbrace{\lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 + \dots + \lambda_n \cdot a_n = 0}_{\text{Linearkombination}}$

folgt:  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = (0, 0, \dots, 0)$

$a_1, a_2, \dots, a_n$  heißen l. a, wenn ein  $n$ -Tupel existiert  
 $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = (0, 0, \dots, 0)$  und

$\lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 + \dots + \lambda_n \cdot a_n = 0$  ist.

$$L(a_1, \dots, a_n) = L(a_1) + \dots + L(a_n)$$

direkte Summe  $\Leftrightarrow a_1, \dots, a_n$  l.u.

Linearkombination:

$$\lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 + \dots + \lambda_n \cdot a_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot a_i$$

Summe von  $\lambda_i \cdot a_i$  mit  $i=1$  bis  $n$

Bemerkung: 1, endliche Summen !!!

$$2, \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot a_i = (n=1)$$

$$= \lambda_1 \cdot a_1$$

3,  $n=0$ : "Steht" der Summe mit Einheits-Element  
der Addition (von Vektoren)

$$\sum_{i=1}^0 \lambda_i \cdot a_i = 0 \text{ (Konvention!)}$$

leere Summe

leeres Produkt:

$$\prod_{i=1}^0 x_i = e$$

$$L(\emptyset) = \{e\}$$

$$\sum_{a \in \emptyset} \lambda \cdot a = 0 \Rightarrow L(\emptyset) = \{0\}$$

leere Summe

$a_1, \dots, a_n$  müssen nicht paarweise verschiedene Vektoren sein  $\Rightarrow$  Multimengen werden zugelassen

System

$$K = \mathbb{Z}_2$$

$$\mathbb{Z}_2^k$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$x_i \in K = \mathbb{Z}_2$$

$$x_i = \bar{0} \text{ oder } x_i = \bar{1}$$

insgesamt  $2^k$  Vektoren in  $\mathbb{Z}_2^k$

allgemein:  $K = \mathbb{Z}_p \Rightarrow \mathbb{Z}_p^k \Rightarrow V_p^k$  Vektoren

S System von Vektoren aus  $V_p^k$  Vektoren

sogar zulassen, dass S unendlich viele Elemente enthält

$L(S)$  = Menge der endlichen Linearkombinationen von Vektoren aus S; kein Vektor wird mehrfach verwendet

$$L(S) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot a_i \mid n \in \mathbb{N}; \underbrace{a_1, \dots, a_n}_{\text{"verschiedene" Vektoren}} \in S \right\}$$

$L(S)$  ist ein Vektorraum

kleinster Teilraum von  $V$ , der  $S$  enthält  
(bezüglich  $\subseteq$ )

Definition:  $S$  (eventuell unendliche Multimenge von Vektoren aus  $V$ ) heißt l.u. genau dann, wenn für jede natürliche Zahl  $n$  und für jede Auswahl an Vektoren  $a_1, \dots, a_n$  aus  $S$  aus  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot a_i$  folgt  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$ .

Definition:  $S$  heißt l.a., wenn eine natürliche Zahl  $n$  existiert, sodass Vektoren  $a_1, \dots, a_n \in S$  existieren und  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$  existiert, sodass  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot a_i = 0$ .

Bemerkungen: 1,  $S$ ;  $0 \in S \Rightarrow S$  ist l.a., da  $0 = 1 \cdot 0$

2,  $a, a$  (Vielfachheit von  $a \geq 2$ )  $\in S$  in  $S$   
 $\Rightarrow 1 \cdot a + (-1) \cdot a = 0$   
 $\neq 0$   
 $\Rightarrow S$  ist l.a.

Satz:  $S$  l.u.  $\Rightarrow S$  ist eine Menge, keine Multimenge!

3,  $S = \emptyset$  l.u.

4, Satz:  $S \subseteq T$   
Vielfachheiten in  $S \leq$  Vielfachheiten in  $T$   
 $S$  l.a.  $\Rightarrow T$  l.a.

5. Satz:  $S \subseteq T$ ;  $T$  l.u.  $\Rightarrow S$  l.u.

Definition:  $S$  heißt eine bezüglich  $\subseteq$  maximal l.u. Menge, wenn für jeden Vektor  $a \in V \setminus S$  gilt:  $S \cup \{a\}$  l.a.

Behauptung: Ist  $S$  (bzgl.  $\subseteq$ ) eine maximal l.u. Menge, so gilt:  $L(S) = V$

Beweis: 1,  $L(S) \subseteq V$  klar

2, zu zeigen:  $L(S) \neq V$  nicht echte Teilmenge  
also  $a \in V \Rightarrow a \in L(S)$

(d.h.  $V \subseteq L(S)$ ) <sup>zu zeigen</sup>

Fall 1:  $a \in S \Rightarrow a \in L(S)$   $a = 1 \cdot a$

Fall 2:  $a \notin S \Rightarrow S \cup \{a\}$  l.a.

$\Rightarrow$  es existieren Vektoren

$b_1, \dots, b_n \in S$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i = 0$$

und nicht alle  $\lambda_i = 0$  sind.

Bemerkung: 2,

$a$  muss in  $b_1, \dots, b_n$  vorkommen,  
da sonst  $S$  l.a.

$b_1, \lambda_n \neq 0$

$$\text{sonst } \sum_{j=0}^n \lambda_j \cdot b_j = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \cdot b_i$$

c)  $\lambda_n - \lambda_{n-1} \neq 0 \Rightarrow S$  l.a.

$$a = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \cdot b_j$$

Für jedes  $j$  mit  $\lambda \cdot j \neq 0$   
läßt sich  $\lambda \cdot j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \left( \frac{-\lambda \cdot i}{\lambda \cdot j} \right) \cdot b_i$   
als Linearkombination darstellen.

$$b_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (-\lambda_i \cdot \lambda_j^{-1}) \cdot b_i$$

Definition: System  $S$  von Vektoren aus  $V$   
mit  $L(S) = V$  (d.h. jeder Vektor aus  
 $V$  läßt sich als endliche Linearkombi-  
nation von Vektoren aus  $S$  darstellen)  
heißt erzeugendes System von  $V$ .

Also jedes bezüglich  $\subseteq$  maximale l.u. System  
 $S$  ist ein erzeugendes System.

Bemerkung:  $V$  ist erzeugendes System von  $V$ .  
 $V \setminus \{0\}$  ist ebenfalls e.S.

Analog: jedes bezüglich  $\subseteq$  minimale e.S.  
 $S$  ist l.u.

$S$  System von Vektoren in  $V$ :

$S$  ist bezüglich  $\subseteq$  minimales e.S.

$\Leftrightarrow S$  ist bezüglich  $\subseteq$  maximal l.u.  
System

$\Leftrightarrow S$  ist l.u. e.S.

Es folgt also: Solche  $S$  sind Mengen!

Sei  $S$  l.u. E.S. von  $V$

$$a \neq 0; a \notin S; a \in V$$

Satz: Es existiert  $b \in S$  mit der Eigenschaft

$$T = (S \setminus \{b\}) \cup \{a\}$$

$T$  ist dann auch l.u. E.S.

Bemerkung: Vektor  $b$  gegen  $a$  ausgetauscht

Dieser Satz heißt Austauschlemma.

Beweis:  $L(S) = V$

Da  $a \in V$  existieren  $b_1, \dots, b_n \in S$  mit

$$a = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot b_i$$

Da  $a \neq 0$  gilt  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$

Sei  $j$  s.t., dann  $\lambda_j \neq 0$ , dann ohne  
Beschränkung der Allgemeinheit  
(nummerieren)  $j = n$ , d.h.  $\lambda_n \neq 0$

$$b_n = \frac{1}{\lambda_n} a + \sum_{i=1}^{n-1} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right) \cdot b_i$$

$$\text{Def. } b = b_n$$

$$T = (S \setminus \{b_n\}) \cup \{a\}$$

Beh.:  $L(T) = V$

$S$ : E.S.

$c \in V \Rightarrow$  existieren

$$c_1, \dots, c_k \in S, \text{ so dass}$$

$$c = \sum_{j=1}^k \mu_j \cdot c_j$$

Fall 1,  $c_1, \dots, c_k \neq b$

$$c_1, \dots, c_k \in T$$



$$\Rightarrow c \in C(T)$$

Fall 2, Ein  $c_j$  ist  $b$  (ohne Beschränkung der Allgemeinheit:  $c_k = b$ )

$$c_1, \dots, c_{k-1} \in T$$

$$c = \sum_{j=1}^{k-1} \mu_j \cdot c_j + \mu_k \cdot b = \underbrace{\sum_{j=1}^{k-1} \mu_j \cdot c_j + \frac{\mu_k}{\lambda_n} \cdot a + \sum_{i=1}^{n-1} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right) \mu_k \cdot b_i}_{\text{Linearkombination } L(T)}$$

$T$  sei l. u.

$c_1, \dots, c_k \in T$ ; l. a.  $\# \leftarrow$  Annahme

Fall 1,  $a$  kommt nicht vor

$$\Rightarrow c_1, \dots, c_k \in S; \text{ daher l. u.}$$

Fall 2,  $a$  kommt vor:  $a = c_k$  (ohne Beschr. der Allgemeinheit [o. B. d. A.] )

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^k \mu_j \cdot c_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^{k-1} \mu_j \cdot c_j + \mu_k \cdot c_k = 0$$

$$\mu_k \neq 0$$

$$\lambda_n \neq 0$$

$$\sum_{j=1}^{k-1} \mu_j \cdot c_j + \mu_k \cdot \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \right) = 0$$

$$\mu_k \cdot \lambda_n \neq 0$$

Linearkombination von Vektoren

Koeffizient von  $b_n$

$$\underbrace{b_1, \dots, b_m, b_n}_{\in S} = 0 \quad (\text{nicht triviale Linearkombination})$$

$\Rightarrow S$  wäre l. a. - Widerspruch!

$S$  sei l.u. E.S. von  $V$

$$a_1, \dots, a_p \in V$$

Voraussetzung: Diese Vektoren ~~ist~~ müssen l.u. sein.

Behauptung: Dann existieren  $b_1, \dots, b_p \in S$ , sodass

$$T = (S \setminus \{b_1, \dots, b_p\}) \cup \{a_1, \dots, a_p\}$$

wieder l.u. E.S. ist.

Austauschsatz von STEINITZ

Beweis:  $p=1$  (Austauschlemma)

$$a_1 \rightarrow$$

$$\Rightarrow T_1 = (S \setminus \{b_1\}) \cup \{a_1\}$$

$T_1$  ist l.u. E.S.

$a_{i+1} \neq 0 \Rightarrow$  Es existiert  $b \in T_i$ , sodass

$$T_{i+1} = (T_i \setminus \{b\}) \cup \{a_{i+1}\} \text{ l.u. E.S.}$$

$a_{i+1}$  gegen jeden Vektor  $b$  austauschbar,

dessen Koeffizient von der Linearkombination, die  $a_{i+1}$  darstellt, ungleich 0 ist.

„Ungunstiger Zwang“: Austausch gegen  $a_1, \dots, a_i$

Genau dann, wenn 
$$a_{i+1} = \sum_{j=1}^i \lambda_j a_j$$

Dann wäre  $a_1, \dots, a_{i+1}$  l.a. n.g.

Austauschsatz von STEINITZ:

$$VR \quad \langle V, +, \cdot \rangle$$

$S$  l. u. E. S.

bezüglich  $\subseteq$  maximales l. u. S.

bezüglich  $\subseteq$  minimales E. S.

$a_1, \dots, a_n$  l. u.

$\Rightarrow$  So existieren  $b_1, \dots, b_n \in S$  mit

$$T = (S \setminus \{b_1, \dots, b_n\}) \cup \{a_1, \dots, a_n\} \text{ ist}$$

ebenfalls l. u. E. S.

Folgerungen dieses Austauschsatzes:

1, Existiert in  $V$  ein l. u. E. S.

$$S = \{a_1, \dots, a_n\}$$

$$(S \text{ l. u.}; L(S) = V)$$

$$T = \{b_1, \dots, b_p\}$$

$$(T \text{ l. u.}; L(T) = V)$$

$T$  in  $S$  linear ersetzbar:

Es existieren daher  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_p} \in S$ , die austauschbar sind;

daher  $p \leq n$  (analog  $S$  in  $T$ )

$S$  und  $T$  sind beides l. u. E. S.

$$\Rightarrow \boxed{p = n}$$

Weiters: Existiert ein endliches E.S., so sind alle l.u. E.S. endlich; und alle l.u. E.S. haben dieselbe Anzahl von Vektoren ( $=n$ )

Definition: Im Fall der Existenz eines endlichen E.S. in  $V$  heißt die Konstante  $n$  der Vektoren in jedem l.u. E.S.

die Dimension von  $V$ :  $\boxed{\dim(V)}$

Definition: VR  $V$  mit einem endlichem E.S., d.h. mit endlicher Dimension  $\dim(V) = n$ , dann heißt jedes l.u. E.S. eine BASIS von  $V$ .

Bemerkung: Wenn  $V = \{0\}$

S l.u. E.S.:  $S = \emptyset \Rightarrow \dim\{0\} = 0$

Folgerung:  $\dim V = n$   $b_1, \dots, b_p$   $i, p > n$

$\Rightarrow \{b_1, \dots, b_p\}$  l.a.

Definition: Existiert in  $V$  kein endliches E.S. (alle auch l.u. E.S. sind unendlich groß), so sagen wir:  $\dim V$  ist unendlich.  
( $\dim V = \infty$ )

Bsp.: 1,  $V = \{0\}$  ( $K$  beliebig)  $\dim\{0\} = 0$   
einzige Basis  $S = \emptyset$

2,  $V$ :  $k$ -Tupel von Elementen des Körpers  $K$   
 $V = K^k = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \mid x_i \in K \right\}$

$$\langle K^k, +, K \rangle: \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_k + y_k \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$n_i \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = i$$

$$\overline{\overline{n} \quad \overline{n} \quad \overline{n}} \\ n \quad e \quad n$$

$$\{n_1, \dots, n_k\} \text{ l.m., da } \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot n_i = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{E.S.: } v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^k x_i \cdot n_i$$

$\Rightarrow$  Basis

$$\text{Dann } K^k = k$$

KANONISCHE BASIS

$$\text{von } \langle K^k, +, K \rangle$$

$$\langle n_1, \dots, n_k \rangle$$

geordnete Basis

Spezialfälle:  $k=2$ :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$n_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad n_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$k=1: \begin{pmatrix} x_1 \end{pmatrix}$$

$$\langle K^1, +, K \rangle$$

$$\langle K, +, K \rangle$$

$$k=0: ()$$

$$\text{entspricht } \langle \{0\}, +, K \rangle$$

3, Folgen mit Elementen aus  $K$ , speziell  $K = \mathbb{R}$ ,  
 $K = \mathbb{Q}$

$$\langle a_k \rangle_{k \in \mathbb{N}} = \langle a_0, a_1, \dots, a_k, \dots \rangle$$

Abbildung  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Funktion} \\ K^{\mathbb{N}} \end{array} \right.$  Definitionsbereich  $\mathbb{N}$   
 Wertebereich  $K$

$$\langle a_k \rangle + \langle b_k \rangle = \langle a_k + b_k \rangle$$

$$\lambda \cdot \langle a_k \rangle = \langle \lambda \cdot a_k \rangle$$

Dimension unendlich

$$f_k = \langle 0, \dots, 0, \underset{\uparrow}{1}, 0, \dots \rangle$$

$$\{f_k | k \in \mathbb{N}\} \stackrel{a_k}{\text{l.m.}}$$

Beweis: Nullelement (Nullvektor im Raum der Folge):

$$\langle 0, \dots, 0 \rangle \stackrel{a_k}{=} 0 \text{ f. a. } k \in \mathbb{N}$$

$$\lambda_1 \cdot f_{k_1} + \lambda_2 \cdot f_{k_2} + \dots + \lambda_n \cdot f_{k_n} =$$

$$= \langle 0, \dots, \underset{\uparrow}{\lambda_1}, \dots, \underset{\uparrow}{\lambda_2}, \dots, \underset{\uparrow}{\lambda_n}, \dots \rangle$$

$k_1 \qquad k_2 \qquad k_n$

$$= \langle 0, 0, \dots, 0, \dots \rangle$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0; \lambda_2 = 0; \dots; \lambda_n = 0$$

$$k_1 < k_2 < \dots < k_n \Rightarrow \text{l.m.}$$

$\langle 1 \rangle$  ist nicht als endliche Linearkombination  
der Folge  $f_k$  darstellbar

Teilmenge der Folge, die höchstens endlich  
viele Elemente  $a_k \neq 0$  haben, sind darstellbar  
(fast überall 0)

D.h. schließlich 0; d.h. ab einem Index  
 $N$  (folgenabhängig)  $a_k = 0$ , wenn  $k > N$ .

Bsp.  $\langle \mathbb{R}, +, \mathbb{Q} \rangle$  Vektorraum; Dimension unendlich

$\langle \mathbb{C}, +, \mathbb{R} \rangle$  Vektorraum; Dimension: 2

Basis:  $\{1, i\} =$

$$\{1 + 0 \cdot i; 0 + 1 \cdot i\}$$

$$a + b \cdot i = a \cdot (1 + 0 \cdot i) + b \cdot (0 + 1 \cdot i) = \boxed{a, b \in \mathbb{R}}$$

$$= 0 = 0 + 0 \cdot i \Leftrightarrow a + b = 0$$

Bsp.

$K \dots$  Körper

quadratische Polynome mit Koeffizienten aus  $K$

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c \cdot x^0 \quad \text{Polynom in } x$$

$x$  ist nicht näher bestimmt  $\Rightarrow$  Unbestimmte

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

$$Q(x) = a'x^2 + b'x + c'$$

$$P(x) = Q(x) \Leftrightarrow a = a'$$

$$b = b'$$

$$c = c'$$



$$R(x) = P(x) + Q(x) = (a+a') \cdot x^2 + (b+b') \cdot x + (c+c')$$

$$\lambda \cdot P(x) = S(x) =$$

$$\lambda \in K$$

$$= (\lambda a) x^2 + (\lambda b) \cdot x + (\lambda c)$$

analog zu Tripeln:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = K^3 \iff ax^2 + bx + c$$

$K_2[x]$  Polynome von Grad  $\leq 2$  über Körper  $K$   
(VEKTORRAUM)

Definition: Polynom über  $K$   $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$   
 $a_i \in K$

formal (mit  $a_0 = a_0 \cdot x^0$  und  $a_1 = a_1 \cdot x^1$ )  
$$\sum_{j=0}^n a_j \cdot x^j$$

alle  $a_j = 0 \rightarrow N(x)$  Nullpolynom

sonst: maximaler Index  $k$  existiert, sodass

$a_k \neq 0$  und f.a.  $j > k$   $a_j = 0$ .

$\left[ \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j \cdot x^j \text{ höchstens viele } a_j \neq 0 \right]$

$k$  wird der Grad des Polynoms genannt

$$3x^3 + 2x + 1$$

z. B. über  $\mathbb{Z}_3$  Grad = 1 ( $\bar{3} = \bar{0}$ )

über  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  Grad = 3

Grad von  $N(x) = -\infty$

manchmal:  $N(x) = -1$

$K[x]$  Vektorraum aller Polynome über  $K$

$$\sum_{j=0}^n a_j \cdot x^j \quad \text{Grad} \leq n$$

$$\text{Grad} < n+1$$

$$K_n[x] = K_{\leq n}[x] = K_{< n+1}[x]$$

Vektorraum

Basis:  $x^0, x^1, \dots, x^n$

Dimension:

$$\boxed{n+1}$$

$$K_0[x] : a \cdot x^0$$

$$K_1[x] : a \cdot x^0 + b \cdot x^1$$

$$\{N(x)\} \subset K_0[x] \subset K_1[x] \subset K_2[x] \subset \dots$$

dim

1

2

3

...

$$\dim \{N(x)\} = 0, \text{ daher manchmal } K_{-1}[x]$$

Vektorräume

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

Spalten-k-tupel  
"Spaltenvektoren"

$$(x_1, \dots, x_k)$$

~~Zahl~~ Zeilen-k-tupel  
"Zeilenvektoren"

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \xleftrightarrow{1-1} (x_1, \dots, x_k)$$

in Physik: Zeilen-k-tupel:  $\langle x |$ Spalten-k-tupel:  $|y\rangle$   $\langle x|y\rangle$ in Geometrie: Vektorraum Zeilenvektor:  $k^k$ Spaltenvektor  $k^k$ 

$$\begin{pmatrix} x_1, \dots, x_k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

der duale VR

$$K_n[x]$$

$$K_{\leq n}[x]$$

$$K_{< n+1}[x]$$

Vektorraum der Polynome mit Grad  $\leq n$  über  $K$  (d.h. mit Koeffizienten aus  $K$ ) $K[x]$  Vektorraum aller Polynome über  $K$ 

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} a_j x^j \quad \left( \sum_{j=1}^{\infty} a_j x^j \right)$$

fast alle  $a_j = 0$ (d.h. höchstens endlich viele  $a_j \neq 0$ ) $K[[x]]$  alle Gebilde der Form

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} a_j x^j$$

auch:  $\sum_{j=1}^{\infty} x^j$  Potenzreihe (formale)

Folge  $\langle a_j \rangle_{j \in \mathbb{N}} \leftrightarrow \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j \cdot x^j$  f. Potenzreihe  
 Erzeugende Funktionen

Folgerung des Austauschsatzes von STEINITZ:

VR  $V$  :  $U, W$  Teilräume von  $V$   
 $U+W$   $U \cap W$  TR.

endlich-dimensional  $(U, W)$

$U$  Basis:  $a_1, \dots, a_k$   $k = \dim U$

$W$  Basis:  $b_1, \dots, b_l$   $l = \dim W$

$U \cap W$  Basis:  $c_1, \dots, c_m$   $m = \dim(U \cap W)$

$U \cap W \subseteq U \Rightarrow c_1, \dots, c_m \in U$ ; l.u.

$c_1, \dots, c_m$  in Basis  $a_1, \dots, a_k$  lineintauschen

$\underbrace{a'_1, \dots, a'_{k-m}}_{\text{Teil der Basis}}, c_1, \dots, c_m$

Teil der Basis

$a_1, \dots, a_k$

analog:  $U \cap W \subseteq W$

$\Rightarrow \underbrace{b'_1, \dots, b'_{l-m}}_{\text{Teil der Basis}}, c_1, \dots, c_m$

Teil der Basis

$b_1, \dots, b_l$

$U = L(a'_1, \dots, a'_{k-m}) \oplus L(c_1, \dots, c_m)$

$W = L(b'_1, \dots, b'_{l-m}) \oplus L(c_1, \dots, c_m)$

$$L(c_1, \dots, c_m) = U \cap W$$

$$L(a'_1, \dots, a'_{k-m}) \cap L(b'_1, \dots, b'_{l-m}) = \{0\}$$

$$U+W = L(a'_1, \dots, a'_{k-m}) \oplus L(c_1, \dots, c_m) \oplus L(b'_1, \dots, b'_{l-m})$$

$$\{a'_1, \dots, a'_{k-m}, c_1, \dots, c_m, b'_1, \dots, b'_{l-m}\} \quad l.m.$$

Basis von  $U+W$

$$\begin{aligned} \dim(U+W) &= (k-m) + m + (l-m) = k + l - m = \\ &= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) \end{aligned}$$

endliche Mengen: Kardinalität

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|\emptyset| = 0$$

$$\dim L(\emptyset) = \dim \{0\} = 0$$

Mengen  $A, B$

$$A \cap B = \emptyset$$

$$A \cup B = M$$

$$B = C_M(A) = C(A)$$

Komplement von  $A$

$V$  Vektorraum

$U, W$  TR

normal 1,  $U \cap W = \{0\}$

2,  $U+W (= U \oplus W) = V$

$W$  heißt Komplementärraum von  $U$  in  $V$ .

$\dim U + \dim W = \dim V$

wenn  $W$  Komplementärraum von  $U$

Isomorphismen

Vektorraum:

$$\langle V, +, \cdot, K \rangle$$

$$\langle W, \oplus, \cdot, K \rangle$$

$$\varphi: V \xrightarrow{1-1} W$$

bijektiv mit den Operationen verträglich  
(vertauschbar)

$$\varphi(\lambda \cdot a + \mu \cdot b) = \lambda \cdot \varphi(a) \oplus \mu \cdot \varphi(b)$$

$\Rightarrow V$  und  $W$  sind isomorph

Bsp.: Zeilen- $k$ -Tupel

Spalten- $k$ -Tupel

$$\varphi: (x_1, \dots, x_k) \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

Folge

$\rightarrow$  formale Potenzreihe

$$\varphi: \langle a_j \rangle_{j \in \mathbb{N}} \rightarrow \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j x^j$$

$V, W$  Vektorräume über  $K$

$$\dim V = \dim W$$

$a_1, \dots, a_k$  Basis von  $V$

$b_1, \dots, b_k$  Basis von  $W$

$$\varphi: \varphi(a_1) = b_1; \varphi(a_2) = b_2; \dots; \varphi(a_k) = b_k$$

$$a = \sum_{j=1}^k \lambda_j a_j \rightarrow \varphi(a) = b = \sum_{j=1}^k \lambda_j b_j$$

VR-Isomorphismen

weitere Isomorphismen durch Vertauschung!

$V, W$  sind isomorph:  $V \cong W \iff \varphi: V \xrightarrow{1-1} W$

$$\varphi^{-1}: W \xrightarrow{1-1} V$$

Symmetrie  $\Rightarrow W \cong V$

Reflexivität:  $V \cong V$  identische Abbildung:

Transitivität:  $\varphi(a) = a$

$$V \cong V' \cong V''$$

$$\varphi: V \xrightarrow{1-1} V' \quad \varphi: V' \xrightarrow{1-1} V'' \quad x(a) = \varphi(\varphi(a))$$

$R, S, T$  erfüllt; keine Äquivalenzrelation

$$\langle V, +, K \rangle \quad \langle V, \oplus, K \rangle$$

$$A: U \rightarrow V$$

von  $U$  in  $V$

Abbildung

Jedem  $x \in U$  wird eindeutig sein Bild  $y = A(x) \in V$  zugeordnet

Forderung:  $A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A(x_1) \oplus \lambda_2 A(x_2)$

$$= \lambda_1 y_1 \oplus \lambda_2 y_2$$

Abbildung  $A$  ist mit den beiden linearen Strukturen (Vektorraumstrukturen) verträglich

Solche Abbildungen von  $VR U$  in  $VR V$  heißen lineare Abbildung von  $U$  in  $V$ .

Bemerkung: lineare Funktion:  $y = kx + d$   
Abbildung von  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$   
keine lineare Abbildung

Definition:  $S \subseteq U$  Teilmenge

$$A(S) = \{y \mid y = A(x) \text{ für ein } x \in S\}$$

$A(S) \subseteq V$  Teilmenge

Speziell:  $A(U) = \{y \mid \text{es existiert ein } x \in U \text{ mit } y = A(x)\}$   
tatsächliches Bild von  $U$  unter der  
Abbildung  $A$

Behauptung:  $A(U) \subseteq V$  Teilraum

Beweis: zu zeigen:  $y_1, y_2 \in A(U)$

$$\lambda_1, \lambda_2 \in K$$

dann ist auch  $\lambda_1 y_1 \oplus \lambda_2 y_2 \in A(U)$

da  $y_1 \in A(U)$  existiert  $x_1 \in U$  mit  
 $y_1 = A(x_1)$

$y_2 \in A(U) \Rightarrow$  es existiert  $x_2 \in U$  mit  $y_2 = A(x_2)$

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in U$$

$$\begin{aligned} A(x) &= A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A(x_1) \oplus \lambda_2 A(x_2) = \\ &= \lambda_1 y_1 \oplus \lambda_2 y_2 \in A(U) \end{aligned}$$

$\langle A(U), \oplus, K \rangle$  VR: Bildraum

Wenn  $A(x_1) = A(x_2)$

$$x_1 + (-x_2) = 1 \cdot x_1 + (-1) \cdot x_2 \quad (-x_2) = (-1) x_2$$

$$\begin{aligned} A(x_1 + (-x_2)) &= 1 \cdot A(x_1) + (-1) \cdot A(x_2) = \\ &= 1 \cdot y + (-1) \cdot y = y + (-y) = 0 \end{aligned}$$

(wenn  $A(x_1) = A(x_2)$ )



$$\underbrace{v_1 + (-v_2)}_{\neq 0}$$

Urbild von  $\sigma$

Eigenschaften linearer Abbildungen:

$$1, \quad A(\sigma) = \sigma \quad A(\sigma_v) = \sigma_v \quad \begin{matrix} \sigma_v \in U \\ v \in V \end{matrix}$$

$$\sigma = 0 \cdot v \quad \underline{A(\sigma) = A(0 \cdot v) = 0 \cdot A(v) = \sigma}$$

2, mit vollständiger Induktion:

$$v_i \quad 1 \leq i \leq n$$

$$A\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i A(v_i)$$

$$3, \quad v_1, \dots, v_n \text{ l.a.} \Rightarrow A(v_1), \dots, A(v_n) \text{ l.a.}$$

es existiert  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ , sodass

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \sigma$$

dann gilt also

$$A\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) = A(\sigma) = \sigma$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i A(v_i)$$

$$\Rightarrow \text{es existiert } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0), \text{ sodass}$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i A(v_i)$$

$$\Rightarrow \text{d.h. } A(v_1), \dots, A(v_n)$$

4, Frage: gilt auch  $v_1, \dots, v_n$  l.u., dann auch  $A(v_1), \dots, A(v_n)$  l.u.?

Bsp.  $A: U \rightarrow V$   $A(v) = 0$

Voraussetzung:  $U \neq \{0\}$   $a \in U, a \neq 0$   
dann ist  $a$  l.u.  
aber  $A(a) = 0$  l.a.!

$\Rightarrow$  Frage ist mit NEIN zu beantworten!

Umgekehrt gilt:

Sind  $A(v_1), \dots, A(v_n)$  in  $V$  l.u.

$\Rightarrow$  (Urbilder)  $v_1, \dots, v_n$  l.u.

Beweis indirekt: Angenommen  $v_1, \dots, v_n$  l.a.

$\Rightarrow A(v_1), \dots, A(v_n)$  l.a.

Widerspruch zur Voraussetzung:  $A(v_1), \dots, A(v_n)$  l.u.

Definition:  $\text{Kern}(A) = \ker(A) = \{v \mid A(v) = 0\}$   
oder  $\ker(A)$

Behauptung:  $A: U \rightarrow V$  lineare Abbildung  
ist  $\text{Kern}(A) \subseteq U$  Teilraum

Beweis:  $v_1, v_2 \in \text{Kern}(A)$   $\lambda_1, \lambda_2 \in K$

$$A(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 A(v_1) + \lambda_2 A(v_2) = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 = 0$$

Satz:  $A: U \rightarrow V$  lineare Abbildung

$$A(v) = y$$

$$A^{-1}(y) = \{z \mid A(z) = y\} = v + \text{Kern}(A) = \{v\} + \text{Kern}(A)$$

Beweis:  $A(v + \text{Kern } A) = \{y\}$

$$A^{-1}(y_1) \neq A^{-1}(y_2) \quad y_1 \neq y_2$$

$$\Rightarrow A^{-1}(y_1) \neq A^{-1}(y_2)$$

$$A^{-1}(y_1) \cap A^{-1}(y_2) = \emptyset$$

$A: U \rightarrow V$  lineare Abbildung  
von  $U$  in  $V$  (gemeinsamer Skalarkörper)

$$A(u) \in V \text{ TR}$$

$$\text{Kern } A \subseteq U \text{ TR}$$

$$A: U \rightarrow V$$

$U$	$V$	Eigenschaft	Name
$\text{Kern } A \subseteq U$	$A(u) \in V$		homomorph
$\text{Kern } A = \{0\}$	$A(u) \in V$	1-1-Abb. (injektiv)	monomorph
$\text{Kern } A \subseteq V$	$A(u) = V$	$\rightarrow$ (surjektiv)	epimorph
$\text{Kern } A = \{0\}$	$A(u) = V$	$\xrightarrow{1-1}$ (bijektiv)	isomorph

System  $S$  l.a. in  $U \Rightarrow A(S)$  l.a. in  $V$

$\text{Kern } A = \{0\} \Leftrightarrow S \text{ l.u. in } U \Rightarrow A(S) \text{ l.u. in } V!$

$A: U \rightarrow V$  lineare Abbildung

und für eine gegebene Basis  $B$  in  $U$

ist  $A(v)$  für jeden Basisvektor gegeben

$\Rightarrow A$  ist als lineare Abbildung eindeutig bestimmt.

Spezialfall:

$U$  VR über  $K$ ,  $\dim U = n$

$V$  VR über  $K$ ,  $\dim V = n$

$B = \{a_1, \dots, a_n\}$  Basis von  $U$

$\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  geordnete Basis in  $U$

$C = \{b_1, \dots, b_n\}$  Basis von  $V$

$\langle b_1, \dots, b_n \rangle$  geordnete Basis von  $V$

$\Rightarrow A: U \rightarrow V$  (lineare Abbildung)

$$A(a_i) = b_i$$

$$v \in U \quad v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot a_i$$

$$A(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot b_i$$

$$A(U) = V$$

$$\ker A = \{0\}$$

$A$  ist ein Isomorphismus!

Bsp.:  $V = K^n$

kanonische Basis  $e_1, \dots, e_n$

$U$  VR über  $K$ ;  $\dim U = n$

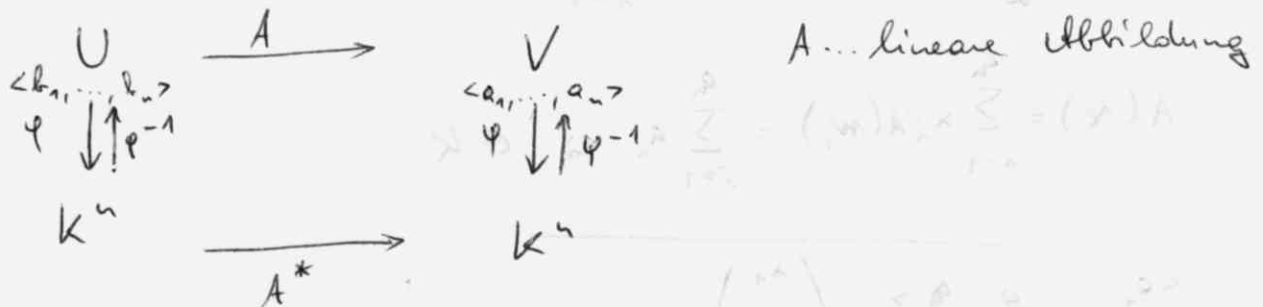
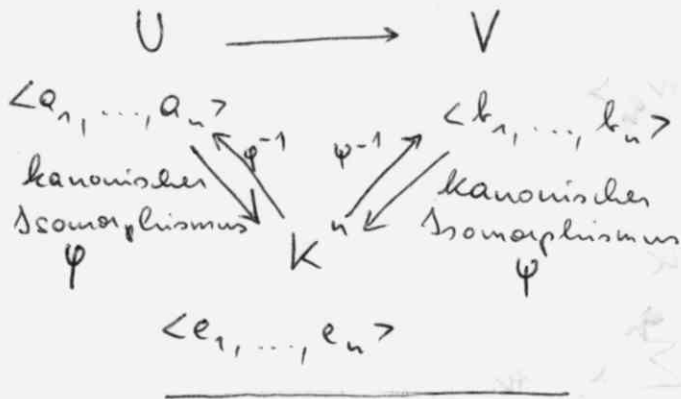
$\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  geordnete Basis

$A: U \rightarrow K^n$  lineare Abbildung

$$A(a_i) = e_i$$

$$A\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

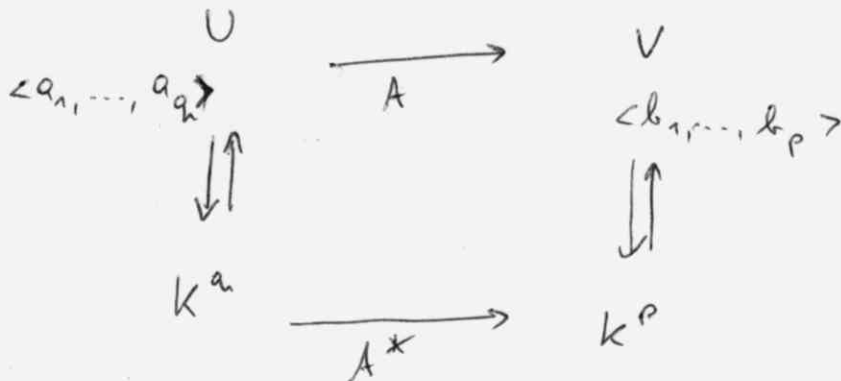
kanonischer Isomorphismus von  $U$  auf  $K^n$



$A \dots$  lineare Abbildung

kommutatives Diagramm

Verallgemeinerung:  $\dim U \neq \dim V$



$p=1$ :

$$\begin{array}{ccc}
 A^*: K^q \rightarrow K & & \langle K_1^1, +, K \rangle \cong \langle K_1, +, K \rangle \\
 & & (x) \quad x \in K
 \end{array}$$

allgemeiner:

$$U \rightarrow K$$

Vektor in  $U \rightarrow$  Wert in  $K$  zugeordnet

$\langle K_1, +, K \rangle$ : lineare Funktionale

$K^{q_n}$  : Basis  $\langle w_1, \dots, w_{q_n} \rangle$

$\downarrow$

$K$

$\langle a_1, \dots, a_{q_n} \rangle \in K$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{q_n} \end{pmatrix} \in K^{q_n}$$

$$v = \sum_{i=1}^{q_n} x_i \cdot w_i$$

$$A(v) = \sum_{i=1}^{q_n} x_i A(w_i) = \sum_{i=1}^{q_n} a_i \cdot x_i \in K$$

---

$$\begin{matrix} \langle a_1, \dots, a_{q_n} \rangle \\ A \end{matrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{q_n} \\ v \end{pmatrix}$$

lineare Abbildung  $\langle K^n, +, \cdot \rangle \rightarrow \langle K, +, \cdot \rangle$

lineare Funktionale

bezogen auf die kanonische Basis in  $K^n$  (geordnete Basis  $\langle w_1, \dots, w_n \rangle$ )

$$w_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_i$$

$a_i \in K$  Bild von  $w_i$

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$$

"Spalte"

Bild:  $\sum_{i=1}^n a_i x_i$

Schreibweise:  $(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}^t$

Transponierte des Spaltenvektors  $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = (a_1, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}' = a'$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i x_i = (a_1, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a' \cdot x$$

$(a, x)$  skalares (inneres) Produkt

lineare Abbildung  $A: K^q \rightarrow K^p$

geordnete kanonische Basen

$$(w_1, \dots, w_q) \quad (w'_1, \dots, w'_p)$$

$$w_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_j$$

$q$ -tupel

$$w'_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_i$$

$p$ -tupel

$$A(w_j) = b_j \in K^p$$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^q x_j \cdot w_j$$

$$A(v) = \sum_{j=1}^q x_j \cdot A(w_j) = \sum_{j=1}^q x_j \cdot b_j$$

$$b_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix} \quad p\text{-tupel} \quad b_{ij} \in K$$

$$\langle b_1, b_2, \dots, b_q \rangle$$

Abbildung  $A$  eindeutig bestimmt

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & & b_{pq} \end{pmatrix}$$

$p \times q$ -„Rechteck“

Schema mit Elementen aus  $K$

$p$  Zeilen,  $q$  Spalten

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$$

$$y_i = \sum_{j=1}^q b_{ij} \cdot x_j \in K$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1q}x_q \\ \vdots \\ b_{p1}x_1 + b_{p2}x_2 + \dots + b_{pq}x_q \end{pmatrix} =$$



$$= \begin{pmatrix} k_{11}x_1 \\ \vdots \\ k_{p1}x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{12}x_2 \\ \vdots \\ k_{p2}x_2 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} k_{1q}x_q \\ \vdots \\ k_{pq}x_q \end{pmatrix} =$$

$\in K^n \quad \in K^n \quad \in K^n$

$k_{ij}x_j = x_j \cdot k_{ij}$

$$= x_1 \cdot \begin{pmatrix} k_{11} \\ \vdots \\ k_{p1} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} k_{12} \\ \vdots \\ k_{p2} \end{pmatrix} + \dots + x_q \cdot \begin{pmatrix} k_{1q} \\ \vdots \\ k_{pq} \end{pmatrix} =$$

$$= x_1 \cdot k_1 + x_2 \cdot k_2 + \dots + x_q \cdot k_q = A(x)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

$$A \cup L \cup L \cup L \cup L \cup L$$

$p \times q$  Schema aus Elementen von  $K$

MATRIX; Plural MATRIZEN

$$A(w_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{pj} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = y$$

Zeilen- $q$ -Tupel  $a' = (a_1, \dots, a_q)$

$b' = (b_1, \dots, b_q)$  Elemente eines Vektors

$$v' = \lambda a' + \mu \cdot b' = (c_1, \dots, c_q)$$

$$c_j = \lambda a_j + \mu \cdot b_j$$

$$A = (a_{ij})$$

$$B = (b_{ij})$$

$$\boxed{p \times q}$$

$$\lambda, \mu \in K$$

$$C = (c_{ij})$$

$$c_{ij} = \lambda a_{ij} + \mu b_{ij}$$

$$1 \leq i \leq p$$

$$1 \leq j \leq q$$

$$C = \lambda \cdot A + \mu \cdot B \quad \dots \text{Vektorsumme}$$

lineare Abbildung  $A: V \rightarrow V$

Spezialfall:  $A: K^q \rightarrow K^p$

kanonische Basis  $(w_1, \dots, w_q)$   $(w'_1, \dots, w'_p)$

$$A(w_j) = b_j \quad 1 \leq j \leq q$$

Matrix  $A$ , deren Spaltenvektoren  $b_1, \dots, b_q$  sind

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} \quad y = A(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = A \cdot x$$

Matrix:  $p \times q$ -Matrix

Durch Verallgemeinerung von  $p=1$ :

lineare Funktionale:  $(a_1, \dots, a_q)$

Elemente des VR  $K^q$  der Zeilenvektoren

$A, B$

$$(a_{ij}), (b_{ij}) \quad C = \lambda \cdot A + \mu \cdot B$$

$$c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij} + \mu \cdot b_{ij}$$

Menge der Matrizen über  $K$  mit  $p$  Zeilen und  $q$  Spalten ( $p \times q$ -Matrizen)  $M_{pq}$  bildet VR über  $K$ .

kanonische Basis:  $E_{ij}$  hat an der Stelle  $i,j$  1 sonst 0

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{p,q} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q \end{matrix}$$

$p \cdot q$  solche Matrizen  
E. S.

$$A = (a_{ij}) = \sum_{i,j} a_{ij} \cdot E_{ij}$$

l.u.:  $\sigma = (0) = \sum_{i,j} a_{ij} \cdot \xi_{ij} \Rightarrow a_{ij} = 0$   
 Nullmatrix f. a.  $i, j$

$\dim \langle L_{p,q}, +, \cdot, K \rangle = p \cdot q$

$L(U, V) = \{A \mid \text{lineare Abbildungen von } U, V\}$

$C = A + B: \text{ f. a. } v \in U, C(v) = A(v) + B(v)$

$D = \lambda \cdot A; \lambda \in K: \text{ f. a. } v \in U, D(v) = \lambda \cdot (A(v))$

$F = \lambda \cdot A + \mu \cdot B \quad F(v) = \lambda \cdot (A(v)) + \mu \cdot (B(v))$

$U \xrightarrow{A} V$  endlich-dimensional

$\begin{array}{ccc} \psi \downarrow & & \downarrow \psi \\ K^q & \xrightarrow{A^*} & K^p \\ & \alpha & \end{array}$

$A \dots A^* \dots \alpha$   
 $L(U, V)$  Bijektion  $L_{p,q}$   
 VR-Isomorphismus

$\dim \langle L(U, V), +, \cdot, K \rangle = \dim \langle L_{p,q}, +, \cdot, K \rangle = p \cdot q =$

$= \dim U \cdot \dim V$

$U \xrightarrow{A} V \xrightarrow{B} W$

$v \xrightarrow{A} y = A(v) \xrightarrow{B} z = B(y) = B(A(v)) = C(v)$

$A, B$  linear

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \xrightarrow{A} \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \xrightarrow{B} \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2$

$C$   
 linear

$$C = B \circ A$$

$$C(v) = B(A(v))$$

Spezialfall:

$$\begin{array}{ccccc} K^p & \xrightarrow{A} & K^q & \xrightarrow{B} & K^r \\ w_1, \dots, w_p & & w'_1, \dots, w'_q & & w''_1, \dots, w''_r \\ & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & \\ & U & & V & \end{array}$$

Spaltenvektor  $\alpha: b_j; b_j = A(w_j)$

$$A(v) = \alpha \cdot v$$

$$A(w_j) = \alpha \cdot w_j = b_j$$

$$\beta(b_j) = B(b_j) = B(A(w_j)) = C(w_j) = v \cdot w_j = b'_j$$

j. Spaltenvektor von  $v$

$$v \cdot w_j = v(\alpha \cdot w_j)$$

$$v \cdot v = v(\alpha \cdot v) \quad v \in U$$

$$v = v \cdot \alpha$$

$$\Rightarrow C = B \circ A$$

$w_j \rightarrow$  Spaltenvektor  $b'_j$  der Matrix  $v$

$$b'_j = v \cdot b_j$$

Spaltenvektor von  $\alpha$

$$c_{ij} = \langle b_{i1}, \dots, b_{iq} \rangle$$

i-ter Zeilenvektor von  $b$

$$1 \leq i \leq q$$

$$\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{qj} \end{pmatrix}$$

$$1 \leq j \leq p$$

$$c_{1,p}; b_{1,q}; \alpha_{q,1,p}$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} \cdot a_{kj}$$

$$\begin{matrix} \text{3x2} & & \text{2x3} \\ \underbrace{U = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{3x2}} & \cdot & \underbrace{V = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}}_{\text{2x3}} \end{matrix}$$

$$C = V \cdot U$$

2x2

$C_{11}$  = "1. Zeile von  $b$ " mal "1. Spalte von  $a$ "

$$\underline{b_{11}} + a_{11} \quad \underline{b_{11} \cdot a_{11} + b_{12} \cdot a_{21} + b_{13} \cdot a_{31} = C_{11}}$$

$$\underline{C_{11}} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot (-2) = \underline{2}$$

$$\underline{C_{12}} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 = \underline{13}$$

$$\underline{C_{21}} = 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 + 5 \cdot (-2) = \underline{-8}$$

$$\underline{C_{22}} = 3 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) + 5 \cdot 3 = \underline{25}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ -8 & 25 \end{pmatrix}$$

$p \times q$ -Matrizen über  $K$

Operationen:  $A+B$ ,  $\lambda \cdot A$  VR über  $K$ :  $L_{pq}$

$$A \cdot B$$

$$p \times q \quad q \times r$$

Anzahl der Spalten des 1. Faktors = Anzahl der Zeilen des 2. Faktors

$$A \cdot B = C$$

$$p \times q \quad q \times r \quad p \times r$$

$$B \cdot A = C$$

$$q \times r \quad r \times p \quad q \times p$$

nicht kommutativ?

$$A \cdot B$$

$$p \times p \quad p \times p$$

$$\Rightarrow A \cdot B \in L_p$$

$$A, B \in L_p (= L_p)$$

$$B \cdot A \in L_p$$

Bsp.:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
 $p=2$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{A \cdot B \neq B \cdot A}$$

$$\langle L_p, +, \cdot \rangle$$

$p \times p$ -Matrizen

1,  $\langle L_p, + \rangle$  abelsche Gruppe  $O = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$  Nullmatrix

2,  $\langle L_p, \cdot \rangle$  Monoid  $E = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$  Einheitsmatrix  
 (i.d. nicht kommutativ)

3, beide Distributivgesetze gelten:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$\Rightarrow$  Ring mit Einheits-element; NICHT kommutativ!

$$A \in L_p (= L_p)$$

entsprechen Abbildungen von  $K^p$  in  $K^p$

bezogen z.B. auf die kanonischen Basen

$A: U \rightarrow U$  VR lineare Abbildungen  
von VR in sich

Homomorphismen

in diesem Fall: Endomorphismen

Isomorphismen (Bijektionen)

in diesem Fall: Automorphismen

$A \in L_p$  liefert eine lineare Abbildung von  $K^p$   
in  $K^p$  (in sich)

$p \times p$ -Matrix: quadratische Matrix

---

$$\begin{array}{ccc} A: K^n & \rightarrow & K^p \\ U & & V \end{array} \quad \begin{array}{c} A \\ p \times n \end{array}$$

$A$ : Homomorphismen

Wann ist  $A$  ein Epimorphismus?

$$A(U) = A(K^n) = V = K^p$$

$A$  Spaltenvektoren  $b_1, \dots, b_n$

$$A(w_1), \dots, A(w_n)$$

$$A(U) = A(K^n) = \langle b_1, \dots, b_n \rangle \stackrel{?}{=} K^p \Leftrightarrow \dim A(U) = \dim V$$

Definition:  $A: U \rightarrow V$  linear Abbildung  
so heißt  $\dim A(U)$  der Rang der  
Abbildung  $A$ .



Definition:  $\alpha$ : eine Matrix, die der linearen Abbildung  $A$  entspricht

So definieren wir: (Abbildungs-)Rang:

$$\text{Rang } \alpha = \text{Rang } A = \dim A(U)$$

$$A: U \rightarrow V \quad A(x) = y$$

$$A(x + \text{Kern } A) = \{y\}$$

$$U = \text{Kern } A \oplus U_1$$

z.B. Basen:

$$(b_1, \dots, b_k, b_{k+1}, \dots, b_n) \quad (b_1, \dots, b_k) \quad (b_{k+1}, \dots, b_n)$$

Basis von  $U$       von  $\text{Kern } A$       von  $U_1$

$$L(b_1, \dots, b_n) = L(b_1, \dots, b_k) + (b_{k+1}, \dots, b_n)$$

$$(\text{Kern } A) \cap U_1 = \{0\}$$

$U_1$  ist ein Komplementärraum von  $\text{Kern } A$

$$\dim U_1 + \dim(\text{Kern } A) = \dim U$$

$$x \in U \Rightarrow x_0 \in U_1, z \in \text{Kern } A$$

$$\text{so dass } x = x_0 + z$$

$$A(x) = A(x_0 + z) = A(x_0) + A(z) = A(x_0)$$

d.h. zu jedem Vektor  $y \in A(U)$  existiert  $x_0 \in U_1$  mit  $A(x_0) = y$  (genau ein  $x_0$ !)

$$A(U_1) = A(U)$$

$$U_1 \cong A(U)$$

Bijektion

$$\dim U_1 = \dim A(U) = \text{Rang } A = \text{Rg } A$$

$$\text{Also: } \dim(\text{Kern } A) + \text{Rg } A = \dim U$$

$$\dim(\text{Kern } A) + \dim A(U) = \dim U$$

Also:  $A$  ist ein Epimorphismus:  $\text{Rg } A = \dim V$

$A$  ist ein Monomorphismus:  $\dim A(U) = \dim V$   
 $\text{Kern } A = \{0\}$

$$\dim(\text{Kern } A) = 0$$

$A$  ist ein Isomorphismus (Bijektion):  
 $\text{Rg } A = \dim U$

$$\text{Rg } A = \dim U = \dim V$$

Matrix  $A$  vermittelt einen Epimorphismus, wenn

$$\text{Rg } A = \text{Anzahl der Zeilen}$$

Monomorphismus:

$$\text{Rg } A = \text{Anzahl der Spalten}$$

Isomorphismus (Automorphismus):

$$\text{Rg } A = \text{Anzahl der Zeilen} = \text{Anzahl der Spalten}$$